

# *Géométrie euclidienne du triangle*

*Pierre Renson*

Université de Liège  
Département AGO  
P.Renson@ulg.ac.be

# Table des matières

---

Preambule : notations et rappels divers	1
Définitions et relations générales	8
Céviennes, triangles pédal et podaire d'un point	12
Transversales	19
Hauteurs, orthocentre, triangle orthique, points eulériens, cercle de Taylor	24
Médianes, centre de gravité, triangle complémentaire	33
Médiatrices, cercle circonscrit, droite d'Euler, triangle tangentiel	41
Pieds des médianes et pieds des hauteurs, cercle des neuf points	48
Bissectrices, cercle inscrit et cercles esinscrits, trisectrices	51
Notes et théorèmes divers	65
Cercles d'Apollonios	69
Céviennes conjuguées isogonales et points inverses	72
Symédianes, point, droite et cercles de Lemoine	75
Cercle de Brocard, points de Brocard, triangles de Brocard	82
Aires	89
Wallaces	94
Figures construites sur les côtés	98
Cas particuliers	110
Relations possibles entre triangles	119
Données relatives à des points remarquables	131
Index	135

## Preamble: notations et rappels divers

### Implication

Pour énoncer qu'une relation  $A$  entraîne une relation  $B$ , nous écrivons

$$A \sim B.$$

Ceci signifie donc que  $A$  est une condition suffisante (éventuellement nécessaire aussi) pour que  $B$  soit réalisé.

Le signe  $\sim$  ne doit pas être confondu avec le signe  $\Rightarrow$  qui signifie "donc" et qui est utilisé dans une démonstration.

### Points

Les points sont désignés par des lettres majuscules droites  $A, B, \dots$ , éventuellement avec des indices. Ce sont le plus souvent des lettres latines, mais parfois des lettres grecques:  $\Gamma$  pour le point de Gergonne,  $D_1$  et  $D_2$  pour les points de Brocard, etc.

### Droites et segments de droites

Les droites et segments de droites sont désignés par des lettres minuscules  $a, b, \dots$ , éventuellement avec des indices.

Une droite peut aussi être désignée par la juxtaposition des lettres désignant deux de ses points et un segment de droite peut l'être par la juxtaposition des lettres désignant ses extrémités. Ainsi  $PQ$  désigne soit la droite passant par  $P$  et  $Q$ , soit le segment de droite ayant  $P$  et  $Q$  pour extrémités; le contexte permet de voir ce dont il s'agit. Le segment  $PQ$  est dit être porté par la droite  $PQ$  (ou autre par un autre segment auquel appartiennent  $P$  ou  $Q$  ou les deux sur cette droite).

La longueur d'un segment de droite est représentée par la même lettre minuscule que celle qui désigne ce segment. Lorsqu'on utilise la notation explicitant les extrémités, la longueur est représentée par ce symbole surmonté d'une barre horizontale: la longueur du segment  $PQ$  est représentée par  $\overline{PQ}$ . Le plus souvent,  $\overline{PQ}$  est seulement pris en valeur absolue, mais s'il est pris en valeur algébrique, il est entendu que la première lettre désigne l'origine et la seconde l'extrémité du segment.

Une longueur sera parfois représentée par une lettre majuscule italique: par exemple, le rayon  $R$  du cercle circonscrit à un triangle, pour le distinguer du rayon  $r$  du cercle inscrit.

### Points sur une droite

Une droite pouvant être considérée comme l'ensemble de ses points, on écrit  $P \in d$  pour indiquer que le point  $P$  est sur la droite  $d$ .

Un point  $P$  sur une droite  $AB$  détermine deux segments  $PA$  et  $PB$  dont le rapport des

longueurs  $\frac{PA}{PB}$  prises en valeurs algébriques est appelé le rapport de section suivant lequel P divise le segment AB. Il est négatif si P est entre A et B, positif dans le cas contraire.

### Milieu d'un segment et généralisation

Le point milieu du segment de droite PQ est désigné par  $\frac{1}{2}(P, Q)$ . Le rapport de section suivant lequel il divise PQ est -1.

Plus généralement, un point  $R \in PQ$  tel que  $\frac{PR}{RQ} = k$  sera désigné par  $(1-k)P, kQ$ . On retrouve  $\frac{1}{2}(P, Q)$  lorsque  $k = \frac{1}{2}$ , soit  $(\frac{1}{2}P, \frac{1}{2}Q) = \frac{1}{2}(P, Q)$ . Les extrémités P et Q du segment correspondent respectivement à  $k=0$  et  $k=1$ . Le point R est le barycentre des points P et Q affectés des masses respectives  $1-k$  et  $k$ .

### Birapport

Le birapport de quatre points A, B, C, D d'une droite pris dans cet ordre (qu'on appelle aussi rapport anharmonique, ce qui paraît exclure à tort le cas où il est harmonique) est désigné par (ABCD). Rappelons que c'est le quotient des rapports de section suivant lesquels C et D divisent le segment AB:  $(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ . Si  $(ABCD) = -1$ , les quatre points sont dits former une ponctuelle harmonique<sup>(\*)</sup>; on dit alors que C et D divisent harmoniquement le segment AB ou que C et D séparent harmoniquement A et B (et vice versa puisque  $(ABCD) = (CDAB)$ ) ou encore que D est le conjugué harmonique de C (et vice versa) par rapport au segment AB. On a alors  $\frac{DA}{DB} = -\frac{CA}{CB}$  et  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ . Dans ce cas, comme dans tous les cas où (ABCD) est négatif, l'un des points C et D est entre A et B, tandis que l'autre est extérieur au segment AB.

Si nous désignons par M le milieu  $\frac{1}{2}(A, B)$  du segment AB, on a  $(ABCD) = -1 \Rightarrow MC \cdot MD = MB^2$ .

### Intersection de deux droites

Le point d'intersection de deux droites  $d_1$  et  $d_2$  est désigné par  $(d_1, d_2)$ . Si plusieurs droites, par exemple  $d_1, d_2$  et  $d_3$ , sont concourantes (voir plus loin), on désignera leur point de concours d'une manière semblable, soit  $(d_1, d_2, d_3)$  dans cet exemple.

### Parallélisme et perpendicularité

Pour énoncer que deux droites a et b sont parallèles ou perpendiculaires, on écrit respectivement  $a \parallel b$  ou  $a \perp b$ . Ce sont des relations symétriques l'une et l'autre; la première est transitive, c.à.d.  $a \parallel b$  et  $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$ , mais la seconde ne l'est pas puisqu'on a au contraire  $\{a \perp b \text{ et } b \perp c\} \Rightarrow a \parallel c$ .

Dans le premier cas, si  $P \in b$ , b est appelée la parallèle menée par P à a; elle est désignée par  $\parallel(a, P)$ .

Dans le second cas, si  $P \in b$ , b est appelée la perpendiculaire abaissée de P sur a; elle est désignée par  $\perp(a, P)$ . Le point  $Q = (a, b)$  est alors appelé le pied de cette perpendiculaire. Il est aussi dit être la projection orthogonale de P sur a et on le désigne par  $\text{proj}_a P$ ; on a donc  $\text{proj}_a P = [a, \perp(a, P)]$ . Rappelons que  $\perp(a, P) \perp \parallel(a, P)$ .

(\*) Si nous appelons x, y et z les abscisses de C, B et D par rapport à A pris pour origine, en posant  $AC = x$ ,  $AB = y$  et  $AD = z$ , ces trois nombres vérifient la relation  $\frac{x-z}{y-z} = \frac{x}{y}$ , équivalente à  $\frac{z}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , et on dit alors qu'ils forment une proportion harmonique, suivant la dénomination introduite par le pythagoricien Archytas de Carente, à cause des longueurs des cordes vibrantes donnant l'accord parfait do, mi, sol.

Si  $P \in a$ , la perpendiculaire élevée en  $P$  à  $a$  est de même désignée par  $\perp(a, P)$ .

### Distance d'un point à une droite

La distance d'un point  $P$  à une droite  $d$  est la longueur du segment de la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur  $d$  ayant pour extrémités  $P$  et  $\text{proj}_d P$ , c.à.d. la longueur  $\overline{P \text{proj}_d P}$ . On la note  $\text{dist}_d P$ .

### Points symétriques

Le point symétrique de  $A$  par rapport à un point  $P$  ou à une droite  $d$  est désigné respectivement par  $\text{sym}_P A$  ou par  $\text{sym}_d A$ .

Dans le premier cas, on a  $P \in A \text{sym}_P A$  et  $\overline{AP} = \overline{P \text{sym}_P A}$ , d'où  $\overline{A \text{sym}_P A} = 2 \overline{AP}$ ; il est équivalent d'écrire par exemple  $P = \frac{1}{2}(A, B)$  ou  $B = \text{sym}_P A$ .

Dans le second cas, on a  $A \text{sym}_d A \perp d$  et  $\overline{A \text{proj}_d A} = \overline{\text{proj}_d A \text{sym}_d A}$ .

### Cercles

Un cercle, lieu des points équidistants d'un point donné, son centre, est généralement désigné par une lettre majuscule italique telle que  $\mathcal{C}$ , avec un éventuel indice. Occasionnellement d'autres lettres que  $\mathcal{C}$  peuvent être utilisées, par exemple  $\mathcal{E}$  pour le cercle de Taylor.

Pour ceux qui consulteraient un ancien livre de géométrie ou de trigonométrie, disant de vers le milieu du 20<sup>e</sup> siècle ou avant, signalons qu'on appelait cercle ce qu'on a ensuite appelé disque, c.à.d. la surface intérieure au cercle, limitée par celui-ci, tandis que le cercle était appelé circonférence.

Pour indiquer qu'un point  $P$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$  (point afférent à  $\mathcal{C}$ ), on écrit  $P \in \mathcal{C}$ , suivant une notation analogue à celle qui indique qu'un point est sur une droite.

On sait qu'étant donnés trois points  $P, Q, R$ , non colinéaires, il y a un et un seul cercle passant par ces trois points; nous le désignerons par la notation  $\circ(P, Q, R)$ .

Un cercle peut aussi être désigné par son centre  $O$  et son rayon  $R$  suivant la notation  $\circ(O, R)$ . Le cercle construit sur le segment de droite  $AB$  pour diamètre sera désigné par  $\circ(AB)$ .

Le centre d'un cercle  $\mathcal{C}$  est désigné par  $\circ(\mathcal{C})$ . Le centre du cercle passant par les points  $P, Q$  et  $R$  peut donc être désigné par  $\circ[\circ(P, Q, R)]$ .

La mesure d'un arc de cercle dont les extrémités sont  $P$  et  $Q$  sur un cercle donné est notée  $\widehat{PQ}$ . Elle est la même que celle de l'angle au centre dont les côtés sont  $OP$  et  $OQ$  si  $O$  est le centre.

### Angles

La mesure d'un angle est représentée par la lettre désignant son sommet surmontée d'un accent circonflexe, s'il n'y a aucune ambiguïté possible. Sinon on fait précéder la lettre désignant le sommet de la lettre désignant un point d'un côté de l'angle et on la fait suivre de celle désignant un point de l'autre côté, le tout surmonté d'un accent circonflexe (rappelons que les côtés de l'angle doivent être considérés comme des demi-droites ayant le sommet de l'angle pour origine). Ainsi la mesure de l'angle dont un côté est  $AB$  et l'autre  $AC$  est représentée par  $\widehat{BAC}$  ou si le contexte évite toute ambiguïté, simplement par  $\widehat{A}$ . Si cette mesure est prise en valeur algébrique, il est entendu que  $AB$  est le côté origine et  $AC$  le côté extrémité de l'angle.

L'angle lui-même est éventuellement désigné par une telle notation sous l'accent circonflexe: angle BAC par exemple.

La mesure de l'angle entre deux droites  $d_1$  et  $d_2$  peut être désigné par  $\text{ang}(d_1, d_2)$ .

Les mesures des angles peuvent être représentées par des lettres grecques minuscules.

Les unités utilisées pour la mesure des angles (ou des arcs de cercles, qui ont même mesure que les angles au centre correspondants) sont le droit, abrégé en dr.<sup>(\*)</sup>, le degré, noté °, ou le radian, abrégé en rad.; on a

$$1 \text{ dr.} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Notons toutefois que l'unité rad., unité naturelle pour les arcs de cercles, n'est souvent pas indiquée, mais est sous-entendue, spécialement si il s'agit d'un multiple ou sous-multiple de  $\pi$ , surtout dans le cas de l'argument d'une fonction géométrique, telle que  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ .

Rappelons que deux angles dont la somme = 1 dr. sont dits complémentaires et que deux angles dont la somme = 2 dr. sont dits supplémentaires.

### Antiparallélisme

Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont dites antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle BAC si  $\text{ang}(d_1, AB) = \text{ang}(d_2, AC)$  et  $\text{ang}(d_1, AC) = \text{ang}(d_2, AB)$ , l'une de ces deux relations étant d'ailleurs suffisante, car l'une entraîne l'autre. Il y a similitude inverse (voir plus loin) entre le triangle dont les côtés sont portés par  $d_1$ , AB et AC et celui dont les côtés sont portés par  $d_2$ , AC et AB. Cette relation entre  $d_1$  et  $d_2$  s'écrit

$$d_1 \uparrow BAC \downarrow d_2 \quad (\text{ou } d_2 \uparrow BAC \downarrow d_1, \text{ cette relation étant symétrique}).$$

Rappelons qu'alors les points d'intersection de  $d_1$  et  $d_2$  avec AB et AC sont concycliques.

L'antiparallèle par rapport aux côtés de l'angle BAC menée à une droite  $d$  par un point P sera désignée par  $\uparrow BAC \downarrow (d, P)$ .

Rappelons aussi que deux antiparallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

### Bissectrices

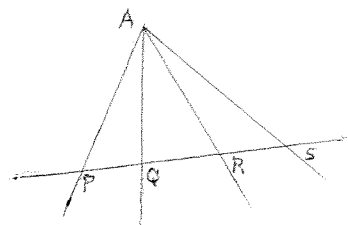
Etant donné l'angle de sommet A et de côtés AB et AC, sa bissectrice, c.à.d. la demi-droite AD telle que  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ , est désignée par  $\frac{1}{2}(AB, AC)$ .

Rappelons que c'est le lieu des points également distants des côtés de l'angle; on a donc  $PEAD \rightarrow \text{dist}_{AB} P = \text{dist}_{AC} P$  et réciproquement.

### Faisceau de demi-droites

Rappelons qu'un faisceau (de demi-droites) est la figure formée d'un ensemble de d'au moins trois demi-droites  $p, q, r, \dots$  issues d'un même point A. Les considérations ci-dessous sont relatives aux faisceaux de quatre demi-droites.

Le bérapport du faisceau des demi-droites (rayons du faisceau) AP, AQ, AR, AS dans cet ordre est désigné par  $(A, PQRS)$  ou par  $(A, pqrs)$  si les rayons sont respectivement désignés par  $p, q, r, s$ . Rappelons que si les points P, Q, R, S sont sur une même droite, il est égal au bérapport  $(PQRS)$



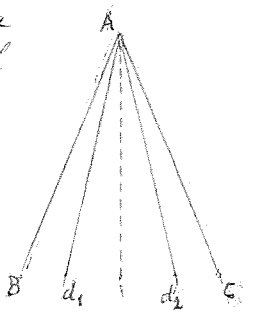
(\*) Signalons que l'auteur a jadis utilisé la notation  $\perp$  pour l'angle droit; il écrirait par exemple  $\perp$  au lieu de 1 dr.

$= \frac{\overline{RP}}{RQ} : \frac{\overline{SP}}{SQ}$  de ces quatre points (voir plus haut) et qu'il est donné par  $(A, PQRS) = \frac{\sin \widehat{PAR}}{\sin \widehat{QAR}} : \frac{\sin \widehat{PAS}}{\sin \widehat{QAS}}$ .

Si le birapport est  $= -1$  (quel que soit le cas en des rayons AR ou AS est entre AP et AQ, et l'autre pas, comme chaque fois qu'il est négatif), on dit que le faisceau est harmonique (comme la ponctuelle PQR) et que les rayons AR et AS séparent harmoniquement les rayons AP et AQ (et vice versa) ou encore que les rayons AR et AS sont conjugués harmoniques par rapport à l'angle PAQ.

Conjuguées isogonales

Deux (semi-)droites  $d_1$  et  $d_2$  sont dites conjuguées isogonales l'une de l'autre par rapport aux côtés d'un angle BAC par le sommet duquel elles passent et l'on écrit  $d_1 = \text{cisog}_{BAC} d_2$  (ou  $d_2 = \text{cisog}_{BAC} d_1$ , cette relation étant symétrique) lorsque  $\text{ang}(AB, d_1) = \text{ang}(d_2, AC)$  et  $\text{ang}(AB, d_2) = \text{ang}(d_1, AC)$ . Il est évident que l'une de ces deux relations entraîne l'autre; il suffira donc que l'une des deux soit vérifiée. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible concernant les côtés de l'angle par rapport auxquels une droite est conjuguée isogonale d'une autre, on se contente d'indiquer en indice le sommet de l'angle, par exemple  $d_2 = \text{cisog}_A d_1$ .



Une condition nécessaire et suffisante est évidemment que la bissectrice de l'angle formé par  $d_1$  et  $d_2$  coïncide avec celle de l'angle BAC:  $\frac{1}{2}(d_1, d_2) = \frac{1}{2}(AB, AC)$ .

Les demi-droites  $d_1$  et  $d_2$  sont simultanément soit intérieures, soit extérieures à l'angle BAC.

Pôles et polaires

On sait que le lieu des points conjugués harmoniques d'un point P par rapport à un cercle  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire des points qui séparent harmoniquement avec P la corde de  $\mathcal{C}$  portée par une sécante passant par ce point, est une droite  $p$  perpendiculaire à la droite  $(CP)$ , appelée polaire de P par rapport à  $\mathcal{C}$ . Nous la noterons  $\text{pol}_{\mathcal{C}} P$ . Le point P est appelé le pôle de cette droite par rapport à  $\mathcal{C}$  et nous le noterons  $\text{pol}_{\mathcal{C}} p$ .

La même notation sera utilisée plus loin (p.16) pour les polaires trilinéaires et pôles trilinéaires, mais aucune confusion ne sera possible, car l'indice de pol sera alors la désignation d'un triangle (par ses trois sommets) au lieu du symbole représentant un cercle.

Introduction d'une notation

Pour introduire une notation destinée à désigner de manière concise un élément géométrique ou une grandeur à considérer dans la suite, on utilise le signe  $\Rightarrow$ , constitué d'une signe d'égalité et d'une pointe de flèche, entre l'expression désignant cet élément ou cette grandeur et la notation qui le ou la remplacera.

- Ainsi pour appeler simplement  $d$  la droite PQ, on écrit  $PQ \Rightarrow d$ ;
- pour appeler  $i$  la bissectrice de l'angle BAC, on écrit  $\frac{1}{2}(AB, AC) \Rightarrow i$ ;
- pour appeler P le point d'intersection des droites  $d_1$  et  $d_2$ , on écrit  $(d_1, d_2) \Rightarrow P$ ;
- pour appeler M le point milieu du segment de droite PQ, on écrit  $\frac{1}{2}(P, Q) \Rightarrow M$ ;
- pour appeler O le centre du cercle  $\mathcal{C}$ , on écrit  $(\mathcal{C}) \Rightarrow O$ ; si  $\mathcal{C} = \circ(P, Q, R)$ , on a par définition  $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$ .

La définition donnée plus haut pour la notation  $\text{dist}_A P$  représentant la distance d'un point P

à une droite  $d$  revient à écrire  $\overline{P \text{ proj}_d P} \Rightarrow \text{dist}_d P$ ; en d'autres termes, si on pose  $\text{proj}_d P \Rightarrow Q$ , on a  $\text{dist}_d P = \overline{QP}$ .

Points colinéaires

Pour énoncer que trois points (ou plus)  $P, Q, R$  sont en ligne droite, on écrit

$$(P, Q, R) - ;$$

ceci implique  $REPPQ, QEPR, PEQR$  et réciproquement pour chacune de ces relations.

La droite portant les trois points peut être désignée par  $PQR$ ; pour l'appeler  $d$  par exemple, on écrit donc  $PQR \Rightarrow d$ , ce qui revient dans ce cas à écrire  $PQ \Rightarrow d$  ou  $PR \Rightarrow d$  ou  $QR \Rightarrow d$ .

Droites concourantes

Pour énoncer que trois droites (ou plus)  $d_1, d_2, d_3$  sont concourantes, on écrit

$$(d_1, d_2, d_3) * ;$$

ceci implique  $(d_1, d_2) \in d_3, (d_2, d_1) \in d_3, (d_1, d_3) \in d_2$  et réciproquement pour chacune de ces relations.

Comme indiqué plus haut à propos de l'intersection de deux droites, le point de concours des trois droites sera désigné par  $(d_1, d_2, d_3)$ ; pour l'appeler par exemple  $P$ , on écrira donc  $(d_1, d_2, d_3) \Rightarrow P$ .

Points concycliques

Pour énoncer que quatre points (ou plus)  $P, Q, R, S$  sont sur un même cercle, on écrit

$$(P, Q, R, S) \circ .$$

Le cercle passant par ces points peut être désigné par  $\circ(P, Q, R, S)$ ; pour l'appeler par exemple  $\mathcal{C}$ , on écrira donc  $\circ(P, Q, R, S) \Rightarrow \mathcal{C}$ .

Si on pose  $\circ[(P, Q, R, S)] \Rightarrow O$ , on a par définition  $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS}$ .

Homothétie

Si une figure  $F'$  est homothétique d'une figure  $F$ , on écrira

$$F' = \text{hom}(C, \rho) F$$

où  $C$  est le centre d'homothétie et  $\rho$  le rapport d'homothétie.

Rappelons que ceci signifie qu'à tout point  $P \in F$  correspond un point  $P' \in F'$  tel que  $(C, P, P') -$  et  $\overline{CP'} = \rho \overline{CP}$ ;

une homothétie entre deux figures est une bijection entre les ensembles de leurs points. Si  $\rho > 0$ , les points  $P$  et  $P'$  sont d'un même côté de  $C$  sur la droite  $CP$  et l'homothétie est dite directe; si  $\rho < 0$ , les points  $P$  et  $P'$  sont de part et d'autre de  $C$  et l'homothétie est dite inverse. Si aux points  $P$  et  $Q \in F$  correspondent  $P'$  et  $Q' \in F'$ , on a  $P'Q' \parallel PQ$ .

On a  $d' = \text{hom}(C, \rho) d \sim d' \parallel d$  et  $C \in d \sim d' = d$ . Une homothétie entre  $F$  et  $F'$  entraîne la similitude de ces figures, similitude qui est toujours directe, avec un rapport de similitude  $k = |\rho|$ ; la similitude devient égalité si  $\rho = +1$  (figures  $F$  et  $F'$  superposées) ou  $\rho = -1$  (figures  $F$  et  $F'$  symétriques par rapport à  $C$ ). Si la figure  $F$  est constituée des points  $P$  tels que  $P' = \text{sym}_C P$  où  $P$  sont les points de  $F$ , on a  $F' = \text{hom}(C, -1) F$ . Les longueurs dans la figure  $F'$  sont aux longueurs correspondantes dans la figure  $F$  dans le rapport  $|\rho|$  et les aires correspondantes dans le rapport  $\rho^2$ . Les parties de figures homothétiques sont évidemment elles-mêmes homothétiques avec même centre et même rapport.

Si on veut énoncer que les figures  $F$  et  $F'$  sont homothétiques sans préciser le



centre et le rapport d'homothétie, on écrit  $F' = \text{hom } F$ .

### Tangence

Pour énoncer qu'une droite  $t$  est tangente à un cercle  $\mathcal{C}$ , on écrit  $t \text{ tang } \mathcal{C}$ . Le point de contact est désigné par  $(\mathcal{C}, t)$ .

De même, pour énoncer que les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont tangents, on écrit  $\mathcal{C}_1 \text{ tang } \mathcal{C}_2$  ou  $\mathcal{C}_2 \text{ tang } \mathcal{C}_1$ ; leur point de contact peut aussi être désigné par  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ .

La tangente au cercle  $\mathcal{C}$  en un de ses points  $T$  (= limite d'une sécante  $TT'$  lorsque  $T' \rightarrow T$  avec  $T \in \mathcal{C}$  et  $T' \notin \mathcal{C}$ ) est désignée par  $\text{tang}_T \mathcal{C}$ .

Chacune des deux tangentes à  $\mathcal{C}$  menées d'un point extérieur  $P$  peut aussi être désignée par  $\text{tang}_P \mathcal{C}$ .

Soient  $T_1$  et  $T_2$  les points de contact des tangentes menées d'un point extérieur  $P$  au cercle  $\mathcal{C}$ ; posons  $\overline{PT_1} \Rightarrow t_1$  et  $\overline{PT_2} \Rightarrow t_2$ . On sait que  $t_1 = t_2 \Rightarrow t$  et que la droite  $T_1T_2$ , qui porte la corde de contact, est la polaire de  $P$  par rapport à  $\mathcal{C}$ :  $\text{pol}_{\mathcal{C}} P = T_1T_2$ .

### Puissance d'un point par rapport à un cercle, axe radical de deux cercles

Une droite passant par un point  $P$  coupe un cercle  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$ , on appelle puissance du point  $P$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  le produit  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , dont on démontre qu'il est indépendant du choix de la droite passant par  $P$ ; si  $PA$  et  $PB$  sont de même sens, ce qui est le cas si  $P$  est extérieur à  $\mathcal{C}$ , le produit est affecté du signe +, tandis que si  $PA$  et  $PB$  sont de sens opposés,  $P$  étant intérieur à  $\mathcal{C}$ , il est affecté du signe -. Nous désignons la puissance de  $P$  par rapport à  $\mathcal{C}$  par la notation  $P_{\mathcal{C}}(P)$ . Si  $P$  est extérieur à  $\mathcal{C}$ , on a  $P_{\mathcal{C}}(P) = t^2$ .

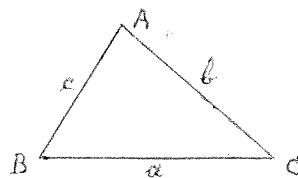
On démontre que le lieu des points de même puissance par rapport à deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , c.à.d. des points  $P$  tels que  $P_{\mathcal{C}}(P) = P_{\mathcal{C}'}(P)$ , est une droite perpendiculaire à la ligne des centres de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ ; cette droite est appelée axe radical des deux cercles. Si ceux-ci sont sécants, l'axe radical porte la corde commune  $I_1I_2$ , où  $I_1$  et  $I_2$  sont les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . En particulier, on a évidemment  $P_{\mathcal{C}}(I_1) = P_{\mathcal{C}'}(I_1) = 0$  et  $P_{\mathcal{C}}(I_2) = P_{\mathcal{C}'}(I_2) = 0$ . Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux concourent en un point, appelé centre radical des trois cercles; c'est donc le point d'égalité puissance par rapport aux trois cercles.

## Définitions et relations générales

### Sommets et côtés

Par définition, un triangle est un polygone ayant 3 côtés et donc 3 sommets.  
On désigne les trois sommets par  $A, B, C$ . Pour les côtés, on pose  $BC \Rightarrow a, CA \Rightarrow b, AB \Rightarrow c$ .

Les côtés  $a, b, c$  sont dits opposés aux sommets respectifs  $A, B, C$  (ou aux angles dont ils sont les sommets) et vice versa.



Si au contraire un angle et un côté sont tels que le sommet est sur ce côté, ils sont dits adjacents.

Conformément à ce qui a été dit sur la notation des longueurs de segments de droites, les longueurs des côtés sont aussi notées  $a, b, c$ :  $\overline{BC} \Rightarrow a, \overline{CA} \Rightarrow b, \overline{AB} \Rightarrow c$ .

Le contexte indique le sens à attribuer aux notations. Par exemple,  $BC$  peut désigner la droite indéfinie portant le côté  $a$  ou bien le segment  $BC$ , c'est-à-dire le côté lui-même. Le symbole  $a$  peut représenter ce segment  $BC$  ou bien sa longueur  $\overline{BC}$ .

Le triangle est le plus souvent désigné par des sommets: triangle  $ABC$ ; mais on peut aussi le désigner par les droites portant ses côtés: triangle  $abc$ .

Il arrive que l'un des points  $A, B, C$ , par exemple  $A$ , soit plus spécialement appelé sommet et le côté opposé, soit dans ce cas  $BC$ , est alors appelé base.

On désigne le demi-périmètre par  $p$ , c.à.d. que pour le périmètre, on pose

$$a + b + c \Rightarrow 2p.$$

On distingue les cas suivants:

triangle équilatéral lorsque les trois côtés sont égaux:  $a = b = c$ ,

triangle isocèle lorsque deux des côtés sont égaux:  $b = c \neq a$ ,

triangle scalène lorsque les trois côtés sont différents:  $a \neq b \neq c \neq a$ .

### Relation du triangle

Si, comme indiqué ci-dessus,  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{CA}$ ,  $c = \overline{AB}$  sont les longueurs des côtés, on a

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b.$$

Par conséquent, on a aussi

$$p > a > |b - c|, \quad p > b > |c - a|, \quad p > c > |a - b|.$$

Si  $P$  est un point intérieur au triangle, on a  $p < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < 2p$   
et  $a < \overline{PB} + \overline{PC} < b + c = 2p - a$ ,  $b < \overline{PC} + \overline{PA} < c + a = 2p - b$ ,  $c < \overline{PA} + \overline{PB} < a + b = 2p - c$ .

### Angles

Les angles (intérieurs) du triangle sont les angles  $BAC, CBA, ACB$ .

Les mesures de ces angles respectifs étant  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , on a

$$a > b \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} \quad \text{et} \quad a < b \Rightarrow \hat{A} < \hat{B}$$

et des relations analogues obtenues par permutation des lettres. Réciproquement,

$$\hat{A} > \hat{B} \sim a > b \quad \text{et} \quad \hat{A} < \hat{B} \sim a < b$$

et des relations analogues par permutation des lettres.

Relation fondamentale :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ dr.} = 180^\circ$

(et par suite, le plus petit des angles est  $\leq \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ$  et le plus grand des angles est  $\geq \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ$ ),

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sin(\hat{B} + \hat{C}) &= \sin \hat{A}, & \sin(\hat{C} + \hat{A}) &= \sin \hat{B}, & \sin(\hat{A} + \hat{B}) &= \sin \hat{C}, \\ \cos(\hat{B} + \hat{C}) &= -\cos \hat{A}, & \cos(\hat{C} + \hat{A}) &= -\cos \hat{B}, & \cos(\hat{A} + \hat{B}) &= -\cos \hat{C}, \\ \text{tg}(\hat{B} + \hat{C}) &= -\text{tg} \hat{A}, & \text{tg}(\hat{C} + \hat{A}) &= -\text{tg} \hat{B}, & \text{tg}(\hat{A} + \hat{B}) &= -\text{tg} \hat{C}. \end{aligned}$$

Autres relations :

$$\begin{aligned} \text{tg} \hat{A} + \text{tg} \hat{B} + \text{tg} \hat{C} &= \text{tg} \hat{A} \cdot \text{tg} \hat{B} \cdot \text{tg} \hat{C}, & \cotg \hat{B} \cdot \cotg \hat{C} + \cotg \hat{C} \cdot \cotg \hat{A} + \cotg \hat{A} \cdot \cotg \hat{B} &= 1, \\ \cotg \frac{\hat{A}}{2} + \cotg \frac{\hat{B}}{2} + \cotg \frac{\hat{C}}{2} &= \cotg \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cotg \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cotg \frac{\hat{C}}{2}, & \text{tg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \text{tg} \frac{\hat{C}}{2} + \text{tg} \frac{\hat{C}}{2} \cdot \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} + \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \text{tg} \frac{\hat{B}}{2} &= 1, \\ \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} &= 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}, & \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} &= 1 + 4 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2}, \\ \sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} &= 4 \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \hat{B} + \sin \hat{C} - \sin \hat{A} &= 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2} \quad (\text{et des relations analogues obtenues par} \\ \cos \hat{B} + \cos \hat{C} - \cos \hat{A} &= 4 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2} \quad (\text{idem}), & \text{permutation des lettres}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{A} &= 2 \cos \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \quad (\text{idem}), \\ \sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} &= 2 + 2 \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}, & \cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} &= 1 - 2 \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

Un seul des trois angles peut être  $\geq 1 \text{ dr.}$

$$\hat{A} \geq 1 \text{ dr.} \sim \hat{B} < 1 \text{ dr. et } \hat{C} < 1 \text{ dr.}, \quad \hat{B} \geq 1 \text{ dr.} \sim \hat{C} < 1 \text{ dr. et } \hat{A} < 1 \text{ dr.}, \quad \hat{C} \geq 1 \text{ dr.} \sim \hat{A} < 1 \text{ dr. et } \hat{B} < 1 \text{ dr.}$$

On distingue les trois cas suivants :

les trois angles sont aigus : triangle acutangle ;

un angle est droit et les deux autres aigus : triangle rectangle (on choisit d'habitude pour sommet A le sommet de l'angle droit), le triangle est dit être rectangle en A si A est le sommet de l'angle droit ;

un angle est obtus et les deux autres aigus : triangle obtusangle (obtusangle en A si c'est  $\hat{A}$  qui est  $> 1 \text{ dr.}$ ).

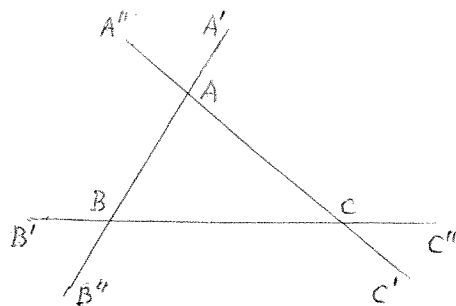
On a  $a^2 < b^2 + c^2 \sim \hat{A} < 1 \text{ dr.}$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 \sim \hat{A} = 1 \text{ dr.}$ ,  $a^2 > b^2 + c^2 \sim \hat{A} > 1 \text{ dr.}$  et réciproquement, ainsi que des énoncés analogues par permutation des lettres.

### Angles extérieurs et angles opposés

Un angle tel que  $\hat{C}AA'$  ( $A'$  sur le prolongement de BA : voir fig.) dont les côtés sont un côté du triangle et le prolongement d'un autre est appelé angle extérieur du triangle. Un angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur de même sommet et sa mesure égale donc la somme des côtés des deux autres :  $\hat{C}AA' = 2 \text{ dr.} - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$  et des relations analogues obtenues par permutation des lettres.

La somme des angles extérieurs pris dans un même sens vaut  $4 \text{ dr.}$  :  $\hat{C}AA' + \hat{A}BB' + \hat{B}CC' = 4 \text{ dr.}$  ;  
la somme de tous les angles extérieurs vaut donc  $8 \text{ dr.}$

Un angle tel que  $\hat{A}AA''$  ( $A'$  sur le prolongement de BA et  $A''$  sur celui de CA) est



un angle opposé à un angle du triangle, en l'occurrence à l'angle A. Chacun de ces trois angles a la même mesure que l'angle auquel il est opposé. Leur somme vaut donc  $2\pi$ . (cf. ci-dessus relation fondamentale pour les angles).

La portion du plan, extérieure au triangle, intérieure à l'un des trois angles opposés aux angles du triangle s'appelle un angle du triangle.

### Relation aux sinus et relation aux cosinus

$$\text{Relation aux sinus: } \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\begin{aligned} \text{Relation aux cosinus: } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

### Autres relations entre les côtés et les angles

$$a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}, \quad b = c \cos \hat{A} + a \cos \hat{C}, \quad c = a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A};$$

$$2r = (b+c) \cos \hat{A} + (c+a) \cos \hat{B} + (a+b) \cos \hat{C};$$

$$a \sin(\hat{B} - \hat{C}) + b \sin(\hat{C} - \hat{A}) + c \sin(\hat{A} - \hat{B}) = 0;$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a \sin \hat{C}}{b - a \cos \hat{C}} = \frac{a \sin \hat{B}}{c - a \cos \hat{B}}, \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{c - b \cos \hat{A}} = \frac{b \sin \hat{C}}{a - b \cos \hat{C}}, \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c \sin \hat{B}}{a - c \cos \hat{B}} = \frac{c \sin \hat{A}}{b - c \cos \hat{A}};$$

$$a \cos(\hat{B} - \hat{C}) = b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C} \quad (\text{et des relations analogues par permutation des lettres});$$

$$b^2 - c^2 = a(b \cos \hat{C} - c \cos \hat{B}) \quad (\text{idem});$$

$$2bc \sin \hat{A} = b^2 \sin 2\hat{C} + c^2 \sin 2\hat{B} \quad (\text{idem});$$

$$2bc \sin(\hat{B} - \hat{C}) = b^2 \sin 2\hat{C} - c^2 \sin 2\hat{B} \quad (\text{idem}); \quad \frac{\sin(\hat{B} - \hat{C})}{\sin(\hat{B} + \hat{C})} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \quad (\text{idem});$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} \quad (\text{idem});$$

$$\frac{\sin(\hat{A}-\hat{B})}{\sin(\hat{B}-\hat{C})} = \frac{a}{c} \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}, \quad \frac{\sin(\hat{B}-\hat{C})}{\sin(\hat{C}-\hat{A})} = \frac{b}{a} \frac{b^2 - c^2}{c^2 - a^2}, \quad \frac{\sin(\hat{C}-\hat{A})}{\sin(\hat{A}-\hat{B})} = \frac{c}{b} \frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2};$$

$$(b-c) \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} + (c-a) \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} + (a-b) \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = 0;$$

$$(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \hat{A} = (c^2 + a^2 - b^2) \operatorname{tg} \hat{B} = (a^2 + b^2 - c^2) \operatorname{tg} \hat{C};$$

$$bc \cos \hat{A} + ca \cos \hat{B} + ab \cos \hat{C} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

### Périmètre et fonctions géométriques des angles demis

Rappelons qu'on pose  $a+b+c \Rightarrow 2p$ ,

ou alors  $b+c-a = 2(p-a)$ ,  $c+a-b = 2(p-b)$ ,  $a+b-c = 2(p-c)$

(et  $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$ ,  $4p(p-a) = (b+c)^2 - a^2$ , etc.,

$4(p-b)(p-c) = a^2 - (b-c)^2$ , etc.;  $(p-b)(p-c) + p(p-a) = bc$ , etc.)

$$\text{On a } \sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}, \quad \sin \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};$$

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}, \quad \cos \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

$$\text{d'où } \frac{p-a}{\operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{p-b}{\operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2}} = \frac{p-c}{\operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

On a aussi 
$$p = a \frac{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = b \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = c \frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$
 et 
$$p^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2}.$$

### Résolution

La résolution trigonométrique d'un triangle consiste, trois éléments de ce triangle étant donnés, à calculer les autres (à côté de la construction géométrique du triangle, à partir des trois éléments donnés alors géométriquement plutôt que numériquement). Parmi les éléments donnés doit figurer au moins un élément linéaire, la connaissance des trois angles ne suffisant pas puisqu'ils ne sont pas indépendants en raison de la relation  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\text{dr.}$ ; il y a effectivement une infinité de triangles ayant des angles donnés, à savoir tous les triangles semblables à l'un d'entre eux.

Ici nous limitons ci-dessous à la résolution dans les "cas classiques"; ce sont les cas où parmi les éléments donnés ne peuvent figurer que les éléments fondamentaux que sont les côtés et les angles du triangle. Dans les autres cas, appelés "cas non classiques", il y a parmi les données, soit des combinaisons d'éléments fondamentaux, par exemple le périmètre, la somme, la différence ou le rapport de deux côtés, etc., soit d'autres éléments, tels que le rayon du cercle circonscrit, une ou des hauteurs, médianes, bissectrices, etc. (il faut alors utiliser les formules données dans les chapitres ultérieurs), soit même ces deux types de données, des principales "cas non classiques" sont traités dans les manuels de trigonométrie, en plus des "cas classiques".

a) On donne les trois côtés  $a, b, c$  (satisfaisant à la "relation du triangle", p. 8).

Les angles peuvent être déduits des relations aux cosinus, qui donnent:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

mais on trouve éventuellement plus simple d'utiliser les formules du paragraphe précédent, qui donnent les angles demis en fonction de  $p, p-a, p-b, p-c$  (compte tenu des opérations à effectuer, c'était en tout cas ce qu'on faisait jadis quand on calculait à l'aide de tables logarithmiques, avant qu'on ne dispose de calculatrices électroniques). (\*\*)

b) On donne un côté et deux angles, soient par exemple  $a, \hat{B}$  et  $\hat{C}$  (satisfaisant à  $\hat{B} + \hat{C} < 2\text{dr.}$ ). On déduit le troisième angle de  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\text{dr.}$

et ensuite les côtés  $b$  et  $c$  des relations aux sinus, qui donnent:  $b = a \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}, c = a \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$ .

c) On donne deux côtés et l'angle compris, soient par exemple  $b, c$  et  $\hat{A}$  ( $< 2\text{dr.}$ ). Les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  peuvent être déduits des formules de la page 10:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{c - b \cos \hat{A}}, \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c \sin \hat{A}}{b - c \cos \hat{A}},$$

et  $a$  peut être déduit de la relation aux cosinus:  $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$ , ou de la relation aux sinus après calcul de  $\hat{B}$  ou de  $\hat{C}$ :  $a = b \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}$  ou  $a = c \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}}$ .

d) On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, soient par exemple  $a, b$  et  $\hat{A}$ . On obtient successivement:  $\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \sin \hat{A}$ ,  $\hat{C} = 2\text{dr.} - (\hat{A} + \hat{B})$ ,  $c = a \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$ .

Si  $\hat{A} \geq 1\text{dr.}$ , il faut que  $a > b$ ; si  $\hat{A} < 1\text{dr.}$ , il faut que  $a \geq b \sin \hat{A}$  et dans cette éventualité, si  $a > b \sin \hat{A}$  et  $a < b$ , il y a deux valeurs possibles pour  $\hat{B}$ :  $\hat{B}_1 < 1\text{dr.}$  et la valeur supplémentaire  $\hat{B}_2 = 2\text{dr.} - \hat{B}_1 > 1\text{dr.}$ , il en est donc deux solutions pour le triangle. En raison de cette ambiguïté, ce cas est appelé "cas douteux".

(\*\*) Il suffit d'ailleurs de calculer deux des angles, par exemple  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , et de déduire le troisième, soit  $\hat{C}$ , par  $\hat{C} = 2\text{dr.} - (\hat{A} + \hat{B})$  (à moins qu'on souhaite vérifier les calculs, justement par  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2\text{dr.}$ ). Il suffit même de calculer un des angles, par exemple  $\hat{A}$ , par une des formules ci-dessus, puis en déduire un autre, soit  $\hat{B}$ , par  $\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \sin \hat{A}$  (en levant l'ambiguïté entre  $\hat{B}$  et  $2\text{dr.} - \hat{B}$  par le fait qu'à un plus grand côté est opposé un plus grand angle) et enfin déduire  $\hat{C}$  comme nous venons de l'écrire.

## Céviennes, triangles pédaux et podaire d'un point

### Définitions

On appelle céviennne un segment de droite ayant une extrémité en son sommet du triangle et l'autre extrémité sur le côté opposé (ou sur son prolongement). Elle est dite issu du sommet en lequel elle a une extrémité. Son extrémité sur le côté opposé (ou son prolongement) est le piéd de la céviennne.

Ainsi une céviennne  $v_a$  issue de A est le segment de droite  $AV_a$  où  $V_a = (v_a, a)$  est son piéd; de même pour les céviennes  $v_b$  et  $v_c$  issues respectivement de B et de C et ayant pour pieds respectifs  $V_b = (v_b, b)$  et  $V_c = (v_c, c)$ .

Cependant, comme pour les lettres  $a, b, c$  représentant les côtés, la notation représentant une céviennne peut désigner soit le segment de droite compris entre le sommet dont elle est issue et son piéd, ou plus spécifiquement la longueur de ce segment, soit toute la droite qui porte ce segment. Comme il est écrit dans le préambule, ce n'est d'ailleurs que quand un segment AB est ainsi désigné par ses extrémités A et B qu'une notation différente apparaît pour sa longueur, à savoir  $\overline{AB}$ ; souvenons-nous que pour les côtés du triangle, nous avons écrit à la fois (p. 8) par exemple  $BC \Rightarrow a$  et  $\overline{BC} \Rightarrow a$ . Quand nous écrivons au sujet des symédiennes,  $H_i \in s_a$ , cela signifiera que le point  $H_i$  est sur la droite qui porte la symédienne issue du sommet A, tandis que dans la relation  $s_a^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left( 2 - \frac{a^2}{b^2 + c^2} \right)$ ,  $s_a$  représente la longueur  $\overline{AS_a}$  de cette céviennne.

### Céviennne égale à un côté

Si les angles B et C sont aigus, on peut avoir comme suit une céviennne  $v_a$  dont le piéd  $V_a$  est entre B et C et qui ait la longueur du plus petit des deux côtés  $AB = c$  ou  $AC = b$ ; si  $b < c$ , il faut prendre  $\overline{BV_a} = \frac{c^2 - b^2}{a}$  et on aura  $v_a = b$  (cette expression de  $\overline{BV_a}$  donne de toute façon une céviennne de longueur  $v_a = b$ , mais si l'expression est négative,  $v_a$  est extérieure au triangle, avec  $V_a$  de l'autre côté de B que C); si  $b > c$  (cas de la figure ci-dessous), il faut prendre  $\overline{V_a C} = \frac{b^2 - c^2}{a}$ , donc  $\overline{BV_a} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a}$ , et on aura  $v_a = c$ .

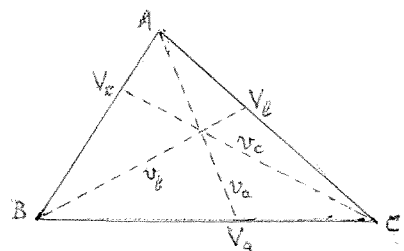
Pour les céviennes issues de B ou C, on obtient des considérations analogues par permutation des lettres.

### Relation de Céva

Si les céviennes  $AV_a \Rightarrow v_a$ ,  $BV_b \Rightarrow v_b$ ,  $CV_c \Rightarrow v_c$  sont concurrentes, les rapports de section suivants lesquels leurs pieds divisent les côtés respectifs ont pour produit  $-1$ , c.à.d. que

$$(v_a, v_b, v_c)^* \rightarrow \frac{\overline{V_a B}}{\overline{V_a C}} \cdot \frac{\overline{V_b C}}{\overline{V_b A}} \cdot \frac{\overline{V_c A}}{\overline{V_c B}} = -1$$

(comme rappelé plus haut, les longueurs des segments déterminés par  $V_a, V_b$  et  $V_c$  sur les



côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  du triangle sont pris en valeurs algébriques pour le calcul des rapports de section; en général, on choisit comme sens positif sur les côtés celui qui va de  $B$  à  $C$  pour  $a$ , de  $C$  à  $A$  pour  $b$  et de  $A$  à  $B$  pour  $c$ ).

Réciproquement,  $\frac{\overline{V_a B}}{\overline{V_a C}} \cdot \frac{\overline{V_b C}}{\overline{V_b A}} \cdot \frac{\overline{V_c A}}{\overline{V_c B}} = -1 \sim (v_a, v_b, v_c)^*$ .

La relation aux sinus (p. 10) appliquée aux triangles déterminés par les séviennes dans le triangle  $ABC$  permet d'écrire la relation de Ceva sous la forme

$$\frac{\sin \widehat{V_a AB}}{\sin \widehat{V_a AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{V_b BC}}{\sin \widehat{V_b BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{V_c CA}}{\sin \widehat{V_c CB}} = -1.$$

Signalons qu'on a aussi  $(v_a, v_b, v_c)^* \sim [\frac{1}{2}(V_b, V_c)A, \frac{1}{2}(V_c, V_a)B, \frac{1}{2}(V_a, V_b)C]^*$ .

Autres relations: si  $V$  est le point de concours des trois séviennes, soit  $(v_a, v_b, v_c) \Rightarrow V$ , on a

$$\frac{\overline{V V_a}}{\overline{A V_a}} + \frac{\overline{V V_b}}{\overline{B V_b}} + \frac{\overline{V V_c}}{\overline{C V_c}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{V A}}{\overline{A V_a}} + \frac{\overline{V B}}{\overline{B V_b}} + \frac{\overline{V C}}{\overline{C V_c}} = 2.$$

Autre propriété des séviennes concurrentes: si nous appelons  $d$  la droite joignant les points  $[11(v_b, V_a), c]$  et  $[11(v_c, V_a), c]$ , on a  $d \parallel V_b V_c$  et  $\frac{1}{2}(V_a, V_b) \in d$ ,  $\frac{1}{2}(V_a, V_c) \in d$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Enfin, signalons que lorsque  $(v_a, v_b, v_c)^*$ , les secondes intersections du cercle  $\omega(V_a, V_b, V_c)$  avec les côtés sont elles aussi des pieds de séviennes concurrentes.

### Relations de Stewart et de Simson.

$V_a$  étant un point quelconque de la droite  $BC$  et les longueurs des segments  $BV_a$  et  $V_a C$  étant prises en valeurs algébriques, on a

$$b^2 \cdot \overline{BV_a} + c^2 \cdot \overline{V_a C} = a \cdot v_a^2 + a \cdot \overline{BV_a} \cdot \overline{V_a C} \quad (\text{Stewart})$$

où  $v_a = \overline{AV_a}$  (+ des relations analogues pour des points  $V_b$  sur la droite  $CA$  ou  $V_c$  sur la droite  $AB$ ).

Avec les longueurs  $\overline{BV_a}$  et  $\overline{V_a C}$  prises en valeurs absolues;

si  $V_a$  divise  $BC$  en segments additifs  $BV_a$  et  $V_a C$ , c.à.d. si ce point est entre  $B$  et  $C$ , on garde la même forme de la relation;

si  $V_a$  divise  $BC$  en segments soustractifs, c.à.d. si ce point est en dehors du segment  $BC$ , la relation devient

$$-b^2 \cdot |\overline{BV_a}| + c^2 \cdot |\overline{V_a C}| = a v_a^2 - a \cdot |\overline{BV_a}| \cdot |\overline{V_a C}| \quad \text{dans le cas où } V_a \text{ est en dehors de } BC \text{ du côté de } B,$$

$$b^2 \cdot |\overline{BV_a}| - c^2 \cdot |\overline{V_a C}| = a v_a^2 - a \cdot |\overline{BV_a}| \cdot |\overline{V_a C}| \quad \text{dans le cas où } V_a \text{ est en dehors de } BC \text{ du côté de } C.$$

On a aussi la relation

$$b^2 \cdot \overline{BV_a} + c^2 \cdot \overline{V_a C} = a \cdot v_a^2 + \overline{BV_a}^2 \cdot \overline{V_a C} + \overline{V_a C}^2 \cdot \overline{BV_a} \quad (\text{Simson}),$$

qui donne immédiatement la relation de Stewart quand on met en évidence  $\overline{BV_a} \cdot \overline{V_a C}$  dans les deux derniers termes.

Dans le cas où  $V_a \widehat{A} C = \widehat{B}$ , on a  $a \cdot \overline{V_a C} = b^2$  (voir  $V_a''$  p. 17).

et dans le cas où  $B \widehat{A} V_a = \widehat{C}$ , on a  $a \cdot \overline{BV_a} = c^2$  (voir  $V_a'$  p. 17).

Enfin, si on considère les points  $P$  et  $Q$  tels que  $P \in AC$  avec  $PV_a \parallel AB$  et  $Q \in AB$  avec  $QV_a \parallel AC$ , on a

$$v_a^2 + \overline{BV_a} \cdot \overline{V_a C} = b \cdot \overline{AP} + c \cdot \overline{AQ}.$$

Bien entendu, toutes ces relations donnent des relations analogues lorsqu'on permute

les lettres  $A, B, C$  et  $a, b, c$ .

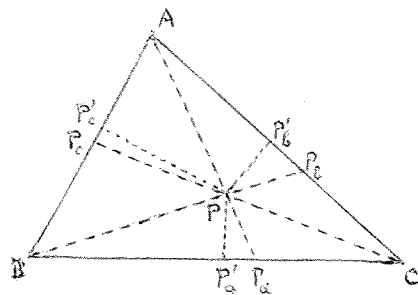
Triangle pédal, triangle podaire, coordonnées d'un point

Le triangle  $V_a V_b V_c$  dont les sommets sont les pieds de trois séviennes concourantes  $v_a, v_b, v_c$  est appelé triangle pédal de ces séviennes ou de leur point de concours  $(v_a, v_b, v_c)$ . Cette seconde acception est la plus courante : on parle habituellement du triangle pédal d'un point  $P$ , qui est le triangle dont les sommets sont les pieds  $P_a, P_b, P_c$  des séviennes  $AP, BP, CP$ , c.à.d. qu'on pose  $(AP, a) \Rightarrow P_a, (BP, b) \Rightarrow P_b, (CP, c) \Rightarrow P_c$ .

Un triangle tel que  $ABC$  soit, pour ce triangle, le triangle pédal de  $P$  est dit être le triangle antipodal de  $P$  pour le triangle  $ABC$ .

Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  trois nombres proportionnels aux aires des triangles respectifs  $PBC, PCA, PAB$ , affectés du signe + ou du signe - suivant que, selon la position de  $P$ , le triangle est intérieur ou extérieur à  $ABC$ ; si en particulier  $P$  est intérieur à  $ABC$ , les trois nombres sont positifs. Les rapports de section suivant lesquels  $P_a, P_b, P_c$  divisent respectivement les côtés  $BC, CA, AB$  sont donnés par

$$\frac{\overline{P_a B}}{\overline{P_a C}} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{\overline{P_b C}}{\overline{P_b A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\overline{P_c A}}{\overline{P_c B}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$



Les nombres  $\alpha, \beta, \gamma$ , déterminés à un facteur constant près, suffisent évidemment à déterminer la position du point  $P$  dans le plan; ils sont appelés coordonnées barycentriques de  $P$ . On voit que le point  $P$  est le centre des distances proportionnelles ou barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés des poids respectifs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

$P$  étant comme ci-dessus un point quelconque du plan, posons  $\text{proj}_a P \Rightarrow P'_a, \text{proj}_b P \Rightarrow P'_b, \text{proj}_c P \Rightarrow P'_c$ ; le triangle  $P'_a P'_b P'_c$  est appelé le triangle podaire du point  $P$ . Inversement, si par rapport à un autre triangle, le triangle  $ABC$  est le triangle podaire de  $P$ , cet autre triangle est le triangle antipodaire de  $P$  pour  $ABC$  (ses côtés sont respectivement  $\perp PA, \perp PB, \perp PC$ ).

Si  $P$  est intérieur à  $ABC$ , on a  $P_b \hat{P} P'_c = 2 \text{dr.} - \hat{A}, P'_c \hat{P} P'_a = 2 \text{dr.} - \hat{B}, P'_a \hat{P} P'_b = 2 \text{dr.} - \hat{C}$ .

Les segments en lesquels les points  $P'_a, P'_b, P'_c$  divisent les côtés du triangle  $ABC$  vérifient la relation  $\overline{BP'_a}^2 + \overline{CP'_b}^2 + \overline{AP'_c}^2 = \overline{P'_a C}^2 + \overline{P'_b A}^2 + \overline{P'_c B}^2$ .

Si  $P$  est le centre du cercle inscrit (v. p. 53) au triangle ayant pour côtés  $\perp(a, B), \perp(b, C), \perp(c, A)$ , les sommets  $P'_a, P'_b$  et  $P'_c$  de son triangle podaire seront à une même distance respectivement de  $B, C$  et de  $A$ :  $\overline{BP'_a} = \overline{CP'_b} = \overline{AP'_c} = \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ . De même, si  $P$  est le centre du cercle inscrit au triangle ayant pour côtés  $\perp(a, b), \perp(b, A), \perp(c, B)$ , les sommets de son triangle podaire seront tels que  $\overline{CP'_a} = \overline{AP'_b} = \overline{BP'_c} = \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ .

Les longueurs  $\overline{P'_a P} = \text{dist}_a P, \overline{P'_b P} = \text{dist}_b P, \overline{P'_c P} = \text{dist}_c P$ , chacune prise en valeur algébrique avec le signe + si  $P$  est par rapport au côté considéré du triangle  $ABC$  du même côté que le sommet opposé et avec le signe - dans le cas contraire, sont appelées les coordonnées normales absolues de  $P$ . Elles vérifient la relation  $a \cdot \overline{P'_a P} + b \cdot \overline{P'_b P} + c \cdot \overline{P'_c P} = 2S$  où  $S$  est l'aire du triangle (voir plus loin p. 89). Deux de ces grandeurs ou le rapport de deux d'entre elles à la troisième suffisent évidemment à déterminer la position de  $P$ . Trois



nombre  $\lambda, \mu, \nu$  proportionnels à ces grandeurs sont appelées simplement coordonnées normales de P.

Relation entre les coordonnées normales  $\lambda, \mu, \nu$  et les coordonnées barycentriques  $\alpha, \beta, \gamma$  d'un même point:  $a \frac{\lambda}{\alpha} = b \frac{\mu}{\beta} = c \frac{\nu}{\gamma}$

ou (en vertu de la relation aux sinus)  $\frac{\lambda \sin \hat{A}}{\alpha} = \frac{\mu \sin \hat{B}}{\beta} = \frac{\nu \sin \hat{C}}{\gamma}$

Angles du triangle poldaire:  $P'_b \hat{P}'_a P'_c = \hat{A}CP + \hat{P}BA$ ,  $P'_c \hat{P}'_b P'_a = \hat{B}AP + \hat{P}CB$ ,  $P'_a \hat{P}'_c P'_b = \hat{C}BP + \hat{P}AC$ , tous les angles étant pris en valeurs algébriques (le sens trigonométrique est ici considéré comme sens positif). Si P est sur le cercle circonscrit à ABC (p. 49), un des trois angles est  $= 2dr. = 180^\circ$  et les deux autres sont  $= 0$ : voir "wallace" p. 94; si P est à l'extérieur de ce cercle, un des angles trouvés est  $> 2dr.$ , tandis que les deux autres sont négatifs, le triangle poldaire apparaissant alors comme "retourné".

On a  $(P, P'_b, A, P'_c) = 0$ ,  $(P, P'_c, B, P'_a) = 0$ ,  $(P, P'_a, C, P'_b) = 0$ , avec  $[o(P, P'_b, A, P'_c)] = P_A$ ,  $[o(P, P'_c, B, P'_a)] = P_B$ ,  $[o(P, P'_a, C, P'_b)] = P_C$ , où  $P_A \leq \frac{1}{2}(A, P)$ ,  $P_B \leq \frac{1}{2}(B, P)$ ,  $P_C \leq \frac{1}{2}(C, P)$ , et par suite  $P_A P_B P_C = \text{hom}(P, \frac{1}{2}) ABC$ , d'où il résulte que  $P_B P_C \parallel BC$ ,  $P_c P_a \parallel CA$ ,  $P_a P_b \parallel AB$ ,  $\overline{P_B P_C} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ,  $\overline{P_c P_a} = \frac{1}{2} \overline{CA}$ ,  $\overline{P_a P_b} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ .

Remarque

Si  $P_a$  est un point quelconque de la droite BC, le rapport des rayons des cercles  $o(A, B, P_a)$  et  $o(A, C, P_a)$  est  $= \frac{c}{b}$ . On a évidemment des énoncés analogues obtenus par permutation des lettres, pour des points  $P_b \in CA$  et  $P_c \in AB$ .

Points réciproques

Des points  $P_1$  et  $P_2$  sur le côté a sont dits points isotomiques ou simplement isotomiques l'un de l'autre lorsque  $\overline{CP_2} = \overline{P_1 B}$  et  $\overline{P_2 B} = \overline{CP_1}$  (une des deux relations entraîne l'autre); condition nécessaire et suffisante:  $P_1$  et  $P_2$  de part et d'autre de  $\frac{1}{2}(B, C) \Rightarrow M_a$  avec  $\overline{P_1 M_a} = \overline{M_a P_2}$  (longueurs prises en valeurs algébriques), ou encore, ce qui est équivalent,  $\frac{1}{2}(P_1, P_2) = M_a$ ; autre condition nécessaire et suffisante: rapports de section  $\frac{\overline{P_1 B}}{\overline{P_1 C}}$  et  $\frac{\overline{P_2 B}}{\overline{P_2 C}}$  inverses l'un de l'autre (avec même signe):  $\frac{\overline{P_1 B}}{\overline{P_1 C}} = \frac{\overline{P_2 C}}{\overline{P_2 B}}$ .

Des définitions analogues, avec des conditions analogues, valent pour des points sur les côtés b ou c au lieu de a.

Les droites telles que  $AP_1$  et  $AP_2$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont des points isotomiques sont aussi qualifiées de droites isotomiques et semblablement pour des droites issues de B ou de C.

Soient  $P_{a1}$  et  $P_{a2}$  une paire de points isotomiques sur a,  $P_{b1}$  et  $P_{b2}$  une paire de points isotomiques sur b,  $P_{c1}$  et  $P_{c2}$  une paire de points isotomiques sur c; on a

$$(AP_{a1}, BP_{b1}, CP_{c1})^* \sim (AP_{a2}, BP_{b2}, CP_{c2})^*$$

c.à.d. que les droites isotomiques de trois droites concurrentes sont elles-mêmes

concourentes. Les points  $P_1 = (AP_{11}, BP_{11}, CP_{11})$  et  $P_2 = (AP_{22}, BP_{22}, CP_{22})$  sont appelés points réciproques et nous écrirons dans ce cas  $P_2 = \text{recipr } P_1$  (ou  $P_1 = \text{recipr } P_2$ , cette relation étant symétrique). Notons toutefois que certains auteurs ont utilisé la dénomination "points inverses" pour de tels points, alors qu'avec d'autres auteurs, nous utilisons cette dénomination pour des points conjugués isogonaux, c.à.d. des points de concours de droites conjuguées isogonales concourantes (voir p. 73). Les coordonnées barycentriques de tels points sont inverses les unes des autres:  $\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2 = \gamma_1 \gamma_2$ .

### Polaires trilinéaires

$P_a, P_b, P_c$  étant comme plus haut les pieds des trois droites passant par le point  $P$  (= sommets du triangle pédal de  $P$ ), désignons par

$P_a'', P_b'', P_c''$  les conjugués harmoniques respectivement de  $P_a$  par rapport à  $BC$ , de  $P_b$  par rapport à  $CA$ , de  $P_c$  par rapport à  $AB$  (donc  $\frac{P_a''B}{P_a''C} = -\frac{P_aB}{P_aC}$ ,  $\frac{P_b''C}{P_b''A} = -\frac{P_bC}{P_bA}$ ,  $\frac{P_c''A}{P_c''B} = -\frac{P_cA}{P_cB}$ ).

On a  $(P_a'', P_b'', P_c'')$  —

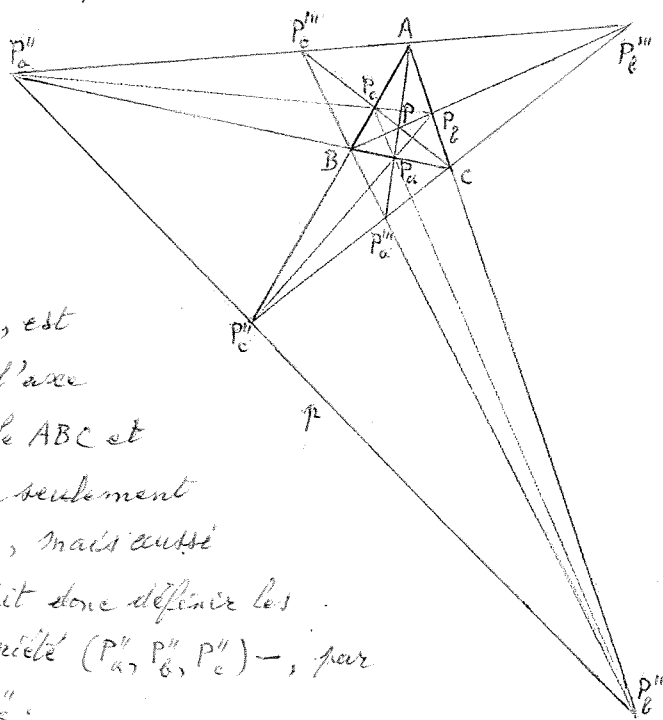
et cette droite, que nous désignerons par  $p$ , est appelée polaire trilinéaire de  $P$ . C'est l'axe d'homologie (voir plus loin p. 124) du triangle  $ABC$  et du triangle pédal  $P_aP_bP_c$  de  $P$ : on a non seulement  $P_a'' \in BC$ ,  $P_b'' \in CA$ ,  $P_c'' \in AB$  (par définition), mais aussi

$P_a'' \in P_bP_c$ ,  $P_b'' \in P_cP_a$ ,  $P_c'' \in P_aP_b$ . On pourrait donc définir les points  $P_a'', P_b'', P_c''$ , jouissant de la propriété  $(P_a'', P_b'', P_c'')$  —, par  $(P_bP_c, a) \Rightarrow P_a''$ ,  $(P_cP_a, b) \Rightarrow P_b''$ ,  $(P_aP_b, c) \Rightarrow P_c''$ .

Le point  $P$  est dit être la pôle trilinéaire de cette droite  $p$ . Les coordonnées de celle-ci (voir au début du chapitre suivant la définition des coordonnées d'une droite par rapport au triangle  $ABC$ ) sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques de  $P$ .

Nous désignerons la polaire trilinéaire  $p$  d'un point  $P$  par  $\text{pol}_{ABC} P$  et la pôle trilinéaire de la droite  $p$  par  $\text{pol}_{ABC} p$ . Il n'y a pas de confusion à craindre avec la même notation pour les polaires et les pôles par rapport à un cercle, car dans ce cas c'est la désignation d'un cercle qui figure en indice, alors qu'ici c'est celle d'un triangle, habituellement le triangle  $ABC$ .

On a aussi  $(BP_b'', CP_c'', AP_a'')$ \*,  $(CP_c'', AP_a'', BP_b'')$ \*,  $(AP_a'', BP_b'', CP_c'')$ \* et nous poserons  $(BP_b'', CP_c'', AP_a'') \Rightarrow P_a'''$ ,  $(CP_c'', AP_a'', BP_b'') \Rightarrow P_b'''$ ,  $(AP_a'', BP_b'', CP_c'') \Rightarrow P_c'''$ ;



ces points sont les points harmoniquement associés à P; ils sont conjugués harmoniques de P sur les séviennes  $AP_a, BP_b, CP_c$ :

$$(AP_a P P_a''') = -1, \quad (BP_b P P_b''') = -1, \quad (CP_c P P_c''') = -1.$$

Ils ont pour coordonnées barycentriques respectives  $(-\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, -\beta, \gamma), (\alpha, \beta, -\gamma)$  où  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont celles de P.

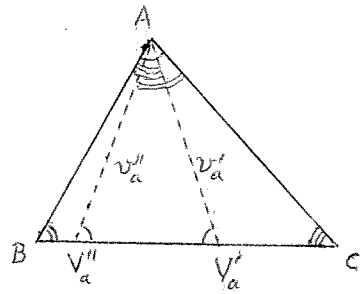
Les polaires trilinéaires respectives de  $P_a''', P_b''', P_c'''$  sont les droites  $P_b P_c P_a'', P_c P_a P_b'', P_a P_b P_c''$ . Elles sont harmoniquement associées à p.

Tout comme  $P_a P_b P_c$ , le triangle  $P_a''' P_b''' P_c'''$  est homologique (voir p.124) avec ABC, avec le même centre d'homologie P et le même axe d'homologie  $P_a'' P_b'' P_c''$ .

Paires de séviennes remarquables

Les considérations ci-dessous sont relatives à deux séviennes remarquables issues du sommet A. Mais elles peuvent évidemment être transposées aux deux séviennes analogues issues soit du sommet B, soit du sommet C; il suffit d'appliquer une permutation circulaire des lettres A, B, C et a, b, c.

Considérons la séviennne  $v_a' = AV_a'$  telle que  $\widehat{BAV_a'} = \widehat{C}$  et la séviennne  $v_a'' = AV_a''$  telle que  $\widehat{V_a''AC} = \widehat{B}$  (si  $\widehat{A} > \widehat{B}$  et  $\widehat{A} > \widehat{C}$ , les points  $V_a''$  et  $V_a'$  de la droite BC sont tous deux entre B et C, avec  $V_a'' = V_a'$  si et seulement si  $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ , c.à.d. si  $\widehat{A} = 1 \text{ dr.}$ ; si  $\widehat{A} < \widehat{B}$  et  $\widehat{A} < \widehat{C}$ , ces points sont, sur la droite BC, tous deux en dehors du segment BC; si  $\widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$  ou  $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ , l'un est sur le segment BC et l'autre en dehors).



On a  $\widehat{AV_a''B} = \widehat{A}$  et  $\widehat{CV_a''A} = \widehat{A}$  (soit avec une autre notation,  $\text{ang}(v_a', a) = \widehat{A}$  et  $\text{ang}(a, v_a'') = \widehat{A}$ ), donc  $\widehat{AV_a''B} = \widehat{CV_a''A}$ , ce qui implique (p.113) que le triangle  $AV_a''V_a'$  est isocèle:  $\overline{AV_a''} = \overline{AV_a'}$ , c.à.d.  $v_a'' = v_a'$  où  $v_a'' = \overline{AV_a''}$  et  $v_a' = \overline{AV_a'}$ .

Le triangle  $V_a'BA$  et le triangle  $V_a''AC$  sont l'un et l'autre équiangles au triangle ABC et lui sont donc semblables (p.121):  $V_a'BA \sim ABC$  et  $V_a''AC \sim ABC$  (et par suite  $V_a'BA \sim V_a''AC$ ).

On a  $c^2 = a \cdot \overline{BV_a'}$  et  $b^2 = a \cdot \overline{V_a''C}$ , d'où  $\frac{\overline{BV_a'}}{\overline{V_a''C}} = \frac{c^2}{b^2}$  ;  
 $v_a' = v_a'' = \frac{bc}{a}$ ,  $v_a'^2 = v_a''^2 = \overline{BV_a'} \cdot \overline{V_a''C}$ .

Séviennes antiparallèles à un côté

Soient les séviennes  $v_b$  et  $v_c$  issues de B et de C antiparallèles (voir p.4) à a:  
 $\uparrow BAC \downarrow (a, B) \Rightarrow v_b$  et  $\uparrow BAC \downarrow (a, C) \Rightarrow v_c$   
 (donc telles que  $v_b \parallel t_a$  et  $v_c \parallel t_a$ : p.46).  
 Le pied de l'une est sur un côté au sens étroit et le pied de l'autre sur le prolongement

de l'autre côté: si par exemple  $b > c$ ,  $V_b$  est entre A et C, soit  $\overline{AV_b} < b$ , tandis que  $V_c$  est au-delà de B sur AB, soit  $\overline{AV_c} > c$ . On a  $\overline{AV_b} = \frac{c^2}{b}$  et  $\overline{AV_c} = \frac{b^2}{c}$ .

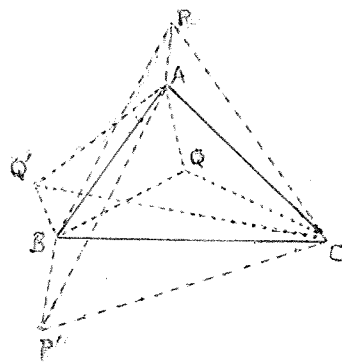
Longueurs de ces séviennes:  $v_b = \frac{ac}{b}$ ,  $v_c = \frac{ab}{c}$ ,  
d'où  $\frac{v_b}{v_c} = \frac{c^2}{b^2}$ .

Des résultats semblables peuvent évidemment être obtenus par permutation des lettres pour des séviennes antiparallèles à b ou à c.

### Points jumeaux

Le faisceau de demi-droites issues d'un point P et passant par A, B, C (faisceau porté par les séviennes concourantes en P) dépend de ce point: les faisceaux issus de deux points P et P' distincts ne peuvent pas être égaux, les angles entre les demi-droites respectives sont différents. Toutefois, ces points peuvent être choisis de manière que les faisceaux soient symétriquement égaux en ce sens qu'ils soient, à un déplacement près d'un point à l'autre, le symétrique l'un de l'autre, en plus d'un éventuel remplacement d'une des demi-droites par celle qui en est le prolongement. Les points P et P' sont alors appelés points jumeaux.

C'est le cas des premier et second métapôles de ABC par rapport à un autre triangle (p. 106-107). En particulier les centres isogènes Y et Y' (p. 23-24) sont des points jumeaux, puisque ce sont les métapôles de ABC par rapport à un triangle équilatéral (p. 107) et effectivement alors que les demi-droites YA, YB, YC font un angle de  $120^\circ$  entre elles, deux demi-droites Y'A, Y'B, Y'C font entre elles un angle de  $120^\circ$  et le prolongement de l'autre fait aussi un angle de  $120^\circ$  avec chacune de ces deux-là (puisque c'est la bissectrice de l'angle de  $120^\circ$  fait par ces deux-là), ce qui est d'ailleurs déjà le cas pour YA, YB, YC lorsqu'un des angles de ABC est  $> 120^\circ$  (et alors les deux faisceaux sont égaux, cas exceptionnel).



Sur la figure ci-dessus, les points P et P' sont des points jumeaux pour le triangle ABC (faisceaux symétriques); c'est aussi le cas des points Q et Q' (faisceaux symétriques après remplacement d'un des rayons par son symétrique par rapport au sommet du faisceau).

Lorsqu'un des points est à l'intérieur du triangle (cas de Q) ou dans son des ombres (cas de P), son point jumeau ne peut pas appartenir à une de ces régions du plan.

### Autre relation pour les pieds de séviennes concourantes

Si nous utilisons les notations  $P, P_a, P_b, P_c$  (p. 14) plutôt que  $V, V_a, V_b, V_c$  (p. 13) et que nous prenons les valeurs absolues des longueurs des segments de droites sur les côtés, la relation de Ceva peut s'écrire  $\overline{AP_c} \cdot \overline{BP_a} \cdot \overline{CP_b} = \overline{AP_b} \cdot \overline{BP_c} \cdot \overline{CP_a}$ . La valeur commune de ces deux produits est donnée par  $\overline{AP_c} \cdot \overline{BP_a} \cdot \overline{CP_b} = \overline{AP_b} \cdot \overline{BP_c} \cdot \overline{CP_a} = \frac{\overline{PP_a} \cdot \overline{PP_b} \cdot \overline{PP_c}}{\overline{AP} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CP}} a \cdot b \cdot c$ .

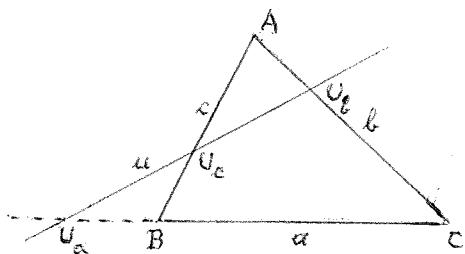
## Transversales

### Définitions

On appelle transversale une droite quelconque se rencontrant les trois côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  du triangle considérés comme droites indéfinies, c.à.d. non limitées aux sommets, en des points  $(a, u) \Rightarrow U_a$ ,  $(b, u) \Rightarrow U_b$  et  $(c, u) \Rightarrow U_c$  appelés points segmentaires déterminés par cette transversale.

Les rapports de section  $\frac{U_a B}{U_a C}$ ,  $\frac{U_b C}{U_b A}$  et  $\frac{U_c A}{U_c B}$  suivant lesquels  $U_a$ ,  $U_b$  et  $U_c$  divisent les côtés respectifs

sont appelés les rapports segmentaires déterminés par la transversale.



Si  $u$  ne passe pas par un sommet, (\*) deux cas peuvent se présenter: soit  $u$  coupe les prolongements des trois côtés et les trois rapports segmentaires sont positifs, soit  $u$  coupe deux côtés et le prolongement du troisième (éventuellement à l'infini si  $u$  est parallèle à ce troisième côté) et un des rapports segmentaires est positif tandis que les deux autres sont négatifs. (On appelle parfois à cause de Pasch la proposition suivant laquelle une droite ne passant pas par un sommet et qui coupe un côté coupe aussi un des deux autres, mais pas les trois.)

Trois nombres  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  proportionnels aux grandeurs  $\text{dist}_u A$ ,  $\text{dist}_u B$ ,  $\text{dist}_u C$  prises algébriquement, un sens positif étant arbitrairement choisi perpendiculairement à  $u$ , sont appelés coordonnées de la transversale  $u$ . Les grandeurs  $\text{dist}_u A$ ,  $\text{dist}_u B$ ,  $\text{dist}_u C$  avec leurs signes sont les coordonnées absolues de  $u$ . Les rapports segmentaires de  $u$  sont donnés en fonction des coordonnées de  $u$  par

$$\frac{U_a B}{U_a C} = \frac{\sigma}{\tau}, \quad \frac{U_b C}{U_b A} = \frac{\tau}{\rho}, \quad \frac{U_c A}{U_c B} = \frac{\rho}{\sigma}.$$

### Relation de Ménélaos

Le produit des rapports segmentaires d'une transversale vaut  $+1$ , c.à.d. que si  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_c$  sont les points segmentaires de la transversale par rapport au triangle  $ABC$ , on a

$$(U_a, U_b, U_c) - \rightsquigarrow \frac{U_a B}{U_a C} \cdot \frac{U_b C}{U_b A} \cdot \frac{U_c A}{U_c B} = +1$$

(Comme d'habitude pour les rapports de section, les rapports segmentaires dont le produit constitue le premier membre de cette relation sont calculés en prenant les valeurs algébriques des différents segments: cf. remarque analogue pour la relation de Ceva).

Réciproquement,  $\frac{U_a B}{U_a C} \cdot \frac{U_b C}{U_b A} \cdot \frac{U_c A}{U_c B} = +1 \rightsquigarrow (U_a, U_b, U_c) -$ .

Grâce à la relation aux sinus dans les triangles ayant pour côtés  $AU_a$ ,  $BU_b$ ,  $CU_c$  et

(\*) Au sens strict, une transversale est une droite qui ne passe par aucun des sommets.

ceuse de ABC, la relation de Menélaos peut aussi être écrite sous la forme

$$\frac{\sin \widehat{U_2 AB}}{\sin \widehat{U_2 AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{U_1 BC}}{\sin \widehat{U_1 BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{U_1 CA}}{\sin \widehat{U_1 CB}} = +1$$

Théorème

Étant données deux transversales  $u_1$  et  $u_2$  de points segmentaires respectifs  $(U_{a1}, U_{b1}, U_{c1})$  et  $(U_{a2}, U_{b2}, U_{c2})$ , on a

$$[(U_{b1}, U_{c2}, a), (U_{c1}, U_{a2}, b), (U_{a1}, U_{b2}, c)] - \text{ et } [(U_{c1}, U_{b2}, a), (U_{a1}, U_{c2}, b), (U_{b1}, U_{a2}, c)] -$$

Transversales particulières

Transversale parallèle à un côté :

$u \parallel a \rightarrow \frac{AU_b}{AU_c} = \frac{U_b c}{U_c b} = \frac{b}{c}$  et  $\frac{AU_c}{b} = \frac{AU_b}{c} = \frac{U_c U_b}{a}$  (en valeurs absolues) et réciproquement  
 (+ relations analogues obtenues par permutation des lettres lorsque  $u \parallel b$  ou  $u \parallel c$ ).

Transversale antiparallèle à un côté :

$u \perp BAC \rightarrow \frac{AU_b}{AU_c} = \frac{c}{b}$  où  $U_b = (u, b)$  et  $U_c = (u, c)$  et réciproquement  
 (+ énoncés analogues obtenus par permutation des lettres) ;

$u \perp BAC \rightarrow (B, c, U_b, U_c) \circ$  et réciproquement (idem).

Si on pose  $(u_1, b) \Rightarrow U_{b1}, (u_1, c) \Rightarrow U_{c1}, (u_2, b) \Rightarrow U_{b2}, (u_2, c) \Rightarrow U_{c2}$ , on a  
 $\{(B, c, U_{b1}, U_{c1}) \circ \text{ et } (B, c, U_{b2}, U_{c2}) \circ\} \rightarrow u_1 \parallel u_2$  puisque des antiparallèles à une même droite (le côté a) sont parallèles entre elles (idem).

Autre cas particulier :

Étant donné un point  $P \in BC$ , considérons la transversale  $U_a U_b U_c$  telle que  $U_b \in \|(c, P)$  et  $U_c \in \|(b, P)$  ; on a alors  $\frac{BU_a}{CU_a} = \frac{BP^2}{CP^2}$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

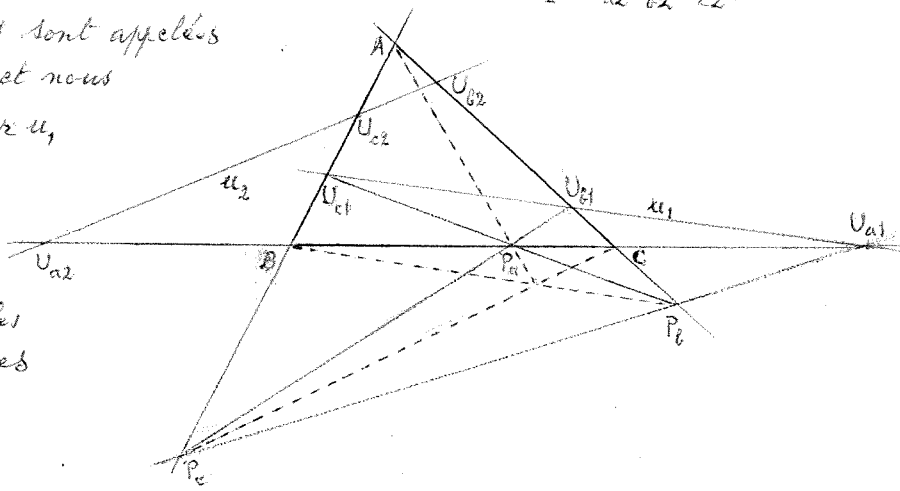
Transversales réciproques

Soient  $U_{a1}, U_{b1}, U_{c1}$  les points segmentaires d'une transversale  $u_1$  par rapport au triangle ABC et  $U_{a2}, U_{b2}, U_{c2}$  leurs isotomiques (voir p.15) respectifs sur les côtés de ABC :  $\frac{U_{a1}B}{U_{a1}C} = \frac{U_{b2}C}{U_{c2}B}, \frac{U_{b1}C}{U_{b1}A} = \frac{U_{c2}A}{U_{a2}C}, \frac{U_{c1}A}{U_{c1}B} = \frac{U_{a2}B}{U_{b2}A}$  ; on a alors  $(U_{a2}, U_{b2}, U_{c2}) -$ , c.-à-d. que les isotomiques des points segmentaires d'une transversale sont aussi en ligne droite et déterminent donc une autre transversale  $u_2 = U_{a2} U_{b2} U_{c2}$ .

De telles transversales sont appelées transversales réciproques et nous écrivons alors  $u_2 = \text{recipr } u_1$  (ou  $u_1 = \text{recipr } u_2$ , cette relation étant symétrique).

Les coordonnées de telles transversales sont inverses les unes des autres :

$$\rho_1 \rho_2 = \sigma_1 \sigma_2 = \tau_1 \tau_2$$



### Autre acception de l'expression "transversales réciproques"

À la lieu de considérer comme ci-dessus les isotomiques de  $U_{a1}, U_{b1}, U_{c1}$ , prenons leurs conjugués harmoniques par rapport respectivement à  $BC, CA, AB$ ; se nous les désignons par  $P_a, P_b, P_c$ , on a donc (voir p.2)  $\frac{P_a B}{P_a C} = -\frac{U_{a1} B}{U_{a1} C}$ ,  $\frac{P_b C}{P_b A} = -\frac{U_{b1} C}{U_{b1} A}$ ,  $\frac{P_c A}{P_c B} = -\frac{U_{c1} A}{U_{c1} B}$ . On a alors  $(U_{a1}, P_b, P_c)$  — et c'est cette transversale  $U_{a1} P_b P_c$  que certains auteurs appellent transversale réciproque de  $u_1 = U_{a1} U_{b1} U_{c1}$ . Il n'y a malheureusement pas unanimité entre les auteurs quant à la nomenclature, comme c'est aussi le cas pour la notion de points inverses, ainsi que nous le signalons par ailleurs. On a évidemment aussi  $(P_a, U_{b1}, P_c)$  — et  $(P_a, P_b, U_{c1})$  —, de sorte que, dans ce sens, on peut dire que toute transversale a trois transversales réciproques.

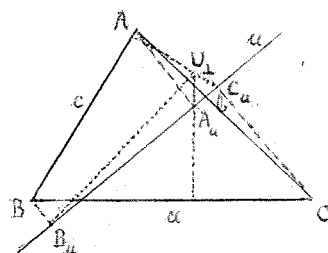
Notons d'autre part que si  $P_a, P_b, P_c$  sont, comme ci-dessus, les conjugués harmoniques sur les côtés de  $ABC$  de points  $U_{a1}, U_{b1}, U_{c1}$  en ligne droite, on a  $(AP_a, BP_b, CP_c)^*$  (et aussi  $(AP_a, BU_{b1}, CU_{c1})^*$ ,  $(AU_{a1}, BP_b, CU_{c1})^*$ ,  $(AU_{a1}, BU_{b1}, CP_c)^*$ ).

### Orthopôle d'une droite

Étant donnée une droite quelconque  $u$ , posons  $\text{proj}_u A \Rightarrow A_u$ ,  $\text{proj}_u B \Rightarrow B_u$ ,  $\text{proj}_u C \Rightarrow C_u$ ;

on a  $[\perp(A, A_u), \perp(B, B_u), \perp(C, C_u)]^*$ .

Le point de concours  $U_\perp$  des perpendiculaires menées de  $A_u, B_u, C_u$  aux côtés respectifs est appelé orthopôle de la droite  $u$  et celle-ci est appelée droite orthopolaire de ce point  $U_\perp$ .



### Transversales concurrentes parallèles aux côtés

Soient trois transversales  $u_1, u_2, u_3$ , chacune parallèle à un côté,  $u_1 \parallel a$ ,  $u_2 \parallel b$ ,  $u_3 \parallel c$ , passant toutes trois par un même point, soit  $U$ :  $U \in u_1, U \in u_2, U \in u_3$ , donc  $(u_1, u_2, u_3) = U$ ; ces trois transversales peuvent être définies comme suit (p.2):  $u_1 = \|(a, U)$ ,  $u_2 = \|(b, U)$ ,  $u_3 = \|(c, U)$ .

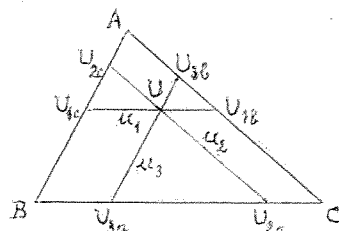
Points segmentaires: en raison du parallélisme, le premier, le deuxième, le troisième point segmentaire respectivement de  $u_1$ , de  $u_2$ , de  $u_3$  est à l'infini; les autres sont:

$(u_1, b) \Rightarrow U_{1b}$ ,  $(u_1, c) \Rightarrow U_{1c}$ ,  $(u_2, c) \Rightarrow U_{2c}$ ,  $(u_2, a) \Rightarrow U_{2a}$ ,  $(u_3, a) \Rightarrow U_{3a}$ ,  $(u_3, b) \Rightarrow U_{3b}$ .

### Théorèmes.

Si  $U$  est intérieur au triangle, on a  $\frac{U_{3a} U_{2a}}{a} + \frac{U_{1b} U_{3b}}{b} + \frac{U_{2c} U_{1c}}{c} = 1$ ; cette relation reste vraie que  $U$  soit intérieur ou extérieur au triangle à condition de prendre les longueurs  $U_{3a} U_{2a}$ ,  $U_{1b} U_{3b}$ ,  $U_{2c} U_{1c}$  avec leurs signes, le sens positif étant respectivement de  $B$  vers  $C$ , de  $C$  vers  $A$ , de  $A$  vers  $B$  (si  $U$  est intérieur à  $ABC$ , les trois rapports sont positifs; si  $U$  est dans un comble de  $ABC$ , deux d'entre eux sont négatifs; si  $U$  est extérieur sans être dans un comble, un seul des rapports est négatif).

Si  $U$  est intérieur au triangle, on a  $\frac{U U_b}{a} + \frac{U U_c}{b} + \frac{U U_a}{c} = 1$  et  $\frac{U_{1c} U}{a} + \frac{U_{2a} U}{b} + \frac{U_{3b} U}{c} = 1$ ;

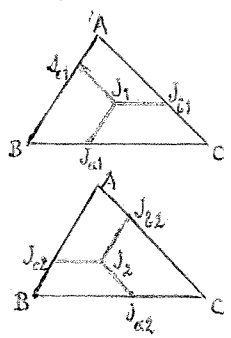


ici aussi, ces relations peuvent être généralisées au cas où  $U$  est extérieur au triangle, à condition de prendre les numérateurs avec les signes corrects.

Lorsque  $U$  a pour coordonnées barycentriques  $\alpha = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$ , les longueurs  $\overline{U_{3a}U_{2a}}$ ,  $\overline{U_{1b}U_{3b}}$ ,  $\overline{U_{2c}U_{1c}}$  sont inversement proportionnelles aux longueurs des côtés:  $a \cdot \overline{U_{3a}U_{2a}} = b \cdot \overline{U_{1b}U_{3b}} = c \cdot \overline{U_{2c}U_{1c}}$  et la somme de leurs carrés  $\overline{U_{3a}U_{2a}}^2 + \overline{U_{1b}U_{3b}}^2 + \overline{U_{2c}U_{1c}}^2$  est minimum.

Points de Jerabeck

Si on prend pour point de concours de transversales parallèles aux côtés,  $U$  selon la notation du paragraphe précédent, le point qui a pour coordonnées normales relatives  $\lambda = b$ ,  $\mu = c$ ,  $\nu = a$  (ou, ce qui revient au même d'après la relation aux sinus,  $\lambda = \sin B$ ,  $\mu = \sin C$ ,  $\nu = \sin A$ ), on le fait coïncider avec le point  $J_1$  tel que les trois segments de droites parallèles aux côtés et ayant pour extrémités ce point  $J_1$ , d'une part et l'intersection avec le côté suivant d'autre part, soient tous trois de même longueur; nous remplaçons dans ce cas les notations  $U$ ,  $U_{1b}$ ,  $U_{2c}$ ,  $U_{3a}$  du paragraphe précédent respectivement par  $J_1$ ,  $J_{b1}$ ,  $J_{c1}$ ,  $J_{a1}$  et nous avons  $\overline{J_1 J_{b1}} = \overline{J_1 J_{c1}} = \overline{J_1 J_{a1}} \Rightarrow j$  avec  $J_1 J_{b1} \parallel a$ ,  $J_1 J_{c1} \parallel b$ ,  $J_1 J_{a1} \parallel c$ .



De même, si on prend pour  $U$  le point ayant pour coordonnées normales relatives  $\lambda = c$ ,  $\mu = a$ ,  $\nu = b$  (ou  $\lambda = \sin C$ ,  $\mu = \sin A$ ,  $\nu = \sin B$ ), on obtient le point  $J_2$  tel que les trois segments de droites parallèles aux côtés dont les extrémités de chacun sont d'une part ce point  $J_2$  et d'autre part l'intersection avec le côté précédent, ont même longueur; nous remplaçons alors les notations  $U$ ,  $U_{1a}$ ,  $U_{2a}$ ,  $U_{3b}$  du paragraphe précédent respectivement par  $J_2$ ,  $J_{c2}$ ,  $J_{a2}$ ,  $J_{b2}$  et nous avons  $\overline{J_2 J_{c2}} = \overline{J_2 J_{a2}} = \overline{J_2 J_{b2}} \Rightarrow j$ , la valeur commune des longueurs des trois segments de droites étant la même que dans le premier cas. Cette longueur commune  $j$  est donnée par

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{J_1 J_{b1}} = \frac{1}{J_1 J_{c1}} = \frac{1}{J_1 J_{a1}} = \frac{1}{J_2 J_{c2}} = \frac{1}{J_2 J_{a2}} = \frac{1}{J_2 J_{b2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Un point tel que  $J_1$  ou  $J_2$ , donc tel que de ce point on peut mener des demi-droites parallèles aux côtés du triangle et qui portent des segments égaux quand on les limite au contour du triangle, est appelé point de Jerabeck.

Les triangles  $J_{a1} J_{b1} J_{c1}$  et  $J_{a2} J_{b2} J_{c2}$  jouissent de quelques propriétés remarquables. D'abord, ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au milieu  $\frac{1}{2}(J_1, J_2)$  du segment de droite  $J_1 J_2$ :  $J_{b2} J_{c2} J_{a2} = \text{Sym}(\frac{1}{2}(J_1, J_2), -1) J_{a1} J_{b1} J_{c1}$ ; les côtés correspondants sont donc parallèles et de plus  $J_{c1} J_{b2} \parallel a$ ,  $J_{a1} J_{c2} \parallel b$ ,  $J_{b1} J_{a2} \parallel c$  et  $\overline{J_{a1} J_{a2}} = \overline{J_{b1} J_{b2}} = \overline{J_{c1} J_{c2}} = \overline{J_{a2} J_{b1}} = \overline{J_{b2} J_{c1}} = \overline{J_{c2} J_{a1}} = j$ .

Étant donné l'égalité des segments de droites joignant  $J_1$  aux sommets de  $J_{a1} J_{b1} J_{c1}$ ,  $J_1$  est le centre du cercle circonscrit (7.42) à ce triangle; semblablement,  $J_2$  est le



centre du cercle circonscrit au triangle  $J_{a2}J_{b2}J_{c2}$ . On a  $J_1J_{a2} \perp J_{a1}J_{b1}$  et donc  $\perp J_{b2}J_{c2}$ , etc., c.à.d. que  $J_1$  est sur chacune des hauteurs (p.24) de  $J_{a2}J_{b2}J_{c2}$ ; il est donc à leur point de concours, l'orthocentre (p.25) de ce triangle  $J_{a2}J_{b2}J_{c2}$ . Semblablement,  $J_2$  est l'orthocentre du triangle  $J_{a1}J_{b1}J_{c1}$ . Ainsi, le centre du cercle circonscrit à chacun de ces triangles est l'orthocentre de l'autre. Enfin, ils ont le même cercle des neuf points (p.49), dont le centre est leur centre de symétrie  $\frac{1}{2}(J_1, J_2)$ .

On peut aussi chercher le point  $j$  par lequel passent trois segments de droites parallèles aux côtés tels que, limité chacun aux deux autres côtés, ils aient une longueur commune. Ce point  $j$  est l'antécipulaire (p.37) du réciproque (p.16) du centre  $i$  du cercle inscrit (p.53) à  $ABC$  ( $i$  est le point-titub à égale distance des trois côtés de  $ABC$ ):

$$\text{compl } j = \text{recipr } i$$

La longueur commune de ces trois segments de droites est  $2j = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ .

## Hauteurs, orthocentre, triangle orthique, points euleriens, cercle de Cayley

### Définition

Une hauteur est une sécienne perpendiculaire au côté opposé au sommet dont elle est issue.

### Notations

On pose  $\text{proj}_a A \Rightarrow H_a$ ,  $\text{proj}_b B \Rightarrow H_b$ ,  $\text{proj}_c C \Rightarrow H_c$   
et les trois hauteurs sont

$$AH_a \Rightarrow h_a, \quad BH_b \Rightarrow h_b, \quad CH_c \Rightarrow h_c$$

et on a  $h_a \perp a$ ,  $h_b \perp b$ ,  $h_c \perp c$ .

### Pieds des hauteurs

$$\text{On a } \frac{\overline{AH_b}}{\overline{AH_c}} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{BH_c}}{\overline{BH_a}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{CH_a}}{\overline{CH_b}} = \frac{b}{a};$$

$$\overline{BH_a} = c \cos \hat{B}, \quad \overline{CH_a} = b \cos \hat{C}, \quad \overline{CH_b} = a \cos \hat{C}, \quad \overline{AH_b} = c \cos \hat{A}, \quad \overline{AH_c} = b \cos \hat{A}, \quad \overline{BH_c} = a \cos \hat{B};$$

si les cos sont pris avec leurs signes dans ces relations, un signe + signifie que le pied de la hauteur considérée est sur le côté correspondant et un signe -, qu'il est sur son prolongement; d'après la relation aux cosinus (p.10), ces expressions peuvent s'écrire

$$\overline{BH_a} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}, \quad \overline{CH_a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad \overline{CH_b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}, \quad \overline{AH_b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \quad \overline{AH_c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad \overline{BH_c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

$$\text{On a aussi } \frac{\overline{BH_a}}{\overline{CH_a}} = \frac{\text{tg } \hat{C}}{\text{tg } \hat{B}}, \quad \frac{\overline{CH_b}}{\overline{AH_b}} = \frac{\text{tg } \hat{A}}{\text{tg } \hat{C}}, \quad \frac{\overline{AH_c}}{\overline{BH_c}} = \frac{\text{tg } \hat{B}}{\text{tg } \hat{A}}.$$

Triangle acutangle ( $\hat{A}, \hat{B}$  et  $\hat{C} < 1 \text{ dr.}$ ):  $H_a, H_b, H_c$  sont sur les segments  $BC, CA, AB$ ;

triangle rectangle ( $\hat{A} = 1 \text{ dr.}$ ):  $H_b = H_c = A$  (et  $H_a \in$  segment  $BC$ );

triangle obtusangle ( $\hat{A} > 1 \text{ dr.}$ ):  $H_b$  et  $H_c$  sont sur les prolongements de  $CA$  et de  $BA$  (et  $H_a \in BC$ ).

On a  $b > c$  (c.à.d.  $\hat{B} > \hat{C}$ )  $\Rightarrow \overline{BH_a} < \overline{CH_a}$  et réciproquement (et des énoncés analogues par permutation des lettres).

### Propriétés:

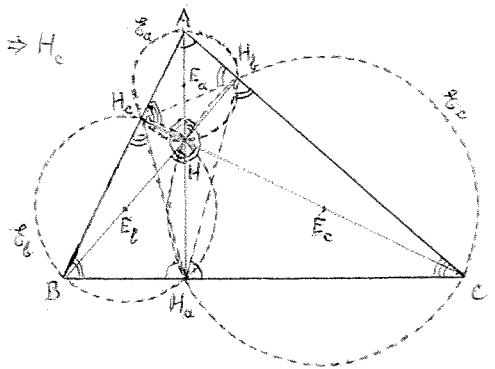
$$2b \cdot \overline{AH_b} = 2c \cdot \overline{AH_c} = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2a \cdot \overline{BH_a} = 2a \cdot \overline{BH_a} = c^2 + a^2 - b^2, \quad 2a \cdot \overline{CH_a} = 2b \cdot \overline{CH_b} = a^2 + b^2 - c^2.$$

Soient  $V_{a1}$  et  $V_{a2}$  les pieds des séciennes  $v_{a1}$  et  $v_{a2}$  issues de  $A$  telles que  $v_{a1} \perp b$  et  $v_{a2} \perp c$ , on a  $\overline{BH_a} = \frac{c^2}{2V_{a2}}$ ,  $\overline{CH_a} = \frac{b^2}{2V_{a1}}$ ,  $\left| \frac{1}{2V_{a1}} \pm \frac{1}{2V_{a2}} \right| = \frac{a}{b} \frac{1}{\overline{AH_b}} = \frac{ca}{2} \frac{1}{\overline{AH_c}}$  (signe - si  $\hat{B}$  ou  $\hat{C} > 1 \text{ dr.}$ )

et des relations analogues obtenues par permutation des lettres.

Si nous appelons  $M_a, M_b, M_c$  les milieux des côtés en posant  $\frac{1}{2}(B, C) \Rightarrow M_a$ ,  $\frac{1}{2}(C, A) \Rightarrow M_b$ ,  $\frac{1}{2}(A, B) \Rightarrow M_c$  comme nous le ferons au début du chapitre suivant (p.33), on a

$$\overline{H_a M_a} = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}, \quad \overline{H_b M_b} = \frac{|c^2 - a^2|}{2b}, \quad \overline{H_c M_c} = \frac{|a^2 - b^2|}{2c}.$$



Si on pose  $\text{proj}_b H_a \Rightarrow H_{ab}$ ,  $\text{proj}_c H_a \Rightarrow H_{ac}$ ,  $\text{proj}_{h_b} H_a \Rightarrow H'_{ab}$ ,  $\text{proj}_{h_c} H_a \Rightarrow H'_{ac}$ ,  
 on a  $(H_{ab}, H_{ac}, H'_{ab}, H'_{ac})$  — et des énoncés analogues pour  $H_b$  et pour  $H_c$   
 à la place de  $H_a$ .

On a évidemment  $\circ(BC) \ni H_b$  et  $H_c$ ,  $\circ(CA) \ni H_c$  et  $H_a$ ,  $\circ(AB) \ni H_a$  et  $H_b$ .

Signalons que les cercles  $\circ(CA)$  et  $\circ(AB)$  coupent respectivement  $h_b$  et  $h_c$  en des points qui sont à une même distance de  $A$ , lorsque ces points existent (ce qui est toujours le cas seulement si  $ABC$  est acutangle); on a évidemment des énoncés analogues par permutation des lettres.

### Orthocentre

On a  $(h_a, h_b, h_c) \Rightarrow$

et on pose  $(h_a, h_b, h_c) \Rightarrow H$ , point appelé orthocentre du triangle.

$H$  est intérieur au triangle, =  $A$  ou extérieur au triangle suivant respectivement que celui-ci est acutangle, rectangle en  $A$  ou obtusangle.

On a  $\overline{HA} \cdot \overline{H_a H} = \overline{HB} \cdot \overline{H_b H} = \overline{HC} \cdot \overline{H_c H}$  ;

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{H H_b}}{\overline{H H_a}}, \quad \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{H H_c}}{\overline{H H_b}}, \quad \frac{\overline{HC}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{H H_a}}{\overline{H H_c}}; \quad \frac{1}{\overline{HA} \cdot \overline{H H_a}} = \frac{1}{\overline{HB} \cdot \overline{H H_b}} = \frac{1}{\overline{HC} \cdot \overline{H H_c}} = \frac{1}{\overline{HA} \cdot h_a} + \frac{1}{\overline{HB} \cdot h_b} + \frac{1}{\overline{HC} \cdot h_c};$$

$$\overline{HA} = a |\cotg \hat{A}|, \quad \overline{HB} = b |\cotg \hat{B}|, \quad \overline{HC} = c |\cotg \hat{C}|;$$

$$\overline{H_a H} = \overline{HB} |\cos \hat{C}| = \overline{HC} |\cos \hat{B}|, \quad \overline{H_b H} = \overline{HC} |\cos \hat{A}| = \overline{HA} |\cos \hat{C}|, \quad \overline{H_c H} = \overline{HA} |\cos \hat{B}| = \overline{HB} |\cos \hat{A}|,$$

$$\overline{H_a H} = a \frac{|\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}|}{\sin \hat{A}}, \quad \overline{H_b H} = b \frac{|\cos \hat{C} \cdot \cos \hat{A}|}{\sin \hat{B}}, \quad \overline{H_c H} = c \frac{|\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}|}{\sin \hat{C}};$$

$$\frac{\overline{H_a H}}{\overline{HA}} = \left| \frac{\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\cos \hat{A}} \right| = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}, \quad \frac{\overline{H_b H}}{\overline{HB}} = \left| \frac{\cos \hat{C} \cdot \cos \hat{A}}{\cos \hat{B}} \right| = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - c^2 + a^2)}{2b^2(c^2 + a^2 - b^2)}, \quad \frac{\overline{H_c H}}{\overline{HC}} = \left| \frac{\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}}{\cos \hat{C}} \right| = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)}{2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$a^2 + \overline{HA}^2 = b^2 + \overline{HB}^2 = c^2 + \overline{HC}^2.$$

L'orthocentre  $H$  est le point dont le triangle pédal et le triangle podaire coïncident; l'un et l'autre sont  $H_a H_b H_c$  (= triangle orthique; voir ci-après).

Il est à remarquer que  $A, B, C$  sont les orthocentres respectifs des triangles  $HBC, HCA, HAB$ .

### Longueurs des hauteurs

On a  $a h_a = b h_b = c h_c$ ;  $h_a + h_b + h_c < 2p$ ;  $a > b \Rightarrow a + h_a > b + h_b$ , etc.;

$$h_a = b \sin \hat{C} = c \sin \hat{B} = \frac{bc \sin \hat{A}}{a}, \quad h_b = c \sin \hat{A} = a \sin \hat{C} = \frac{ca \sin \hat{B}}{b}, \quad h_c = a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A} = \frac{ab \sin \hat{C}}{c};$$

$$h_a = a \frac{\sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\cotg \hat{B} + \cotg \hat{C}}, \quad h_b = b \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{b}{\cotg \hat{C} + \cotg \hat{A}}, \quad h_c = c \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{c}{\cotg \hat{A} + \cotg \hat{B}};$$

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

On a aussi  $h_b \cdot \overline{HB} + h_c \cdot \overline{HC} = a^2$ ,  $h_c \cdot \overline{HC} + h_a \cdot \overline{HA} = b^2$ ,  $h_a \cdot \overline{HA} + h_b \cdot \overline{HB} = c^2$ .

### Angles

$$\widehat{B\hat{A}H_a} = 1 \text{ dr.} - \widehat{B}, \quad H_a \widehat{A}C = 1 \text{ dr.} - \widehat{C}, \quad C \widehat{B}H_b = 1 \text{ dr.} - \widehat{C}, \quad H_b \widehat{B}A = 1 \text{ dr.} - \widehat{A}, \quad A \widehat{C}H_c = 1 \text{ dr.} - \widehat{A}, \quad H_c \widehat{C}B = 1 \text{ dr.} - \widehat{B};$$

$$C \widehat{H}_b H_c = H_c \widehat{H}_b B = \widehat{A}, \quad A \widehat{H}_c H_c = H_c \widehat{H}_c C = \widehat{B}, \quad B \widehat{H}_a H_a = H_a \widehat{H}_a A = \widehat{C};$$

si le triangle est obtusangle en A ( $\widehat{A} > 1 \text{ dr.}$ ), il faut remplacer dans ces formules  $\widehat{A}$  par  $2 \text{ dr.} - \widehat{A}$  ( $1 \text{ dr.} - \widehat{A}$  devient donc alors  $\widehat{A} - 1 \text{ dr.}$ ).

Dans un triangle acutangle,  $\text{ang}(h_b, h_c) = \widehat{B\hat{H}C} = 2 \text{ dr.} - \widehat{A}$ ,  $\text{ang}(h_c, h_a) = C \widehat{H}A = 2 \text{ dr.} - \widehat{B}$ ,  $\text{ang}(h_a, h_b) = A \widehat{H}B = 2 \text{ dr.} - \widehat{C}$ ; si le triangle est obtusangle en A ( $\widehat{A} > 1 \text{ dr.}$ , H extérieur au triangle),  $\widehat{B\hat{H}C} = 2 \text{ dr.} - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ ,  $C \widehat{H}A = \widehat{B}$ ,  $A \widehat{H}B = \widehat{C}$ .

Signalons ici la propriété suivante: si  $d_A, d_B, d_C$  sont des droites menées par les sommets dans une même direction ( $d_A \parallel d_B \parallel d_C$ ), les droites symétriques des hauteurs  $h_a, h_b, h_c$  par rapport à ces droites respectives  $d_A, d_B, d_C$  sont concourantes:  $(\text{sym}_{d_A} h_a, \text{sym}_{d_B} h_b, \text{sym}_{d_C} h_c) \times$  et le point de concours est sur le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  (p. 42)

### Triangle orthique

Le triangle  $H_a H_b H_c$ , triangle pédal des hauteurs (ou de leur point de concours H), est appelé triangle orthique du triangle ABC. C'est aussi le triangle pédaire de H.

Il est inscrit au triangle ABC lorsque celui-ci est acutangle. Si au contraire, celui-ci est obtusangle, il est en partie extérieur à ABC.

Propriété: si le triangle ABC est acutangle, son triangle orthique est le triangle de périmètre minimum qui y est inscrit c.à.d. parmi tous les triangles dont les trois sommets sont sur les trois côtés de ABC.

Côtés (= "interhauteurs"):  $\overline{H_b H_c} = a |\cos \widehat{A}| = \overline{FA} \sin \widehat{A}$ ,  $\overline{H_c H_a} = b |\cos \widehat{B}| = \overline{HB} \sin \widehat{B}$ ,  $\overline{H_a H_b} = c |\cos \widehat{C}| = \overline{HC} \sin \widehat{C}$ .

Angles:  $H_c \widehat{H}_a H_b = C \widehat{H}_a H_b = \widehat{A}$ ,  $H_a \widehat{H}_b H_c = A \widehat{H}_b H_c = \widehat{B}$ ,  $H_b \widehat{H}_c H_a = B \widehat{H}_c H_a = \widehat{C}$ .

$a \uparrow BAC \downarrow H_c H_b$ ,  $b \uparrow CBA \downarrow H_a H_c$ ,  $c \uparrow ACB \downarrow H_b H_a$ .

Pour un triangle acutangle,  $H_b \widehat{H}_a H_c = 2(1 \text{ dr.} - \widehat{A})$ ,  $H_c \widehat{H}_b H_a = 2(1 \text{ dr.} - \widehat{B})$ ,  $H_a \widehat{H}_c H_b = 2(1 \text{ dr.} - \widehat{C})$ ,  
 $H_b \widehat{H}_a A = A \widehat{H}_a H_b = 1 \text{ dr.} - \widehat{A}$ ,  $H_c \widehat{H}_b B = B \widehat{H}_b H_c = 1 \text{ dr.} - \widehat{B}$ ,  $H_a \widehat{H}_c C = C \widehat{H}_c H_a = 1 \text{ dr.} - \widehat{C}$ ;

les hauteurs d'un triangle acutangle portent les bissectrices (voir p. 51) de son triangle orthique:  $H_a A = \frac{1}{2}(H_a H_b, H_a H_c)$ ,  $H_b B = \frac{1}{2}(H_b H_c, H_b H_a)$ ,  $H_c C = \frac{1}{2}(H_c H_a, H_c H_b)$ ;

pour un triangle acutangle, H est donc le centre du cercle inscrit (voir p. 53) au triangle orthique; A, B et C en sont les centres des cercles exinscrits (voir p. 55).

Pour un triangle obtusangle en A ( $\widehat{A} > 1 \text{ dr.}$ ),  $H_b \widehat{H}_a H_c = 2(\widehat{A} - 1 \text{ dr.})$ ,  $H_c \widehat{H}_b H_a = 2\widehat{B}$ ,  $H_a \widehat{H}_c H_b = 2\widehat{C}$ ,  
 $H_c \widehat{H}_a A = A \widehat{H}_a H_b = \widehat{A} - 1 \text{ dr.}$ ,  $B \widehat{H}_b H_c = 1 \text{ dr.} + \widehat{B}$ ,  $B \widehat{H}_b H_a = 1 \text{ dr.} - \widehat{B}$ ,  $H_a \widehat{H}_c C = 1 \text{ dr.} - \widehat{C}$ ,  $H_b \widehat{H}_c C = 1 \text{ dr.} + \widehat{C}$ ;

la hauteur  $AH_a$  d'un triangle obtusangle en A est portée par une bissectrice intérieure (voir p. 51) de son triangle orthique et les deux autres bissectrices intérieures de celui-ci sont portées par les côtés CA et BA (prolongés); A est le centre du cercle inscrit (p. 53) au triangle orthique, tandis que H, B et C en sont les centres des cercles exinscrits (p. 55).

Cela entraîne  $dist_{H_b H_c} H = dist_{H_c H_a} H = dist_{H_a H_b} H$ .

Pour les triangles déterminés par les côtés du triangle orthique et ceux du triangle ABC, il y a similitude inverse (voir p.121) avec ABC :

$$AH_b H_c \sim ABC, \quad BH_c H_a \sim BCA, \quad CH_a H_b \sim CAB.$$

Le triangle orthique de ABC est obtusangle dans les différents cas suivants : si ABC est acutangle, lorsqu'un des angles est  $< \frac{1}{2} dr. = 45^\circ$  ;

si ABC est obtusangle, lorsque l'angle obtu est  $> \frac{3}{2} dr. = 135^\circ$  ou lorsqu'un des deux angles aigus est  $> \frac{1}{2} dr. = 45^\circ$ .

Il est rectangle lorsqu'un des angles de ABC est  $= \frac{1}{2} dr. = 45^\circ$  ou  $= \frac{3}{2} dr. = 135^\circ$ .

Points eulériens et cercles eulériens

Les points eulériens sont les points  $\frac{1}{2}(H, A) \Rightarrow E_a, \frac{1}{2}(H, B) \Rightarrow E_b, \frac{1}{2}(H, C) \Rightarrow E_c$ .

Propriété :  $\overline{HE_a} \cdot \overline{HH_a} = \overline{HE_b} \cdot \overline{HH_b} = \overline{HE_c} \cdot \overline{HH_c}$ .

On a d'autre part  $(A, H_b, H, H_c)^\circ, (B, H_c, H, H_a)^\circ, (C, H_a, H, H_b)^\circ$  ; ce sont les trois cercles eulériens, qui ont pour diamètres respectifs AH, BH, CH ;

nous poserons  $\circ(A, H_b, H, H_c) = \circ(AH) \Rightarrow \xi_a, \circ(B, H_c, H, H_a) = \circ(BH) \Rightarrow \xi_b, \circ(C, H_a, H, H_b) = \circ(CH) \Rightarrow \xi_c$  et on a donc  $\cdot(\xi_a) = E_a, \cdot(\xi_b) = E_b, \cdot(\xi_c) = E_c$  ;

rayons respectifs :  $\overline{HE_a} = \overline{AE_a} = \frac{a}{2} |\cotg \hat{A}|, \overline{HE_b} = \overline{BE_b} = \frac{b}{2} |\cotg \hat{B}|, \overline{HE_c} = \overline{CE_c} = \frac{c}{2} |\cotg \hat{C}|$ .

Le triangle  $E_a E_b E_c$  est appelé triangle d'Euler. On a  $E_a E_b E_c \sim hom(H, \frac{1}{2}) ABC$ , donc  $E_b E_c \parallel a, E_c E_a \parallel b, E_a E_b \parallel c$ . L'orthocentre de  $E_a E_b E_c$  est donc aussi H.

Comme nous le ferons au début du chapitre suivant, introduisons les notations suivantes pour les milieux des côtés :  $\frac{1}{2}(B, C) \Rightarrow M_a, \frac{1}{2}(C, A) \Rightarrow M_b, \frac{1}{2}(A, B) \Rightarrow M_c$  ;

on a alors  $E_a M_a \perp H_b H_c, E_b M_b \perp H_c H_a, E_c M_c \perp H_a H_b$  ; on a aussi  $M_a \in \text{tang}_{H_b} \xi_a$  et  $M_a \in \text{tang}_{H_c} \xi_a, M_b \in \text{tang}_{H_c} \xi_b$  et  $M_b \in \text{tang}_{H_a} \xi_b, M_c \in \text{tang}_{H_a} \xi_c$  et  $M_c \in \text{tang}_{H_b} \xi_c$ , c.à.d.  $E_a \hat{H}_b M_a = E_a \hat{H}_c M_a = E_b \hat{H}_c M_b = E_b \hat{H}_a M_b = E_c \hat{H}_a M_c = E_c \hat{H}_b M_c = 1 dr.$

Remarque

Sur la droite  $h_b$ , considérons le point  $H_b''$  à la distance  $b$  de B, du côté opposé à  $H_b$ , et sur la droite  $h_c$ , le point  $H_c''$  à la distance  $c$  de C, du côté opposé à  $H_c$ , soit  $\overline{BH_b''} = b$  et  $\overline{CH_c''} = c$ , d'où les triangles égaux (p.119)  $ABH_b'' = H_c''CA$ . Le triangle  $AH_b''H_c''$  est rectangle en A,  $H_b'' \hat{A} H_c'' = 1 dr.$ , et isocèle avec  $\overline{AH_b''} = \overline{AH_c''} = b^2 + c^2 + 2bc \sin \hat{A}$ . On obtient évidemment des théorèmes semblables par permutation des lettres.

Cercle de Taylor (\*)

Prenons  $proj_b H_a \Rightarrow H_{ab}$  et  $proj_c H_a \Rightarrow H_{ac}, proj_c H_b \Rightarrow H_{bc}$  et  $proj_a H_b \Rightarrow H_{ba}, proj_a H_c \Rightarrow H_{ca}$  et  $proj_b H_c \Rightarrow H_{cb}$ , on a  $(H_{ca}, H_{ba}, H_{ab}, H_{cb}, H_{ac}, H_{bc})^\circ$  ; c'est le cercle de Taylor, nous le désignerons

(\*) Dans une première lecture, on peut passer ce qui concerne le cercle de Taylor, en allant directement au paragraphe consacré à l'axe orthique p. 32.  
Mieux: reporter ceci à la page 50.

pour  $\mathcal{Z}$  et son centre par  $\odot$ :  $\circ(H_{aa}, H_{ba}, H_{ab}, H_{cb}, H_{bc}, H_{ac}) \Rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $\cdot(\mathcal{Z}) \Rightarrow \odot$ .

On a  $H_{ab}H_{ac} \parallel H_bH_c$ ,  $H_{bc}H_{ba} \parallel H_cH_a$ ,  $H_{ca}H_{cb} \parallel H_aH_b$ , c.à.d.

$\alpha \uparrow BAC \downarrow H_{ac}H_{ab}$ ,  $\beta \uparrow CBA \downarrow H_{ba}H_{bc}$ ,  $\gamma \uparrow ACB \downarrow H_{cb}H_{ca}$ .

Par suite, on a  $AH_{ab}H_{ac} = \text{hom } AH_bH_c$ ,  $BH_{bc}H_{ba} = \text{hom } BH_cH_a$ ,  $CH_{ca}H_{cb} = \text{hom } CH_aH_b$ , avec pour centres d'homothétie respectifs A, B, C. Il résulte alors des similitudes inverses de  $AH_bH_c$ ,  $BH_cH_a$ ,  $CH_aH_b$  avec  $ABC$  (p.24) qu'on a les similitudes inverses suivantes:

$$AH_{ab}H_{ac} \mathcal{S} ABC, \quad BH_{bc}H_{ba} \mathcal{S} BCA, \quad CH_{ca}H_{cb} \mathcal{S} CAB.$$

Anticipons un peu ce qui sera dit au chapitre suivant pour le triangle  $ABC$ , en l'appliquant anticipativement ici au triangle orthique  $H_aH_bH_c$ . Pour cela, posons pour les milieux des côtés de celui-ci, c.à.d. les pieds de ses médianes (p.33)

$$\frac{1}{2}(H_b, H_c) \Rightarrow K_a, \quad \frac{1}{2}(H_c, H_a) \Rightarrow K_b, \quad \frac{1}{2}(H_a, H_b) \Rightarrow K_c.$$

Ces médianes,  $H_aK_a, H_bK_b, H_cK_c$ , sont les sommets de son triangle complémentaire (p.36)  $K_aK_bK_c$  et elles concourent au centre de gravité du triangle orthique  $H_aH_bH_c$ , que nous désignerons par  $G_h$ :  $(H_aK_a, H_bK_b, H_cK_c) \Rightarrow G_h$ .

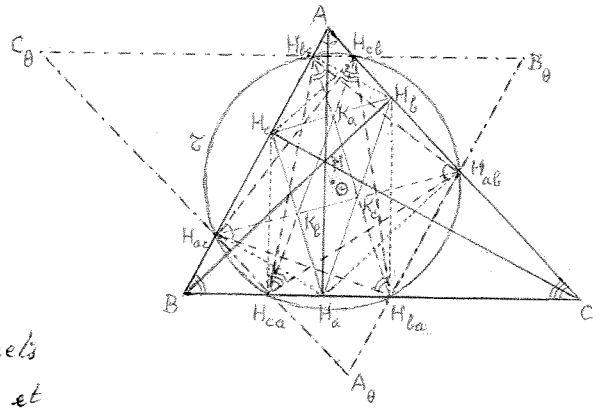
Les côtés  $K_bK_c, K_cK_a, K_aK_b$  du triangle complémentaire du triangle orthique, sont portés respectivement par les droites  $H_{ab}H_{ac}, H_{ba}H_{bc}, H_{ca}H_{cb}$ , c.à.d. qu'on a

$$K_a \in H_{ba}H_{bc} \text{ et } \in H_{ca}H_{cb}, \quad K_b \in H_{ca}H_{cb} \text{ et } \in H_{ab}H_{ac}, \quad K_c \in H_{ab}H_{ac} \text{ et } \in H_{ba}H_{bc}.$$

Ceci est en accord avec le parallélisme, indiqué au début de ce paragraphe, de ces trois droites avec les côtés respectifs  $H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b$  du triangle orthique et le fait que les côtés d'un triangle complémentaire d'un triangle sont parallèles aux côtés de celui-ci (p.36), c.à.d. ici  $K_bK_c \parallel H_bH_c, K_cK_a \parallel H_cH_a, K_aK_b \parallel H_aH_b$  (comme pour tout triangle complémentaire, on a (p.36)  $K_aK_bK_c = \text{hom}(G_h, -\frac{1}{2}) H_aH_bH_c$ ).

Le centre de gravité  $G_h$  du triangle orthique est sur la droite  $\odot H$ , au tiers de la distance entre ces deux points:  $G_h \in \odot H$ ,  $\overline{\odot G_h} = \frac{1}{2} \overline{\odot H}$ .

Il résulte de cette relation, liée à l'homothétie notée ci-dessus, que  $\odot$  joue dans  $K_aK_bK_c$  le même rôle que  $H$  dans  $H_aH_bH_c$ . En particulier, de même que  $H$  est le point de concours des bissectrices du triangle orthique (p.26) et est donc le centre de son cercle inscrit (ou exinscrit),  $\odot$  est le point de concours des bissectrices du triangle  $K_aK_bK_c$ :  $K_bK_c \odot = \odot \hat{K}_aK_c, K_cK_a \odot = \odot \hat{K}_bK_a, K_aK_b \odot = \odot \hat{K}_cK_b$ ;  $\odot$  est le centre du cercle inscrit (ou exinscrit) (p.53) au triangle  $K_aK_bK_c$  et on a  $\text{dist}_{K_bK_c} \odot = \text{dist}_{K_cK_a} \odot = \text{dist}_{K_aK_b} \odot$ . Ces dernières égalités signifient que  $\odot$  est le centre du cercle inscrit à  $K_aK_bK_c$ .



lorsque  $ABC$  est acutangle ; si  $ABC$  est obtusangle, en  $A$  par exemple,  $O$  est le centre d'un cercle inscrit à  $K_a K_b K_c$  et est alors le point de concours de la bissectrice intérieure en  $K_a$  et des bissectrices extérieures en  $K_b$  et en  $K_c$  (voir la démonstration analogue pour le rôle de  $H$  dans le triangle orthique, p. 26).

Ce cercle inscrit ou inscrit à  $K_a K_b K_c$  et le cercle de Taylor, ayant le même centre  $O$ , sont des cercles concentriques. Par conséquent, les cordes  $H_a H_{ac}$ ,  $H_b H_{ba}$ ,  $H_c H_{cb}$  du cercle  $\mathcal{C}$ , qui sont tangentiel à un même cercle intérieur concentrique, puisque portées par les mêmes droites respectivement que  $K_b K_c$ ,  $K_c K_a$ ,  $K_a K_b$ , ont la même longueur. En fait, on a  $\overline{H_a H_{ac}} = \overline{H_b H_{ba}} = \overline{H_c H_{cb}} = \frac{1}{2} (\overline{H_b H_c} + \overline{H_c H_a} + \overline{H_a H_b})$  si  $ABC$  est acutangle ou  $= \frac{1}{2} (\overline{H_c H_a} + \overline{H_a H_b} - \overline{H_b H_c})$ ,  $= \frac{1}{2} (\overline{H_a H_b} + \overline{H_b H_c} - \overline{H_c H_a})$ ,  $= \frac{1}{2} (\overline{H_b H_c} + \overline{H_c H_a} - \overline{H_a H_b})$  si  $ABC$  est obtusangle respectivement en  $A$ , en  $B$ , en  $C$ .

Signalons que les intersections de ces trois cordes de  $\mathcal{C}$  avec les symédianes (p. 75) respectives  $s_a$ ,  $s_b$ ,  $s_c$  sont en leurs milieux :

$$(\overline{H_a H_{ac}}, s_a) = \frac{1}{2} (\overline{H_a H_{ac}}), \quad (\overline{H_b H_{ba}}, s_b) = \frac{1}{2} (\overline{H_b H_{ba}}), \quad (\overline{H_c H_{cb}}, s_c) = \frac{1}{2} (\overline{H_c H_{cb}}).$$

D'autre part, on a  $H_b H_{bc} \parallel a$ ,  $H_{ac} H_{ca} \parallel b$ ,  $H_{ba} H_{ab} \parallel c$ .

Ceci montre que le triangle qui a ses côtés sur ces droites est homothétique à  $ABC$ .

Appelons  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  les sommets de ce triangle :

$$(\overline{H_b H_{bc}}, \overline{H_{ac} H_{ca}}) \Rightarrow A_0, \quad (\overline{H_c H_{cb}}, \overline{H_{ab} H_{ba}}) \Rightarrow B_0, \quad (\overline{H_a H_{ac}}, \overline{H_{ba} H_{ab}}) \Rightarrow C_0.$$

On a  $A_0 B_0 C_0 = \text{hom } ABC$  et le centre de cette homothétie (inverse ou directe suivant que  $ABC$  est respectivement acutangle ou obtusangle, ce qui entraîne une similitude toujours directe : voir p. 123) est le point de Lemoine  $L$  (p. 76), ce qui implique que les sommets de ce triangle sont sur les symédianes :  $A_0 \in s_a$ ,  $B_0 \in s_b$ ,  $C_0 \in s_c$ , c.à.d.  $A_0 \in AA_t$ ,  $B_0 \in BB_t$ ,  $C_0 \in CC_t$ , où  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $C_t$  sont les sommets du

triangle tangentiel (p. 45), qui est homothétique au triangle orthique. On a aussi  $K_a \in s_a$ ,  $K_b \in s_b$ ,  $K_c \in s_c$  (p. 75). Si nous désignons par  $H_R$  l'orthocentre du triangle orthique  $H_a H_b H_c$ , on a  $(A_0 H_a, B_0 H_b, C_0 H_c) = H_R$ , car  $A_0 H_a \perp H_b H_c$ ,  $B_0 H_b \perp H_c H_a$ ,  $C_0 H_c \perp H_a H_b$ .

De plus,  $\overline{H_R A_0} = \overline{H_R B_0} = \overline{H_R C_0}$ , ce qui signifie que  $H_R$  est le centre du cercle circonscrit à  $A_0 B_0 C_0$  :  $H_R = \cdot [O(A_0, B_0, C_0)]$ .

Soient  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C_R$  les orthocentres des triangles  $A H_b H_c$  (dont  $H_b H_c$  et  $H_c H_a$  sont deux hauteurs),  $B H_c H_a$  (dont  $H_c H_a$  et  $H_a H_b$  sont deux hauteurs),  $C H_a H_b$  (dont  $H_a H_b$  et  $H_b H_c$  sont deux hauteurs) ; ceci signifie que nous posons

$$(\overline{H_b H_{bc}}, \overline{H_c H_{cb}}) \Rightarrow A_R, \quad (\overline{H_c H_{cb}}, \overline{H_a H_{ac}}) \Rightarrow B_R, \quad (\overline{H_a H_{ac}}, \overline{H_b H_{ba}}) \Rightarrow C_R,$$

nous aurons  $AA_R \perp H_b H_c$ ,  $BB_R \perp H_c H_a$ ,  $CC_R \perp H_a H_b$ .

Or le théorème de Nagel (p. 43) dit que  $AO \perp H_b H_c$ ,  $BO \perp H_c H_a$ ,  $CO \perp H_a H_b$ ,

où  $O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ :  $O = o(A, B, C)$ ; par comparaison, on en déduit que  $A_R \in AO$ ,  $B_R \in BO$ ,  $C_R \in CO$ , donc  $(AA_R, BB_R, CC_R) = O$ .

D'autre part, on a  $\odot = \frac{1}{2}(H_A, A_R) = \frac{1}{2}(H_B, B_R) = \frac{1}{2}(H_C, C_R)$ , donc

$$A_R B_R C_R = \text{hom}(\odot, -1) H_A H_B H_C, \quad \text{ce qui entraîne}$$

$C_R B_R \parallel H_B H_C$ ,  $A_R C_R \parallel H_C H_A$ ,  $B_R A_R \parallel H_A H_B$ , de sorte que les relations ci-dessus donnent  $AO$  ou  $A_R O \perp C_R B_R$ ,  $BO$  ou  $B_R O \perp A_R C_R$ ,  $CO$  ou  $C_R O \perp B_R A_R$ ,

ce qui montre que  $O$  est l'orthocentre du triangle  $A_R B_R C_R$ . Compte tenu de la relation  $\text{hom}(\odot, -1)$  ou  $\text{sym}_{\odot}$  entre les triangles  $A_R B_R C_R$  et  $H_A H_B H_C$ , on a

$$H_R = \text{sym}_{\odot} O. \quad \text{Or } \odot \in OL, \quad \text{donc } H_R \in OL.$$

Les triangles  $H_{ac} H_{ba} H_{cb}$  et  $H_{ab} H_{bc} H_{ca}$ , inscrits dans le cercle  $\mathcal{C}$ , sont directement égaux (p.119) entre eux et directement semblables (p.121) à  $ABC$ :

$$H_{ac} H_{ba} H_{cb} = H_{ab} H_{bc} H_{ca}, \quad H_{ac} H_{ba} H_{cb} \sim ABC \quad \text{et} \quad H_{ab} H_{bc} H_{ca} \sim ABC;$$

on a  $B \hat{H}_{ac} H_{ba} = C \hat{H}_{ba} H_{cb} = A \hat{H}_{cb} H_{ac} \Rightarrow \theta$  et  $H_{ca} \hat{H}_{ab} C = H_{ab} \hat{H}_{bc} A = H_{bc} \hat{H}_{ca} B = \theta$ ,

avec  $\text{tg } \theta = -(\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B} + \text{tg } \hat{C}) = -\text{tg } \hat{A} \cdot \text{tg } \hat{B} \cdot \text{tg } \hat{C}$

( $\theta$  est  $> 1$  dr. ou  $< 1$  dr. suivant que  $ABC$  est respectivement acutangle ou obtusangle).

Nous sommes dans une situation semblable à celle qui est décrite aux pages 103 et 104,  $H_{ac} H_{ba} H_{cb}$  et  $ABC$  ayant ici les rôles joués respectivement par  $ABC$  et  $A_p B_p C_p$ , l'angle  $\varphi$  étant ici  $\theta$  (devenu dans le cas présent  $> 1$  dr. si le triangle est acutangle comme sur la figure ci-dessus); le point double de la similitude est le point de Brocard  $\Omega_1$  de  $H_{ac} H_{ba} H_{cb}$ . Pour  $H_{ab} H_{bc} H_{ca}$  prenant la rôle de  $ABC$  et  $ABC$  de nouveau celui de  $A_p B_p C_p$ , on trouve dans l'autre sens pour l'angle constant entre les côtés correspondants de ces triangles, comme envisagé à la fin du paragraphe auquel nous renvoyons; comme indiqué là, le point double de la similitude est alors le point de Brocard  $\Omega_2$  de  $H_{ab} H_{bc} H_{ca}$ .

Le rapport de similitude  $k$  (p.121) des triangles  $H_{ac} H_{ba} H_{cb}$  et  $H_{ab} H_{bc} H_{ca}$  par rapport au triangle  $ABC$  est évidemment égal au rapport des rayons de leurs cercles circonscrits.

Pour  $ABC$ , c'est  $R$  (p.42) et pour les deux premiers, c'est le rayon  $R_{\odot}$  du cercle de Taylor  $\mathcal{C}$ ; or celui-ci vaut  $R_{\odot} = R \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \theta} = -R \frac{\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\cos \theta}$ ,

on a donc  $k = \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \theta} = -\frac{\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\cos \theta}$ .

Autres triangles (inversement) semblables (p.121) à  $ABC$ : les triangles ayant pour sommets

$A$  et les intersections de  $o(AH_a)$  avec  $b$  et avec  $c$ ,

$B$  et les intersections de  $o(BH_b)$  avec  $c$  et avec  $a$ ,

$C$  et les intersections de  $o(CH_c)$  avec  $a$  et avec  $b$ ,

les droites joignant les intersections de  $o(AH_a)$ ,  $o(BH_b)$  et  $o(CH_c)$  avec les côtés sont respectivement  $\parallel H_{ab} H_{ac}$ ,  $\parallel H_{bc} H_{ba}$  et  $\parallel H_{ca} H_{cb}$ .



### Cercles de Taylor des triangles HBC, HCA, HAB

Soient  $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$  les cercles de Taylor respectivement des triangles HBC (hauteurs:  $HH_a, BH_c, CH_b$ ), HCA (hauteurs:  $HH_b, CH_a, AH_c$ ), HAB (hauteurs:  $HH_c, AH_b, BH_a$ ) et  $\mathcal{O}_a = \circ(\mathcal{C}_a), \mathcal{O}_b = \circ(\mathcal{C}_b), \mathcal{O}_c = \circ(\mathcal{C}_c)$  leurs centres; si on pose

$\text{proj}_{H_c} H_a \Rightarrow H'_{ac}, \text{proj}_{H_c} H_b \Rightarrow H'_{bc}, \text{proj}_{H_c} H_c \Rightarrow H'_{cc}, \text{proj}_{H_b} H_a \Rightarrow H'_{ba}, \text{proj}_{H_b} H_c \Rightarrow H'_{cb},$   
 on a  $\mathcal{C}_a = \circ(H_{ba}, H_{ca}, H'_{ac}, H'_{bc}, H'_{cb}, H'_{ba}), \mathcal{C}_b = \circ(H_{cb}, H'_{cb}, H'_{ba}, H'_{ca}, H'_{ac}, H'_{bc}), \mathcal{C}_c = \circ(H_{ca}, H'_{ca}, H'_{cb}, H'_{ba}, H'_{bc}, H'_{ac});$

corde commune de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_a = H_{ba}H_{ca}$ , portée par le côté  $a$ ,

corde commune de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_b = H_{cb}H'_{cb}$ , portée par le côté  $b$ ,

corde commune de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_c = H_{ca}H'_{ca}$ , portée par le côté  $c$ ,

corde commune de  $\mathcal{C}_b$  et  $\mathcal{C}_c = H'_{ba}H'_{ca}$ , portée par la hauteur  $h_a$ ,

corde commune de  $\mathcal{C}_c$  et  $\mathcal{C}_a = H'_{cb}H'_{ba}$ , portée par la hauteur  $h_b$ ,

corde commune de  $\mathcal{C}_a$  et  $\mathcal{C}_b = H_{ac}H'_{bc}$ , portée par la hauteur  $h_c$ ;

les axes radicaux (p.7) de ces cercles  $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$  pris deux à deux étant  $h_a, h_b, h_c$ , le centre radical des trois cercles est H.

Propriété:  $\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c = \text{hom}(G_R, -\frac{1}{2}) HABC$ ;

il en résulte que  $\mathcal{O}_b \mathcal{O}_c \parallel a, \mathcal{O}_c \mathcal{O}_a \parallel b, \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \parallel c$  et  $\overline{\mathcal{O}_b \mathcal{O}_c} = \frac{a}{2}, \overline{\mathcal{O}_c \mathcal{O}_a} = \frac{b}{2}, \overline{\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b} = \frac{c}{2}$ ,

ainsi que  $G_R \in A\mathcal{O}_a, \in B\mathcal{O}_b, \in C\mathcal{O}_c$ , avec  $\overline{G_R \mathcal{O}_a} = \frac{1}{2} \overline{AG_R}, \overline{G_R \mathcal{O}_b} = \frac{1}{2} \overline{BG_R}, \overline{G_R \mathcal{O}_c} = \frac{1}{2} \overline{CG_R}$ .

Ce triangle  $\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c$  est appelé triangle de Taylor. Son orthocentre est  $\mathcal{O}$  et son triangle orthique est  $K_a K_b K_c$  (homothétique à  $H_a H_b H_c$ , dont c'est le triangle complémentaire: p.28):

$\mathcal{O} = (\mathcal{O}_a K_a, \mathcal{O}_b K_b, \mathcal{O}_c K_c)$ , avec  $\mathcal{O}_a K_a \perp \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c, \mathcal{O}_b K_b \perp \mathcal{O}_c \mathcal{O}_a, \mathcal{O}_c K_c \perp \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b$ .

Si ABC est acutangle,  $\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b, \mathcal{O}_c$  sont les centres des cercles exinscrits (p.59) à  $K_a K_b K_c$ ; si ABC est obtusangle en A par exemple, les rôles de  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_a$  sont à intervertir: c'est alors  $\mathcal{O}_a$  qui est le centre du cercle inscrit à  $K_a K_b K_c$  et  $\mathcal{O}$  le centre d'un des cercles exinscrits (p.29), tandis que  $\mathcal{O}_b$  et  $\mathcal{O}_c$  restent les centres des deux autres cercles exinscrits.

Angles:  $K_c \hat{\mathcal{O}}_a K_b = \hat{A}, \mathcal{O}_a \hat{K}_b K_c = H_{ca} \hat{K}_b \mathcal{O}_a = \hat{B}, K_b \hat{K}_c \mathcal{O}_a = \mathcal{O}_a \hat{K}_c H_{ca} = \hat{C}$ ,

du moins si ABC est acutangle (si au contraire ABC est obtusangle, en A par exemple, il faut remplacer l'angle du deuxième membre par son supplément en remplaçant  $H_{ca}$  par  $H'_{ca}$  et  $H_{ba}$  par  $H'_{ba}$ ), + relations analogues pour les angles en  $\mathcal{O}_b$  et en  $\mathcal{O}_c$ , obtenues par permutation des lettres.

Parmi les propriétés données au sujet des pieds des hauteurs (p.25), il a été signalé (explicitement pour la première relation) que

$(H_{ab}, H_{ac}, H'_{ac}, H'_{bc}) - , (H_{bc}, H_{ba}, H'_{ba}, H'_{ca}) - , (H_{ca}, H_{cb}, H'_{cb}, H'_{ca}) - ;$

en combinant ceci avec ce qui est dit au paragraphe précédent (p.28),  $K_a \in H_{bc}H_{ca}$  et  $\in H_{ca}H_{cb}$ , etc., on voit qu'on a même

$(K_b, K_c, H_{ab}, H_{ac}, H'_{ac}, H'_{bc}) - , (K_c, K_a, H_{bc}, H_{ba}, H'_{ba}, H'_{ca}) - , (K_a, K_b, H_{ca}, H_{cb}, H'_{cb}, H'_{ca}) - ;$

on a donc aussi  $H_{ab}$  et  $H_{ac} \in K_b K_c, H_{bc}$  et  $H_{ca} \in K_c K_a, H_{ca}$  et  $H_{cb} \in K_a K_b$ .

Sur ces droites, on a  $\overline{H_b H'_b} = \overline{H_c H'_c} = \overline{H_a H_a}$ ,  $\overline{H_c H'_c} = \overline{H_a H'_a} = \overline{H_b H_b}$ ,  $\overline{H_a H'_a} = \overline{H_b H'_b} = \overline{H_c H_c}$  ;  
 $H'_b = \text{sym}_{K_a} H_b$ ,  $H'_c = \text{sym}_{K_a} H_c$ ,  $H'_a = \text{sym}_{K_b} H_a$ ,  $H'_c = \text{sym}_{K_b} H_c$ ,  $H'_a = \text{sym}_{K_c} H_a$ ,  $H'_b = \text{sym}_{K_c} H_b$ .  
 On a d'autre part  $\overline{H_b H'_c} = \overline{H_c H'_b}$ ,  $\overline{H_c H'_a} = \overline{H_a H'_c}$ ,  $\overline{H_a H'_b} = \overline{H_b H'_a}$ , etc.

Le rayon  $R_{O_a}$  du cercle  $\mathcal{C}_a$  est donné par  $R_{O_a} = R \frac{\sin \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}}{\sin \hat{O}_a}$   
 où  $R$  est le rayon du cercle  $\circ(A, B, C)$  circonscrit à  $ABC$  (p.42) et où  $\hat{O}_a$  est donné par  
 $\text{tg } \hat{O}_a = \text{tg } \hat{A} - \cot \hat{B} - \cot \hat{C} = \text{tg } \hat{A} \cdot \cot \hat{B} \cdot \cot \hat{C}$  ; les rayons  $R_{O_b}$  de  $\mathcal{C}_b$  et  $R_{O_c}$  de  $\mathcal{C}_c$  sont  
 donnés par des formules analogues.

Axe orthique

L'axe orthique  $h$  est l'axe d'homologie (voir p.124) du triangle  $ABC$  et de son triangle  
 orthique  $H_a H_b H_c$ , c.à.d. la droite portant les points colinéaires

$$(a, H_b H_c) \Rightarrow K'_a, \quad (b, H_c H_a) \Rightarrow K'_b, \quad (c, H_a H_b) \Rightarrow K'_c ;$$

c'est la polaire trilinéaire (p.16) de l'orthocentre :  $h = \text{pol}_{ABC} H$ .

Propriété: on a  $h \perp e$  où  $e$  est la droite d'Euler (p.45).

Les points  $(BK'_b, CK'_c) \in h_a$ ,  $(CK'_c, AK'_a) \in h_b$ ,  $(AK'_a, BK'_b) \in h_c$  sont les points  
 associés (p.17) à  $H$ : sur les hauteurs respectives, ils sont conjugués harmoniques de  
 $H$  respectivement par rapport aux segments  $AH_a$ ,  $BH_b$ ,  $CH_c$ .

On a de plus  $AK'_a \perp HM_a$ ,  $BK'_b \perp HM_b$ ,  $CK'_c \perp HM_c$   
 où  $M_a, M_b, M_c$  sont les milieux des côtés, c.à.d. comme nous poserons ci-après,  
 $\frac{1}{2}(B, C) \Rightarrow M_a$ ;  $\frac{1}{2}(C, A) \Rightarrow M_b$ ,  $\frac{1}{2}(A, B) \Rightarrow M_c$ .

L'axe orthique  $h$  est aussi l'axe radical (lieu des points d'égales puissances: p.7)  
 du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  (p.42) et du cercle des neuf points  $\mathcal{C}_9$  (p.49).

Si nous posons  $\circ[\circ(O_a, O_b, O_c)] \Rightarrow O_9$ , on a  $\circ O_9 \perp h$ ; ceci résulte de  $e \perp h$ ,  
 car en raison du ce que  $\circ O_a \circ O_b \circ O_c = \text{hom } HABC$  (p.31),  $\circ$  est l'orthocentre du  
 triangle de Taylor  $O_a O_b O_c$  (p.31), alors que  $O_9$  en est le centre du cercle circonscrit,  
 et par conséquent la droite  $\circ O_9$  est la droite d'Euler (p.45) du triangle  $O_a O_b O_c$ ,  
 qui est  $\parallel e$  par suite de l'homothétie des deux triangles.

## Médianes, centre de gravité, triangle complémentaire

### Définition et notations

Une médiane est une sévienne dont le pied est le milieu du côté opposé au sommet dont elle est issue.

On pose

$$\frac{1}{2}(B, C) \Rightarrow M_a, \quad \frac{1}{2}(C, A) \Rightarrow M_b, \quad \frac{1}{2}(A, B) \Rightarrow M_c$$

et les trois médianes sont

$$AM_a \Rightarrow g_a, \quad BM_b \Rightarrow g_b, \quad CM_c \Rightarrow g_c.$$

### Propriétés

$$\text{dist}_{g_a} B = \text{dist}_{g_a} C, \quad \text{dist}_{g_b} C = \text{dist}_{g_b} A, \quad \text{dist}_{g_c} A = \text{dist}_{g_c} B,$$

$$u \parallel a \rightsquigarrow \frac{1}{2}(U_b, U_c) \in g_a \quad \text{où } U_b = (u, b) \text{ et } U_c = (u, c)$$

(et des propositions analogues obtenues par permutation des lettres);

$$u \parallel a \rightsquigarrow \text{dist}_{g_a}(u, c) = \text{dist}_{g_a}(u, b) \quad (\text{idem}).$$

$$P \in g_a \rightsquigarrow \frac{\text{dist}_b P}{\text{dist}_c P} = \frac{c}{b}, \quad P \in g_b \rightsquigarrow \frac{\text{dist}_c P}{\text{dist}_a P} = \frac{a}{c}, \quad P \in g_c \rightsquigarrow \frac{\text{dist}_a P}{\text{dist}_b P} = \frac{b}{a}.$$

Si  $P$  est un point quelconque du plan et si on désigne par  $P_b$  et  $P_c$  les pieds des séviennes issues de  $B$  et de  $C$  passant par le point, on a  $[\frac{1}{2}(A, P), \frac{1}{2}(P_b, P_c), M_a]$  — (ainsi que des propositions analogues obtenues par permutation des lettres).

Si  $V_b$  et  $V_c$  sont les pieds respectifs des séviennes  $v_b$  issues de  $B$  et  $v_c$  issues de  $C$ , on a  $(v_b, v_c) \in g_a \rightsquigarrow V_b V_c \parallel BC$  (+ énoncés analogues obtenus par permutation des lettres);  
on a de plus  $\{\overline{AV_c} = \frac{1}{n} \overline{AB} \text{ et } \overline{AV_b} = \frac{1}{n} \overline{AC}\} \rightsquigarrow \{(v_b, v_c) \overline{V_b} = \frac{1}{n+1} \overline{BV_b} \text{ et } (v_b, v_c) \overline{V_c} = \frac{1}{n+1} \overline{CV_c}\}$  (idem).

$$\text{On a aussi } g_a \perp HK'_a, \quad g_b \perp HK'_b, \quad g_c \perp HK'_c$$

où  $K'_a, K'_b, K'_c$  sont les trois points définissant l'axe orthique (voir p. 32) c.à.d. les intersections des côtés (éventuellement prolongés) du triangle orthique  $H_a H_b H_c$  avec les côtés correspondants (éventuellement prolongés) de  $ABC$ .

Enfin, notons que si  $P$  est un point quelconque, on a  $(A \text{ sym}_{M_a} P, B \text{ sym}_{M_b} P, C \text{ sym}_{M_c} P)^*$ .

### Centre de gravité

$$\text{On a } (g_a, g_b, g_c)^*$$

et on pose  $(g_a, g_b, g_c) \Rightarrow G$ , appelé centre de gravité, car c'est le centre de gravité ou barycentre de la surface homogène en densité limitée par le contour du triangle.

$$\text{On a } \overline{GM_a} = \frac{1}{3} \overline{AM_a} = \frac{g_a}{3}, \quad \overline{GM_b} = \frac{1}{3} \overline{BM_b} = \frac{g_b}{3}, \quad \overline{GM_c} = \frac{1}{3} \overline{CM_c} = \frac{g_c}{3},$$

$$\text{c.à.d. } \overline{AG} = 2 \overline{GM_a}, \quad \overline{BG} = 2 \overline{GM_b}, \quad \overline{CG} = 2 \overline{GM_c};$$

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

les distances de  $G$  aux côtés sont inversement proportionnelles aux longueurs de ceux-ci :

$$a \cdot \text{dist}_a G = b \cdot \text{dist}_b G = c \cdot \text{dist}_c G ;$$

$$\text{dist}_a G = \frac{h_a}{3} , \quad \text{dist}_b G = \frac{h_b}{3} , \quad \text{dist}_c G = \frac{h_c}{3} .$$

$G$  est le centre des moyennes distances de  $A, B, C$  (et aussi de  $M_a, M_b, M_c$ ), c.à.d. le barycentre de trois masses égales placées en ces trois points :  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  (et aussi  $\vec{GM}_a + \vec{GM}_b + \vec{GM}_c = \vec{0}$ ) ; si  $u$  est une transversale quelconque, on a

$$\text{dist}_u G = \frac{1}{3} (\text{dist}_u A + \text{dist}_u B + \text{dist}_u C) = \frac{1}{3} (\text{dist}_u M_a + \text{dist}_u M_b + \text{dist}_u M_c)$$

Les distances étant toutes prises en valeurs algébriques ;

en particulier  $G \in u \rightarrow \text{dist}_u A + \text{dist}_u B + \text{dist}_u C = \text{dist}_u M_a + \text{dist}_u M_b + \text{dist}_u M_c = 0$

(si  $p, \sigma, \tau$  sont les coordonnées de la transversale, on a donc  $G \in u \rightarrow p + \sigma + \tau = 0$ ).

Pour une telle transversale qui passe par un point intérieur au triangle, soit  $G$  puisque  $G \in u$ , un seul de ses points segmentaires, soit par exemple  $U_a$ , est sur le prolongement d'un des côtés, tandis que les deux autres, alors  $U_b$  et  $U_c$ , sont sur les côtés eux-mêmes ; dans ce cas,  $G \in u$  entraîne  $\vec{GU}_b, \vec{GU}_c = |\vec{GU}_c \cdot \vec{GU}_a - \vec{GU}_a \cdot \vec{GU}_b|$ , ce qui peut aussi s'écrire  $\frac{1}{\vec{GU}_a} = \left| \frac{1}{\vec{GU}_b} - \frac{1}{\vec{GU}_c} \right|$ , (et des relations semblables, obtenues par permutation des lettres  $a, b, c$ , lorsque le point segmentaire situé sur le prolongement d'un côté est  $U_b$  ou  $U_c$  au lieu de  $U_a$ ).

Somme des carrés des distances d'un point quelconque  $P$  aux sommets du triangle :

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3 \overline{PG}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = 3 \overline{PG}^2 + \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) .$$

On peut aussi noter que  $[(\perp(g_a, G), a), (\perp(g_b, G), b), (\perp(g_c, G), c)] =$ .

Le triangle pédal de  $G$  est  $M_a M_b M_c$ . Appelons  $G_a G_b G_c$  son triangle podaire en posant  $\text{proj}_a G \Rightarrow G_a, \text{proj}_b G \Rightarrow G_b, \text{proj}_c G \Rightarrow G_c$  ; ses côtés sont parallèles aux droites joignant les milieux des segments  $BH_c$  et  $CH_b$ , des segments  $CH_a$  et  $AH_c$ , des segments  $AH_b$  et  $BH_a$  :

$$G_b G_c \parallel \frac{1}{2} (B, H_c) \frac{1}{2} (C, H_b) , \quad G_c G_a \parallel \frac{1}{2} (C, H_a) \frac{1}{2} (A, H_c) , \quad G_a G_b \parallel \frac{1}{2} (A, H_b) \frac{1}{2} (B, H_a) ;$$

avec cette notation, les relations du début de cette page s'écrivent

$$a \cdot \overline{G_a G} = b \cdot \overline{G_b G} = c \cdot \overline{G_c G} , \quad \overline{G_a G} = \frac{h_a}{3} , \quad \overline{G_b G} = \frac{h_b}{3} , \quad \overline{G_c G} = \frac{h_c}{3} .$$

Longueurs des médianes

$$g_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} , \quad g_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} , \quad g_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} ,$$

$$g_a^2 = \frac{a^2}{4} + bc \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2}{4} + \frac{1}{2} bc \cos \hat{A} , \quad g_b^2 = \frac{b^2}{4} + ca \cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2}{4} + \frac{1}{2} ca \cos \hat{B} , \quad g_c^2 = \frac{c^2}{4} + ab \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{1}{2} ab \cos \hat{C} ;$$

$$g_a^2 + g_b^2 + g_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) .$$

On a  $g_b \perp g_c \rightarrow g_b^2 + g_c^2 = g_a^2$  et deux théorèmes analogues par permutation des lettres  $a, b, c$ .

Représentation : Une conséquence de la relation  $b^2 + c^2 = 2g_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$  est que l' lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances  $\overline{AB} = c$  et  $\overline{AC} = b$  à deux points fixes B et C soit une constante  $k^2$  est un cercle de centre  $M_a = \frac{1}{2}(B, C)$  et de rayon  $g_a = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$ .

Inégalités

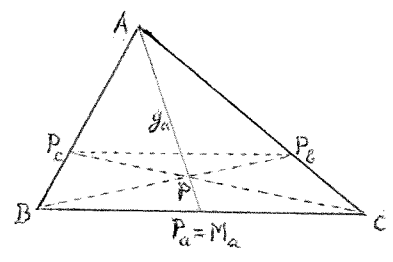
$p - a < g_a < \frac{1}{2}(b+c) = p - \frac{a}{2}$ ,  $p - b < g_b < \frac{1}{2}(c+a) = p - \frac{b}{2}$ ,  $p - c < g_c < \frac{1}{2}(a+b) = p - \frac{c}{2}$  ;  
 $g_a > \frac{1}{2}|b-c|$ ,  $g_b > \frac{1}{2}|c-a|$ ,  $g_c > \frac{1}{2}|a-b|$  ;  
 $\frac{3}{2}p = \frac{3}{4}(a+b+c) < g_a + g_b + g_c < a + b + c = 2p$  ;  
 $b > c \rightsquigarrow g_b < g_c$  et réciproquement (et des énoncés analogues par permutation des lettres) ;  
 $C\hat{M}_aA > A\hat{M}_aB \rightsquigarrow b > c$  et réciproquement (idem) ;  
 $g_a > \frac{a}{2}$ ,  $= \frac{a}{2}$  ou  $< \frac{a}{2} \rightsquigarrow \hat{A} < 120^\circ$ ,  $= 120^\circ$  ou  $> 120^\circ$  respectivement, et réciproquement (idem).

Angles

$|\cotg C\hat{M}_aA| = |\cotg A\hat{M}_aB| = \frac{1}{2}|\cotg \hat{C} - \cotg \hat{B}| = \frac{|b^2 - c^2|}{2bc \sin \hat{A}}$ ,  $\sin A\hat{M}_aB = \frac{ha}{g_a}$  ;  
 propriété des bissectrices de ces angles faits par  $g_a$  avec  $a$  :  
 posons  $\frac{1}{2}(M_aA, M_aB) = k_{ac}$  et  $\frac{1}{2}(M_aC, M_aA) = k_{ac}$ , on a  $(AB, k_{ac})(AC, k_{ac}) \parallel a$  ;  
 $\cotg B\hat{A}M_a = 2 \cotg \hat{A} + \cotg \hat{B}$ ,  $\cotg M_a\hat{A}C = 2 \cotg \hat{A} + \cotg \hat{C}$ ,  
 et des formules analogues, par permutation des lettres, pour les deux autres médianes,  
 $\cotg B\hat{G}C = -\frac{1}{3}(2 \cotg \hat{B} + 2 \cotg \hat{C} - \cotg \hat{A})$  et des formules analogues par permutation des lettres ;  
 $B\hat{G}C = M_b\hat{B}A + A\hat{C}M_c + \hat{A}$ ,  $C\hat{G}A = M_c\hat{C}B + B\hat{A}M_a + \hat{B}$ ,  $A\hat{G}B = M_a\hat{A}C + C\hat{B}M_b + \hat{C}$ .

Point sur une médiane

Soit P un point tel que les sommets  $P_b$  et  $P_c$  de son triangle pédal (n.14) divisent les côtés AC et AB de ABC dans un même rapport k, soit  $\frac{\overline{AP_b}}{b} = \frac{\overline{AP_c}}{c} = k$ , ce qui a lieu si et seulement si  $P_cP_b \parallel BC$  ;



on a alors  $P_a = \frac{1}{2}(B, C) = M_a$ , c.a.d.  $P \in g_a$  .  
 Réciproquement,  $P \in g_a \rightsquigarrow P_cP_b \parallel BC$ , c.a.d.  $\frac{\overline{AP_b}}{b} = \frac{\overline{AP_c}}{c}$  .  
 On a donc dans ce cas  $AP_cP_b = \text{hom}(A, k) ABC$  et  $\frac{\overline{AP_b}}{b} = \frac{\overline{AP_c}}{c} = \frac{\overline{P_cP_b}}{a} = k$  .  
 On a de plus  $PP_bP_c = \text{hom}(P, k) PBC$ , donc  $\frac{\overline{PP_b}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PP_c}}{\overline{PC}} = k$  .  
 Le point P divise  $g_a$  dans un rapport  $\frac{1-k}{1+k}$  :  $\frac{\overline{AP}}{\overline{AM_a}} = \frac{1-k}{1+k}$ , avec des coordonnées barycentriques  $\alpha = 1-k$ ,  $\beta = \gamma = k$  .

De même, si ce sont les points  $P_c$  et  $P_a$  qui divisent BA et BC dans un même rapport, soit si  $P_aP_c \parallel CA$ , on a  $P \in g_b$  et réciproquement. De même, si ce

sont les points  $P_a$  et  $P_b$  qui divisent  $CA$  et  $CB$  dans un même rapport, c.à.d.  $P_b P_a \parallel AB$ , on a  $P \in g_c$  et réciproquement. On peut facilement transposer les formules ci-dessus à ces deux cas.

### Triangle complémentaire

Le triangle  $M_a M_b M_c$ , triangle pédal des médianes ou de leur point de concours  $G$ , est le triangle complémentaire du triangle  $ABC$  (et celui-ci est le triangle anticomplémentaire du triangle  $M_a M_b M_c$ ).

On a  $M_a M_b M_c = \text{hom}(G, -\frac{1}{2}) ABC$

et  $AM_c M_b = \text{hom}(A, \frac{1}{2}) ABC$ ,  $BM_a M_c = \text{hom}(B, \frac{1}{2}) BCA$ ,  $CM_b M_a = \text{hom}(C, \frac{1}{2}) CAB$ , les quatre triangles  $AM_c M_b$ ,  $M_c B M_a$ ,  $M_b M_a C$  et  $M_a M_b M_c$  sont égaux entre eux.

Pour les côtés du triangle complémentaire (= "intermédianes"), on a

$M_c M_b \parallel BC$ ,  $M_c M_b \perp h_a$ ,  $M_a M_c \parallel CA$ ,  $M_a M_c \perp h_b$ ,  $M_b M_a \parallel AB$ ,  $M_b M_a \perp h_c$ , (réciproquement,  $\{u \in M_b \text{ et } u \parallel a\} \sim u \ni M_c$ , + énoncés analogues par permutation des lettres);  
 $\overline{M_c M_b} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{a}{2}$ ,  $\overline{M_a M_c} = \frac{1}{2} \overline{CA} = \frac{b}{2}$ ,  $\overline{M_b M_a} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{c}{2}$ .

Posons  $\frac{1}{2}(M_c, M_b) \Rightarrow A_m$ ,  $\frac{1}{2}(M_a, M_c) \Rightarrow B_m$ ,  $\frac{1}{2}(M_b, M_a) \Rightarrow C_m$ ;

les médianes du triangle complémentaire sont  $M_b A_m$ ,  $M_c B_m$ ,  $M_a C_m$  et le triangle  $A_m B_m C_m$  est le triangle complémentaire du triangle complémentaire de  $ABC$ ;

donc  $A_m B_m C_m = \text{hom}(G, -\frac{1}{2}) M_a M_b M_c = \text{hom}(G, \frac{1}{4}) ABC$ ,

d'où  $B_m C_m \parallel a$ ,  $C_m A_m \parallel b$ ,  $A_m B_m \parallel c$ .

On a  $A_m \in g_a$ ,  $B_m \in g_b$ ,  $C_m \in g_c$ ,

avec  $\overline{A A_m} = \frac{3}{4} \overline{AG}$ ,  $\overline{B B_m} = \frac{3}{4} \overline{BG}$ ,  $\overline{C C_m} = \frac{3}{4} \overline{CG}$ ;

$(M_c M_b, g_a) = A_m$ ,  $(M_a M_c, g_b) = B_m$ ,  $(M_b M_a, g_c) = C_m$ ;

les médianes  $M_a A_m$ ,  $M_b B_m$ ,  $M_c C_m$  du triangle complémentaire sont donc portées par celles du triangle  $ABC$  et on a

$A_m = \frac{1}{2}(A, M_a)$ ,  $B_m = \frac{1}{2}(B, M_b)$ ,  $C_m = \frac{1}{2}(C, M_c)$ ;

le centre de gravité est évidemment le même:  $G$ ;

on a  $\overline{A_m G} = \frac{1}{4} \overline{AG} = \frac{1}{6} g_a$ ,  $\overline{B_m G} = \frac{1}{4} \overline{BG} = \frac{1}{6} g_b$ ,  $\overline{C_m G} = \frac{1}{4} \overline{CG} = \frac{1}{6} g_c$ .

On a de plus  $\frac{1}{2}(A, H_a) \in M_c M_b$ ,  $\frac{1}{2}(B, H_b) \in M_a M_c$ ,  $\frac{1}{2}(C, H_c) \in M_b M_a$  et nous posons  
 $(A H_a, M_c M_b) = \frac{1}{2}(A, H_a) \Rightarrow Z_a$ ,  $(B H_b, M_a M_c) = \frac{1}{2}(B, H_b) \Rightarrow Z_b$ ,  $(C H_c, M_b M_a) = \frac{1}{2}(C, H_c) \Rightarrow Z_c$ ;

on a  $(M_a Z_a, M_b Z_b, M_c Z_c) \ast$  (voir plus loin point de Lemoine).

Si nous posons  $\text{proj}_{h_a} G \Rightarrow G'_a$ ,  $\text{proj}_{h_b} G \Rightarrow G'_b$ ,  $\text{proj}_{h_c} G \Rightarrow G'_c$ ,

on a évidemment  $\overline{A G'_a} = \frac{2}{3} h_a$ ,  $\overline{B G'_b} = \frac{2}{3} h_b$ ,  $\overline{C G'_c} = \frac{2}{3} h_c$ ; on a aussi  
 $\overline{G G'_a} = \frac{4}{3} \overline{A_m Z_a} = 2 \text{dist}_{M_a} G$ ,  $\overline{G G'_b} = \frac{4}{3} \overline{B_m Z_b} = 2 \text{dist}_{M_b} G$ ,  $\overline{G G'_c} = \frac{4}{3} \overline{C_m Z_c} = 2 \text{dist}_{M_c} G$ .

Posons aussi  $(m_a, M_b M_c) \Rightarrow Z'_a$ ,  $(m_b, M_c M_a) \Rightarrow Z'_b$ ,  $(m_c, M_a M_b) \Rightarrow Z'_c$ ; on a  
 $Z'_a = \text{sym}_{A_m} Z_a$ ,  $Z'_b = \text{sym}_{B_m} Z_b$ ,  $Z'_c = \text{sym}_{C_m} Z_c$ , c.à.d.  $A_m = \frac{1}{2}(Z_a, Z'_a)$ ,  $B_m = \frac{1}{2}(Z_b, Z'_b)$ ,  $C_m = \frac{1}{2}(Z_c, Z'_c)$ .

Des céviennes isotomiques (p.15) issues de A dans ABC, soient  $v_{a1}$  et  $v_{a2}$ , donc telles que  $M_a = \frac{1}{2}[(a, v_{a1}), (a, v_{a2})]$ , le sont aussi pour le triangle  $A M_b M_c$ , c.à.d. qu'on a aussi  $A_{m1} = \frac{1}{2}[(BC, v_{a1}), (BC, v_{a2})]$  (+ énoncés semblables pour des céviennes isotomiques issues de B ou de C). En particulier, si nous désignons par  $h'_a, h'_b, h'_c$  les céviennes isotomiques des hauteurs, donc telles que  $(a, h'_a) = \text{sym}_{M_a} H_a, (b, h'_b) = \text{sym}_{M_b} H_b, (c, h'_c) = \text{sym}_{M_c} H_c$ , on a  $Z'_a \in h'_a, Z'_b \in h'_b, Z'_c \in h'_c$ .

De plus,  $(h'_a, h'_b, h'_c)^*$ , ce point étant le point réciproque (p.76) de l'orthocentre H; nous le désignerons par  $H_2$ :  $(h'_a, h'_b, h'_c) = \text{recipr} H \Rightarrow H_2$ .

Considérons les points qui, sur les côtés du triangle complémentaire, sont à une distance quelconque donnée S de l'orthocentre H (c.à.d. les intersections avec ces côtés d'un cercle de centre H et de rayon S):

$A_{S1}$  et  $A_{S2}$  sur  $M_b M_c, B_{S1}$  et  $B_{S2}$  sur  $M_a M_c, C_{S1}$  et  $C_{S2}$  sur  $M_a M_b$ ,  
on a  $\overline{AA_{S1}} = \overline{AA_{S2}} = \overline{BB_{S1}} = \overline{BB_{S2}} = \overline{CC_{S1}} = \overline{CC_{S2}}$ .

Note

Soit une cévienne  $v_a$  issue de A, de pied  $V_a$ . La droite joignant les points  $(AB, M_b V_a)$  et  $(AC, M_c V_a)$  est parallèle à la cévienne:

$$(AB, M_b V_a)(AC, M_c V_a) \parallel v_a$$

(+ énoncés semblables par permutation des lettres pour des céviennes issues de B ou de C).

Point complémentaire

Étant donné un point quelconque P du plan, posons

$$\|(PA, M_a) \Rightarrow d_{Aa}(P), \quad \|(PB, M_b) \Rightarrow d_{Bb}(P), \quad \|(PC, M_c) \Rightarrow d_{Cc}(P);$$

ces droites sont concourantes;  $(d_{Aa}(P), d_{Bb}(P), d_{Cc}(P))^*$ .  
Le point de concours a été appelé point complémentaire de P; nous le désignerons par compl P:  $(d_{Aa}(P), d_{Bb}(P), d_{Cc}(P)) \Rightarrow \text{compl P}$ .

On a  $(P, G, \text{compl P})$  — , c.à.d.  $G \in P \text{ compl P}$ ,  
P et compl P étant de part et d'autre de G avec  $\overline{G \text{ compl P}} = \frac{1}{2} \overline{PG}$ .

Cette relation n'est donc pas réciproque: compl P est le point complémentaire de P, mais P n'est pas le point complémentaire de compl P; on ne peut par conséquent pas parler de points complémentaires l'un de l'autre; P est l'anticomplémentaire de compl P. Un point complémentaire d'un autre joue le même rôle dans le triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$  que celui que cet autre occupe dans le triangle ABC.

Le point complémentaire de l'orthocentre H est le centre O du cercle circonscrit

(p. 42) et le point complémentaire du centre  $O$  du cercle circonscrit est le centre  $O_9$  du cercle des neuf points (p. 39) :  $O = \text{compl } H$  et  $O_9 = \text{compl } O$ .

On a aussi  $(M_a Z_a, M_b Z_b, M_c Z_c) = \text{compl } H_2$  (point de Lemoine, p. 77).

Autres points remarquables

Posons (\*)  $\text{sym}_B A \Rightarrow A_3, \text{sym}_C A \Rightarrow A_4, \text{sym}_C B \Rightarrow B_3, \text{sym}_A B \Rightarrow B_4, \text{sym}_A C \Rightarrow C_3, \text{sym}_B C \Rightarrow C_4$ ;

on a évidemment  $A_3 \in c, A_4 \in b, B_3 \in a, B_4 \in c, C_3 \in b, C_4 \in a$ ;

$$A_3 A_4 \parallel a, B_3 B_4 \parallel b, C_3 C_4 \parallel c; B_4 C_3 \parallel a, C_4 A_3 \parallel b, A_4 B_3 \parallel c;$$

$$\overline{A_3 A_4} = 2a, \overline{B_3 B_4} = 2b, \overline{C_3 C_4} = 2c, \overline{B_4 C_3} = a, \overline{C_4 A_3} = b, \overline{A_4 B_3} = c;$$

$$AA_3 A_4 = \text{hom}(A, 2) ABC, BB_3 B_4 = \text{hom}(B, 2) BCA, CC_3 C_4 = \text{hom}(C, 2) CAB,$$

$$AB_4 C_3 = \text{hom}(A, -1) ABC, BC_4 A_3 = \text{hom}(B, -1) BCA, CA_4 B_3 = \text{hom}(C, -1) CAB;$$

$$B_4 C \parallel C_3 B \parallel g_a, C_4 A \parallel A_3 C \parallel g_b, A_4 B \parallel B_3 A \parallel g_c.$$

Posons  $\text{sym}_{M_a} G \Rightarrow G_{ma}, \text{sym}_{M_b} G \Rightarrow G_{mb}, \text{sym}_{M_c} G \Rightarrow G_{mc}$ ;

on a évidemment  $G_{ma} \in g_a, G_{mb} \in g_b, G_{mc} \in g_c$ ,

$$\text{et de plus } G_{ma} = (A_3 C, A_4 B) = \left(\frac{2}{3} B, \frac{1}{3} A_4\right) = \left(\frac{2}{3} C, \frac{1}{3} A_3\right),$$

$$G_{mb} = (B_3 A, B_4 C) = \left(\frac{2}{3} C, \frac{1}{3} B_4\right) = \left(\frac{2}{3} A, \frac{1}{3} B_3\right),$$

$$G_{mc} = (C_3 B, C_4 A) = \left(\frac{2}{3} A, \frac{1}{3} C_4\right) = \left(\frac{2}{3} B, \frac{1}{3} C_3\right);$$

$$\overline{AG_{ma}} = \frac{1}{3} g_a, \overline{BG_{mb}} = \frac{1}{3} g_b, \overline{CG_{mc}} = \frac{1}{3} g_c,$$

$$M_a G_{ma} = \frac{1}{3} g_a, M_b G_{mb} = \frac{1}{3} g_b, M_c G_{mc} = \frac{1}{3} g_c;$$

$$\text{c.à.d. } G_{ma} = \text{sym}_G A, G_{mb} = \text{sym}_G B, G_{mc} = \text{sym}_G C.$$

Triangle anticomplémentaire

$\mathcal{E}'$  est le triangle  $A'B'C'$  dont  $ABC$  est le triangle complémentaire;

$$A'B'C' = \text{hom}(G, -2) ABC$$

$$A' = \text{sym}_{M_a} A, B' = \text{sym}_{M_b} B, C' = \text{sym}_{M_c} C,$$

et donc  $A' \in g_a, B' \in g_b, C' \in g_c$ ; on a de plus  $A' = \frac{1}{2}(A_3, A_4), B' = \frac{1}{2}(B_3, B_4), C' = \frac{1}{2}(C_3, C_4)$ ;

$$C'B' \parallel BC, A'C' \parallel CA, B'A' \parallel AB; \overline{C'B'} = 2a, \overline{A'C'} = 2b, \overline{B'A'} = 2c;$$

$$\overline{CA} = \overline{AB'} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{BC'} = \overline{CA}, \overline{BC} = \overline{CA'} = \overline{AB}; A = \frac{1}{2}(B', C'), B = \frac{1}{2}(C', A'), C = \frac{1}{2}(A', B');$$

$$(A, G, M_a, A') - , (B, G, M_b, B') - , (C, G, M_c, C') - ,$$

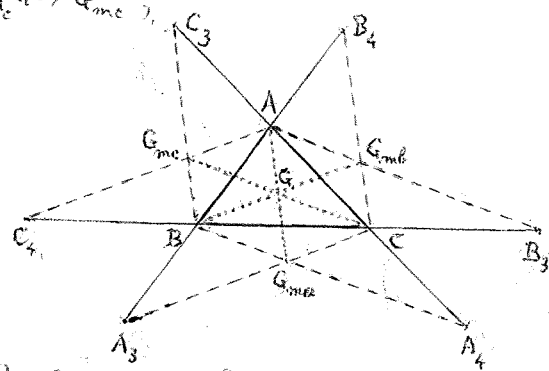
les médianes de  $A'B'C'$  portent celles de  $ABC$ .

On a aussi  $A'B'C' = \text{hom}(G, 4) M_a M_b M_c$

et  $H = \cdot [O(A', B', C')] ;$

$A'B'C'$  est le triangle antipodaire de  $H$ :  $\text{proj}_{B'C'} H = A, \text{proj}_{A'C'} H = B, \text{proj}_{A'B'} H = C$ ;

(\*) A ceux qui s'étonneraient de cette notation, avec des indices 3 et 4, il faut dire qu'elle est due à des conditions historiques: elle a été utilisée lorsque les points maintenant désignés, au dernier paragraphe de ce chapitre, par  $V_{3a}$  et  $V_{4a}$  étaient appelés  $A_3$  et  $A_4$ , et semblablement pour les  $B$  et les  $C$ . Étant donné que dans le présent ouvrage (dernier chapitre notamment), les notations  $A_1, B_1, C_1$  et  $A_2, B_2, C_2$  sont utilisées pour désigner des triangles quelconques (entre lesquels une relation peut être établie), il a été jugé opportun de conserver ici les indices 3 et 4.



$$G_{ma} G_{mb} G_{mc} = \text{hom}(G, -1) ABC;$$



$C'B' \text{ tang } \mathcal{C}_a, \quad A'C' \text{ tang } \mathcal{C}_b, \quad B'A' \text{ tang } \mathcal{C}_c.$

Les triangles  $A'CB, CB'A, BAC'$  sont égaux à  $ABC$ ;  
 leurs cercles circonscrits se coupent en  $H$ :  $H \in \circ(A', C, B), H \in \circ(C, B', A), H \in \circ(B, A', C')$   
 (tout triangle circonscrit à  $ABC$ , i.e.d. dont les côtés respectifs passent par  $A, B, C$ , est inscrit à  $A'B'C'$ , i.e.d. dont les côtés font des angles respectivement égaux avec ceux de  $A'B'C'$ , à ses sommets respectifs sur ces trois cercles  $\circ(C, B, H), \circ(A, C, H), \circ(B, A, H)$ , somme  $A'B'C'$ ).

Une médiane issue d'un sommet et le côté du triangle en vis-à-vis passant par ce sommet séparent harmoniquement les côtés adjacents à ce sommet:

$(A, BC | M_a B') = -1, \quad (B, CA | M_b C') = -1, \quad (C, AB | M_c A') = -1.$

Les points  $A', B', C'$  sont les points associés (voir p.17) à  $G$ :

$(A M_a | G A') = -1, \quad (B M_b | G B') = -1, \quad (C M_c | G C') = -1.$

Généralisation

Si le côté  $BC$ , au lieu d'être divisé en deux par le point  $M_a$ , est divisé en  $n$  parties égales par les points  $V_{a1}, V_{a2}, \dots, V_{a(n-1)}$ , les longueurs des abscisses  $v_{a1} = AV_{a1}, v_{a2} = AV_{a2}, \dots, v_{a(n-1)} = AV_{a(n-1)}$  sont données par

$v_{a1}^2 = \frac{1}{n} b^2 + \frac{n-1}{n} c^2 - \frac{n-1}{n^2} a^2, \quad v_{a2}^2 = \frac{2}{n} b^2 + \frac{n-2}{n} c^2 - \frac{2(n-2)}{n^2} a^2, \dots, \quad v_{a(n-1)}^2 = \frac{n-1}{n} b^2 + \frac{1}{n} c^2 - \frac{n-1}{n^2} a^2.$

Pour  $n=2$ , on retrouve bien la formule donnée plus haut pour  $g_a^2 (= AM_a^2)$ .  
 Bien entendu, ces résultats peuvent être transposés aux côtés  $CA$  et  $AB$  avec des abscisses itiques respectivement de  $B$  et de  $C$ .

Si en particulier  $n$  est en trois, au lieu de deux, que le côté  $BC$  est divisé, nous désignerons les points de division par  $V_{ab}$  et  $V_{ac}$  (1<sup>er</sup> indice: côté sur lequel le point se trouve, 2<sup>d</sup> indice: sommet le plus proche) correspondant respectivement à  $V_{a1}$  et  $V_{a2}$  ci-dessus, avec  $\overline{BV_{ab}} = \overline{V_{ab}V_{ac}} = \overline{V_{ac}C} = \frac{1}{3} a$  (et  $\overline{V_{ab}M_a} = \overline{M_aV_{ac}} = \frac{1}{6} a = \frac{1}{2} \overline{BV_{ab}} = \dots$ ) et nous poserons  $AV_{ab} \Rightarrow g_{ab}$  et  $AV_{ac} \Rightarrow g_{ac}$  correspondant à  $v_{a1}$  et  $v_{a2}$  ci-dessus.

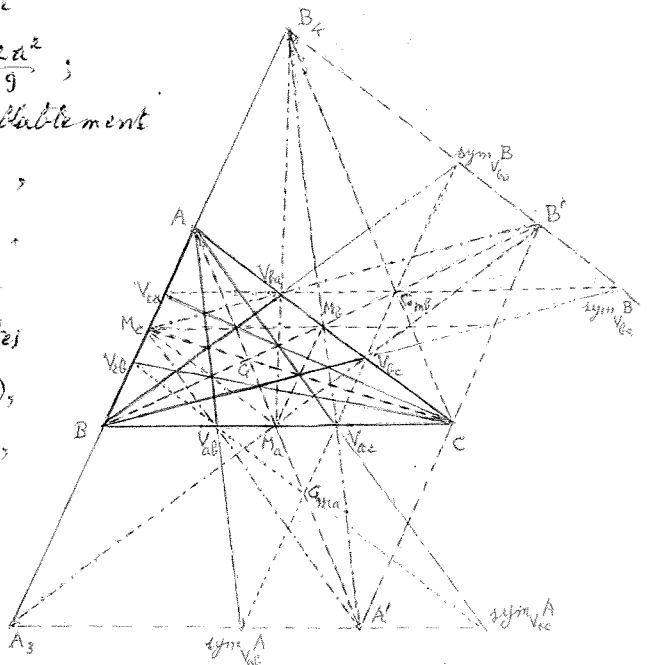
D'après les formules ci-dessus, on a  
 $g_{ab}^2 = \frac{b^2 + 2c^2}{3} - \frac{2a^2}{9}$  et  $g_{ac}^2 = \frac{2b^2 + c^2}{3} - \frac{2a^2}{9}$ ;

avec des notations analogues, on a semblablement

$g_{bc}^2 = \frac{c^2 + 2a^2}{3} - \frac{2b^2}{9}, \quad g_{ba}^2 = \frac{2c^2 + a^2}{3} - \frac{2b^2}{9},$   
 $g_{ca}^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3} - \frac{2c^2}{9}, \quad g_{cb}^2 = \frac{2a^2 + b^2}{3} - \frac{2c^2}{9}.$

Parmi les multiples propriétés dont jouissent les six abscisses ainsi introduites et leurs pieds  $V_{ab} = (\frac{2}{3}B, \frac{1}{3}C), V_{ac} = (\frac{1}{3}B, \frac{2}{3}C), V_{bc} = (\frac{2}{3}C, \frac{1}{3}A), V_{ba} = (\frac{1}{3}C, \frac{2}{3}A), V_{ca} = (\frac{2}{3}A, \frac{1}{3}B), V_{cb} = (\frac{1}{3}A, \frac{2}{3}B)$ , (voir figure ci-jointe), citons les suivantes:

$(g_{ab}, g_{ca}) \in g_a$  et plus précisément  
 $(g_{ab}, g_{ca}) = A_m$  (rappelons que



$A_m = \frac{1}{2}(M_c, M_b) = \frac{1}{2}(A, M_a)$ ,  $A_m = (g_a, g_b) = (g_a, g_c)$ ,  $(g_b, g_c) \in g_a$ ; sur  $g_{ab}$  par exemple,  
 $B_m V_{ab} = \frac{1}{4} g_{ab}$ ,  $\overline{AB}_m = 8 \overline{B_m V_{ab}} = \frac{2}{4} g_{ab}$ ,  $(g_{ab}, M_c M_b, V_{cb} V_{ba}, V_{ca} V_{ac}) = \frac{1}{2}(V_{cb}, V_{ba}) = (\frac{1}{3} A, \frac{2}{3} B_m)$ ,  
 $(g_{cb}, g_{ba}) \in g_c$ ,  $\overline{A(g_{ab}, g_{ba})} = \overline{A(g_{ab}, g_c)} = 4 \overline{(g_{ab}, g_{ca})} B_m = \frac{3}{5} g_{ab}$ ,  $(g_{ab}, g_{ba}, g_c, M_a V_{ca}, M_b V_{cb}) = (\frac{4}{5} M_c, \frac{1}{5} C)$ ,  
 $\overline{A(g_{ab}, g_{ca})} = \frac{4}{3} \overline{(g_{ab}, g_{ca})} B_m$ ,  $\overline{A(g_{ab}, g_{bc})} = 6 \overline{(g_{ab}, g_{bc})} V_{ab}$ ;  $g_{ab} \parallel M_b V_{ac}$ ,  $g_{ba} \parallel M_a V_{bc}$ ,  $g_{ac} \parallel M_c V_{ab}$ ,  $g_{ca} \parallel M_a V_{cb}$ ;  
 $(M_c V_{ab}, M_b V_{ac}) = A'$ ,  $(M_a V_{bc}, M_c V_{ba}) = B'$ ,  $(M_b V_{ca}, M_a V_{cb}) = C'$ ;  $V_{ab} A' \parallel g_{ac}$ ,  $V_{ac} A' \parallel g_{ab}$ , ...  
 $(g_{bc}, g_{ca}, M_b V_{ac})^*$ ,  $(g_{ba}, g_{cb}, M_c V_{ab})^*$ , ...;  $V_{ca} V_{ba} \parallel V_{cb} V_{bc} \parallel M_c M_b \parallel a$ ,  $\overline{V_{ca} V_{ba}} = \frac{1}{3} a$ ,  $\overline{V_{cb} V_{bc}} = \frac{2}{3} a$ ,  
 $V_{ab} V_{cb} \parallel V_{ac} V_{ca} \parallel M_a M_c \parallel b$ ,  $V_{ac} V_{bc} \parallel V_{ab} V_{ba} \parallel M_a M_b \parallel c$ , etc.,  $G = \frac{1}{2}(V_{cb}, V_{bc}) = \frac{1}{2}(V_{ac}, V_{ca}) = \frac{1}{2}(V_{ba}, V_{ab})$ ;  
 $\overline{A_m V_{ba} V_{ca}} = \text{hom}(A_m, -\frac{1}{3}) A_m BC$ ,  $\overline{A V_{ca} V_{ba}} = \text{hom}(A, \frac{1}{3}) ABC$ ,  $\overline{A V_{cb} V_{bc}} = \text{hom}(A, \frac{2}{3}) ABC$ ;  
 $\overline{A V_{ca} V_{ba}} = G V_{ca} V_{ca} = \dots = V_{cb} B V_{bc} = \dots = V_{ac} V_{bc} G = V_{bc} V_{ac} C = G_{ma} V_{ac} V_{ab} = G V_{ab} V_{ac} = \dots$ ;  
 $G_{ma} V_{ac} V_{ab} = \text{hom}(M_a, -\frac{1}{3}) ABC = \text{hom}(V_{ab}, -1) V_{cb} B V_{bc} = \text{hom}(V_{ac}, -1) V_{bc} V_{ac} C, \dots$ ;  
 $(g_{ab}, V_{ac} V_{bc}) \in A_3 A_4$ ,  $(g_{ac}, V_{ab} V_{cb}) \in A_3 A_4, \dots$ ;  $(M_a V_{bc}, M_b V_{ab}) = A_3$ ,  $(M_a V_{cb}, M_c V_{ac}) = A_4, \dots$ ;  
 $(a, V_{ca} V_{bc}) = \text{sym}_c V_{ac} \in A_4 B_4, \dots$ ;  $(V_{bc} V_{ac}, V_{ca} V_{ab}) = \text{sym}_{M_a} V_{ba} = \text{sym}_{G_{ma}} V_{ac} = (\frac{1}{3} B, \frac{2}{3} A') = (\frac{1}{3} B_3, \frac{2}{3} A_3) \in A' C'$ ,  
 $(V_{ab} V_{cb}, V_{ba} V_{ac}) = \text{sym}_{M_a} V_{ca} = \text{sym}_{G_{ma}} V_{ab} = (\frac{1}{3} C, \frac{2}{3} A') = (\frac{1}{3} C_4, \frac{2}{3} A_4) \in A' B'$ , ...;  
 $\overline{\text{sym}_{M_a} V_{ba} G_{ma}} = \overline{G_{ma} V_{ac}} = \overline{V_{ac} V_{bc}} = \frac{1}{3} c$ ,  $\overline{\text{sym}_{M_a} V_{ca} G_{ma}} = \overline{G_{ma} V_{ab}} = \overline{V_{ab} V_{cb}} = \frac{1}{3} b$ , ...;

$(M_a V_{bc}, C_m A_m, V_{cb} V_{bc})^*$ ,  $(M_a V_{ca}, A_m B_m, V_{bc} V_{cb})^*$ , ...; ...  
 $[(g_{ba}, V_{ac} V_{bc}), (C B_4, C_4 A), (V_{ac} V_{ba}, c), (V_{ab} V_{ca}, b), (B C_3, B_3 A), (g_{ca}, V_{ab} V_{cb})] \rightarrow$ , tous ces points étant sur  
une même parallèle à  $a$ , le premier et la dernière étant respectivement  $\in B_3 B_4$  et  $\in C_3 C_4$ ,  
le troisième et le quatrième respectivement  $\in B_3 C_3$  et  $\in B_4 C_4, \dots$ ;  
 $[(V_{ca} V_{ba}, V_{ab} V_{bc}), (g_{ba}, C B_4), (M_a V_{bc}, C_4 A), (V_{ac} V_{ba}, c), (g_{ca}, C_4 B_4)] \rightarrow$ , ces points, dont le premier  
est  $= \text{sym}_{M_b} V_{cb} = \text{sym}_{G_{mb}} V_{ba}$  et le deuxième  $= \frac{1}{2}(C, B_4)$ , étant tous  $\in B_3 C_3, \dots$ .  
 Notons que les points  $V_{ab} V_{ac}, \dots$  introduits ci-dessus peuvent être considérés comme les  
points segmentaires des transversales concourantes parallèles aux côtés (p. 21) dans le cas  
où le point de concours est  $G$ , la correspondance entre la présente notation et celle de  
la p. 21 étant  $V_{ab} = U_{3a}$ ,  $V_{ac} = U_{2a}$ ,  $V_{bc} = U_{1b}$ ,  $V_{ba} = U_{3b}$ ,  $V_{ca} = U_{2c}$ ,  $V_{cb} = U_{1c}$ , avec  $G = U$ . On a  
en effet  $V_{ab} V_{bc} \parallel a$  et  $G \in V_{cb} V_{bc}$ ,  $V_{ac} V_{ca} \parallel b$  et  $G \in V_{ac} V_{ca}$ ,  $V_{ba} V_{ab} \parallel c$  et  $G \in V_{ba} V_{ab}$ .

## Médiatrices, cercle circonscrit, droite d'Euler, triangle tangentiel

### Rappel

On appelle médiatrice  $m$  d'un segment de droite  $AB$  la perpendiculaire élevée au milieu de ce segment:  $(m, AB) = \frac{1}{2}(A, B)$  et  $m \perp AB$ . C'est le lieu des points situés à égale distance des extrémités de ce segment:

$$P \in m \rightarrow \overline{AP} = \overline{BP} \text{ et réciproquement.}$$

### Définition

Les médiatrices du triangle sont les trois médiatrices des côtés au sens qui vient d'être rappelé, soit

$$\perp(a, M_a) \Rightarrow m_a, \quad \perp(b, M_b) \Rightarrow m_b, \quad \perp(c, M_c) \Rightarrow m_c.$$

### Propriétés

$m_a \perp M_b M_c$ ,  $m_b \perp M_c M_a$ ,  $m_c \perp M_a M_b$ ,  
les médiatrices portent donc les hauteurs du triangle complémentaire.

$$\text{On a } (m_a, m_b, m_c) \ast$$

on pose  $(m_a, m_b, m_c) \Rightarrow O$  et on a  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ ;

$$\overline{OM_a} = \frac{1}{2} \overline{AH} = \overline{AE_a} = \frac{a}{2} |\cotg \hat{A}|,$$

$$\overline{OM_b} = \frac{1}{2} \overline{BH} = \overline{BE_b} = \frac{b}{2} |\cotg \hat{B}|,$$

$$\overline{OM_c} = \frac{1}{2} \overline{CH} = \overline{CE_c} = \frac{c}{2} |\cotg \hat{C}|,$$

= rayons respectifs des cercles eulériens (voir plus haut, p. 27),  
respectivement  $= HE_a, = HE_b, = HE_c$ .

Le point  $O$  est l'orthocentre du triangle complémentaire et celui-ci est le triangle pedaire de  $O$  (et le triangle anticomplémentaire est le triangle antipedaire de  $H$ ).

$$\text{On a de plus } OA \parallel M_a E_a, \quad OB \parallel M_b E_b, \quad OC \parallel M_c E_c.$$

### Angles pour un triangle acutangle

$$M_b \hat{O} M_c = \hat{B} + \hat{C} = 2dr. - \hat{A}, \quad M_c \hat{O} M_a = \hat{C} + \hat{A} = 2dr. - \hat{B}, \quad M_a \hat{O} M_b = \hat{A} + \hat{B} = 2dr. - \hat{C};$$

$$B \hat{O} M_a = M_a \hat{O} C = \hat{A}, \quad C \hat{O} M_b = M_b \hat{O} A = \hat{B}, \quad A \hat{O} M_c = M_c \hat{O} B = \hat{C};$$

$$B \hat{O} C = 2\hat{A}, \quad C \hat{O} A = 2\hat{B}, \quad A \hat{O} B = 2\hat{C};$$

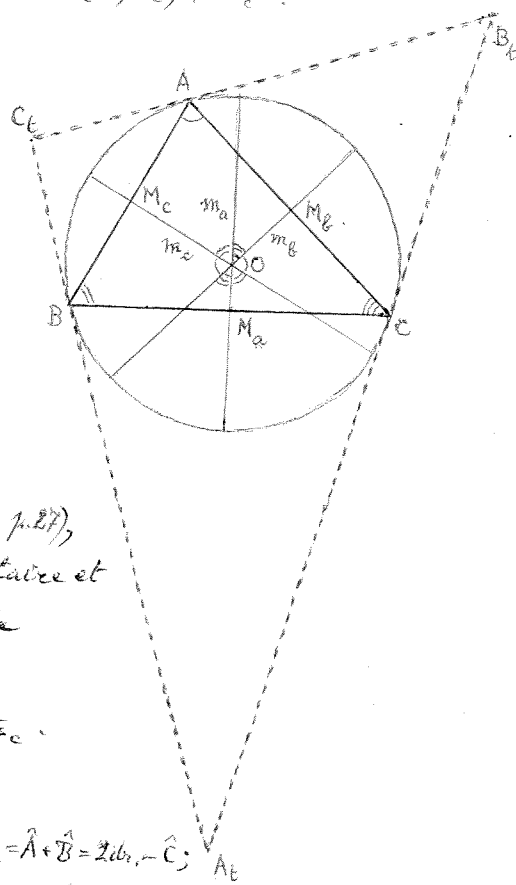
dans ce cas d'un triangle acutangle, le point  $O$  est donc celui d'où les côtés sont vus sous des angles proportionnels aux angles qui leur sont opposés dans le triangle; sur la figure, les angles en  $O$  sont désignés par un arc simple, double ou triple suivant qu'ils sont égaux à  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ou  $\hat{C}$  respectivement.

Angles des rayons  $OA, OB, OC$  avec les côtés:

$$M_a \hat{B} O = M_a \hat{C} O = 1dr. - \hat{A}, \quad M_b \hat{C} O = M_b \hat{A} O = 1dr. - \hat{B}, \quad M_c \hat{A} O = M_c \hat{B} O = 1dr. - \hat{C};$$

angles de ces rayons avec les hauteurs respectives:

$$H_a \hat{A} O = |\hat{B} - \hat{C}|, \quad H_b \hat{B} O = |\hat{C} - \hat{A}|, \quad H_c \hat{C} O = |\hat{A} - \hat{B}|.$$



Angles pour un triangle obtusangle

Dans l'hypothèse où c'est l'angle  $\hat{A}$  qui est  $> 1 dr.$ ,

$$\begin{aligned}
 M_b \hat{O} M_c &= \hat{B} + \hat{C} = 2 dr. - \hat{A}, & M_a \hat{O} M_c &= \hat{B}, & M_b \hat{O} M_a &= \hat{C}; \\
 M_a \hat{O} B &= C \hat{O} M_a = \hat{B} + \hat{C} = 2 dr. - \hat{A}, & C \hat{O} M_b &= M_b \hat{O} A = \hat{B}, & A \hat{O} M_c &= M_c \hat{O} B = \hat{C}; \\
 C \hat{O} B &= 2 \hat{B} + 2 \hat{C} = 2(2 dr. - \hat{A}), & C \hat{O} A &= 2 \hat{B}, & A \hat{O} B &= 2 \hat{C};
 \end{aligned}$$

angles des rayons OA, OB, OC avec les côtés:

$$M_a \hat{B} O = M_a \hat{C} O = \hat{A} - 1 dr., \quad M_b \hat{C} O = M_b \hat{A} O = 1 dr. - \hat{B}, \quad M_c \hat{A} O = M_c \hat{B} O = 1 dr. - \hat{C};$$

angles de ces rayons avec les hauteurs respectives:

$$H_a \hat{A} O = |\hat{B} - \hat{C}|, \quad H_b \hat{B} O = \hat{A} - \hat{C}, \quad H_c \hat{C} O = \hat{A} - \hat{B}.$$

Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit est le cercle  $\circ(A, B, C) \Rightarrow \mathcal{C}$  passant par les trois sommets du triangle. Son centre  $[o(A, B, C)] = \circ(\mathcal{C})$  est  $= (m_a, m_b, m_c) = O$ . Les médiatrices portent donc des diamètres de  $\mathcal{C}$ .

Rayon:  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow R$ , c'est d. que  $\mathcal{C} = \circ(O, R)$ .

La distance de O à l'axe orthique h (p.32) est donnée par  $dist_R O = \frac{1}{4}(\overline{OH} + \frac{3R^2}{\overline{OH}})$ .

Expressions donnant R:

$$\begin{aligned}
 2R &= \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{2(1 + \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C})}} \\
 &= \frac{abc}{2\sqrt{\mu(\mu-a)(\mu-b)(\mu-c)}} = \frac{2\mu}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{r}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}} \\
 &= \frac{2(\mu-a)}{\sin \hat{B} + \sin \hat{C} - \sin \hat{A}} = \dots = \frac{\mu-a}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2} \sin \frac{\hat{C}}{2}} = \dots \quad (+ \text{expressions analogues par permutation des lettres}) \\
 &= \frac{b+c}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}} = \dots = \frac{b-c}{2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}} = \dots \quad (\text{idem}) \\
 &= \frac{\overline{AH}}{|\cos \hat{A}|} = \frac{\overline{BH}}{|\cos \hat{B}|} = \frac{\overline{CH}}{|\cos \hat{C}|} = \frac{\overline{HH_a}}{|\cos \hat{B} \cos \hat{C}|} = \frac{\overline{HH_b}}{|\cos \hat{C} \cos \hat{A}|} = \frac{\overline{HH_c}}{|\cos \hat{A} \cos \hat{B}|} = \frac{\overline{HA'}}{2} = \frac{\overline{HB'}}{2} = \frac{\overline{HC'}}{2} \\
 &= \frac{h_a}{\sin \hat{B} \sin \hat{C}} = \frac{h_b}{\sin \hat{C} \sin \hat{A}} = \frac{h_c}{\sin \hat{A} \sin \hat{B}} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ca}{h_b} = \frac{ab}{h_c};
 \end{aligned}$$

si P est un point quelconque, dont les sommets du triangle pédalaise sont  $P'_a, P'_b, P'_c$  (p.14),

on a  $2R = \frac{a \cdot \overline{PA}}{P'_b P'_c} = \frac{b \cdot \overline{PB}}{P'_c P'_a} = \frac{c \cdot \overline{PC}}{P'_a P'_b};$

$\overline{OM_a} = dist_a O = R |\cos \hat{A}| = \frac{\overline{AH}}{2}, \quad \overline{OM_b} = dist_b O = R |\cos \hat{B}| = \frac{\overline{BH}}{2}, \quad \overline{OM_c} = dist_c O = R |\cos \hat{C}| = \frac{\overline{CH}}{2},$   
ces distances sont donc égales aux rayons de  $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$ :  $\overline{OM_a} = \overline{AE_a} = \overline{E_a H}, \quad \overline{OM_b} = \overline{BE_b} = \overline{E_b H}, \quad \overline{OM_c} = \overline{CE_c} = \overline{E_c H};$   
 $\overline{M_a H_a} = R \sin |\hat{B} - \hat{C}|, \quad \overline{M_b H_b} = R \sin |\hat{C} - \hat{A}|, \quad \overline{M_c H_c} = R \sin |\hat{A} - \hat{B}|.$

Il est à noter que les cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA et HAB ont le même rayon R. Leurs centres  $[o(H, B, C)], [o(H, C, A)]$  et  $[o(H, A, B)]$  sont aux points de concours de leurs médiatrices  $m_a \perp (HB, E_b)$  et  $\perp (HC, E_c)$  pour HBC,  $m_b \perp (HC, E_c)$  et  $\perp (HA, E_a)$  pour HCA,  $m_c \perp (HA, E_a)$  et  $\perp (HB, E_b)$  pour HAB.

Désignons par  $M_a, M_b, M_c$  les intersections, autres que  $M_a, M_b, M_c$  des médiatrices  $m_a, m_b, m_c$  avec le contour du triangle (coïncidant éventuellement avec  $A, B$  ou  $C$ , si le triangle est isocèle) et par  $M'_a, M'_b, M'_c$  les intersections avec les prolongements des autres côtés (même remarque); on a

$$\overline{OM'_a} \cdot \overline{OM''_a} = \overline{OM'_b} \cdot \overline{OM''_b} = \overline{OM'_c} \cdot \overline{OM''_c} = R^2.$$

Si on pose  $\overline{M_a M'_a} \Rightarrow m'_a$  et  $\overline{M'_a M''_a} \Rightarrow m''_a$ , si  $h_a = \frac{2m'_a m''_a}{m'_a + m''_a}$  (= moyenne harmonique de  $m'_a$  et  $m''_a$ ) et  $m''_a - m'_a = \frac{a}{2} |t_y \hat{B} - t_y \hat{C}| = \frac{2a^2 h_a |b^2 - c^2|}{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

On a aussi  $R_0 = \overline{M_a E_a} = \overline{M_b E_b} = \overline{M_c E_c}$  où  $E_a, E_b, E_c$  sont les points eulériens (p. 29).

Théorème de Nagel:  $OA \perp H_b H_c, OB \perp H_c H_a, OC \perp H_a H_b$ ;

on a de plus  $O = (AA_h, BB_h, CC_h)$ .

Si  $U_a, U_b, U_c$  sont les points segmentaires d'une transversale  $u$  (p. 19) et que  $U'_a, U'_b, U'_c$  sont les intersections avec  $\mathcal{C}$ , autres que  $A, B, C$ , respectivement de  $\|(u, A), \|(u, B), \|(u, C)$ , on a

$$(U_a U'_a, U_b U'_b, U_c U'_c)^* \quad \text{avec} \quad (U_a U'_a, U_b U'_b, U_c U'_c) \in \mathcal{C}.$$

On a aussi  $u \in H \rightsquigarrow (\text{sym}_a u, \text{sym}_b u, \text{sym}_c u)^*$  avec  $(\text{sym}_a u, \text{sym}_b u, \text{sym}_c u) \in \mathcal{C}$ .

Théorème de Thébault (propriété des points situés sur un des rayons  $OA, OB$  ou  $OC$  de  $\mathcal{C}$ ):  $P \in BA \rightsquigarrow H_a \in \circ(P'_a, P'_b, P'_c)$  où  $P'_a P'_b P'_c$  est le triangle podaire de  $P$  ( $P'_a = \text{proj}_a P, P'_b = \text{proj}_b P, P'_c = \text{proj}_c P$ ) et des énoncés analogues avec  $H_b$  ou  $H_c$  lorsque  $P \in OB$  ou  $P \in OC$  respectivement.

Distance entre  $G$  et  $O$ :  $\overline{GO}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ .

Les points  $P \in \perp(g_a, O)$  sont tels que  $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\overline{PA}^2$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Si  $A_g, B_g, C_g$  désignent les intersections (autres que  $A, B, C$ ) des médianes  $g_a, g_b, g_c$  (prolongées) avec  $\mathcal{C}$ , on a  $g_a \cdot \overline{AA_g} = \frac{b^2 + c^2}{2}, g_b \cdot \overline{BB_g} = \frac{c^2 + a^2}{2}, g_c \cdot \overline{CC_g} = \frac{a^2 + b^2}{2}$ , et  $\overline{AG} \cdot \overline{GA_g} = \overline{BG} \cdot \overline{GB_g} = \overline{CG} \cdot \overline{GC_g} = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = R^2 - \overline{OG}^2$ .

Pour un triangle acutangle,  $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ ; s'il est obtusangle,  $a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2$ .  $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - (\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2) = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 + 6R^2 - 2\overline{OH}^2, \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{OH}^2 + 3R^2$ .

Si  $H'_a, H'_b, H'_c$  désignent les intersections (autres que  $A, B, C$ ) des hauteurs  $h_a, h_b, h_c$  (prolongées) avec  $\mathcal{C}$ , on a  $H_a = \frac{1}{2}(H, H'_a), H_b = \frac{1}{2}(H, H'_b), H_c = \frac{1}{2}(H, H'_c)$ , c.à.d.  $H'_a = \text{sym}_{H_a} H, H'_b = \text{sym}_{H_b} H, H'_c = \text{sym}_{H_c} H$

(ou  $H'_a = \text{sym}_a H, H'_b = \text{sym}_b H, H'_c = \text{sym}_c H$ , ou encore  $H'_a = \text{sym}_a h_b, \text{sym}_a h_c, H'_b = \text{sym}_b h_a, \text{sym}_b h_c, H'_c = \text{sym}_c h_a, \text{sym}_c h_b$ );  $H'_a H'_b H'_c = \text{hom}(H, 2) H_a H_b H_c$ , donc

$H'_b H'_c \parallel H_b H_c, H'_c H'_a \parallel H_c H_a, H'_a H'_b \parallel H_a H_b, \overline{H'_a H'_b} = 2\overline{H_b H_c}, \overline{H'_b H'_c} = 2\overline{H_c H_a}, \overline{H'_c H'_a} = 2\overline{H_a H_b}$ , et les bissectrices (intérieures si  $ABC$  est acutangle) du triangle  $H'_a H'_b H'_c$  sont portées par  $h_a, h_b, h_c$  (comme les bissectrices du triangle orthique). On a  $\overline{AH} \cdot \overline{HH'_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH'_b} = \overline{CH} \cdot \overline{HH'_c}$ ;  $\overline{HH'_a} = 2\overline{H_a H'_a} = 2\overline{HH_a}, \overline{HH'_b} = 2\overline{H_b H'_b} = 2\overline{HH_b}, \overline{HH'_c} = 2\overline{H_c H'_c} = 2\overline{HH_c}$ .

On a de plus  $\frac{H_a H_b + H_b H_c}{H_b H_c} = \frac{AH_a}{AH}$  et deux relations semblables obtenues par permutation des lettres.

On peut noter aussi que si on considère le cercle  $\circ(HG)$ , les (secondes) intersections des hauteurs avec ce cercle sont les sommets d'un triangle inversement semblable (p.125) à ABC.

Autres propriétés:  $P \in \mathcal{C} \rightsquigarrow (H, \text{sym}_a P, \text{sym}_b P, \text{sym}_c P) -$   
 et cette droite porte les points  $(a, H_a'P), (b, H_b'P), (c, H_c'P);$

$P \in \mathcal{C} \rightsquigarrow \overline{PA} \cdot \text{dist}_a P = \overline{PB} \cdot \text{dist}_b P = \overline{PC} \cdot \text{dist}_c P$   
 (écrit avec les coordonnées normales  $\lambda, \mu, \nu$  de P:  $P \in \mathcal{C} \rightsquigarrow \overline{PA} \cdot \lambda = \overline{PB} \cdot \mu = \overline{PC} \cdot \nu$ ).

Si P est sur l'arc BC de  $\mathcal{C}$ , on a  $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = 2R \cdot \text{dist}_a P$   
 (ceci résulte de la relation  $2R = \frac{bc}{h_a}$  appliquée au triangle PBC, qui a alors le même cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  que ABC), ainsi que des théorèmes analogues si P est sur l'arc CA ou sur l'arc AB.

Les triangles  $AM_c M_b, M_c B M_a, M_b M_a C$  sont égaux au triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$ ; leurs cercles circonscrits, de rayon  $\frac{R}{2}$ , se coupent en O:  $O \in \circ(A, M_c, M_b), O \in \circ(M_c, B, M_a), O \in \circ(M_b, M_a, C)$ .

Appelons  $A_0, B_0, C_0$  les points diamétralement opposés à A, B, C sur  $\mathcal{C}$ :

$$\text{sym}_O A \Rightarrow A_0, \quad \text{sym}_O B \Rightarrow B_0, \quad \text{sym}_O C \Rightarrow C_0, \quad \text{c.a.d.}$$

$A_0 B_0 C_0 = \text{hom}(O, -1) ABC$  (d'où  $A_0 B_0 C_0 = ABC$ ) (et  $AB_0 \parallel BA_0 \parallel h_c, BC_0 \parallel CB_0 \parallel h_a, CA_0 \parallel AC_0 \parallel h_b,$   
 $A\hat{B}A_0 = A\hat{C}A_0 = 1 \text{ dr.}, B\hat{C}B_0 = B\hat{A}B_0 = 1 \text{ dr.}, C\hat{A}C_0 = C\hat{B}C_0 = 1 \text{ dr.}, A\hat{A}_0 C = \hat{B}, A\hat{A}_0 B = \hat{C}, \text{ etc.}$ ); on a

$$(A_0 E_a, B_0 E_b, C_0 E_c) \neq \text{ avec } (A_0 E_a, B_0 E_b, C_0 E_c) = G \text{ et } A_0 B_0 C_0 = \text{hom}(G, -2) E_a E_b E_c.$$

On a aussi  $H_a' = \text{sym}_{M_a} A_0, H_b' = \text{sym}_{M_b} B_0, H_c' = \text{sym}_{M_c} C_0$  et

$$M_a = \frac{1}{2}(H, A_0), M_b = \frac{1}{2}(H, B_0), M_c = \frac{1}{2}(H, C_0), \text{ c.a.d. } A_0 B_0 C_0 = \text{hom}(H, 2) M_a M_b M_c, \text{ et}$$

$$\overline{A \text{ proj}_{AA_0} M_a} = \frac{b^2 + c^2}{4R}, \quad \overline{B \text{ proj}_{BB_0} M_b} = \frac{c^2 + a^2}{4R}, \quad \overline{C \text{ proj}_{CC_0} M_c} = \frac{a^2 + b^2}{4R}; \quad P \in \mathcal{C} \rightsquigarrow [(a, PA_0), (b, PB_0), (c, PC_0), O] -;$$

$$P \in AA_0 \rightsquigarrow \text{proj}_a P \text{ proj}_c P \parallel a, \quad P \in BB_0 \rightsquigarrow \text{proj}_b P \text{ proj}_a P \parallel b, \quad P \in CC_0 \rightsquigarrow \text{proj}_c P \text{ proj}_b P \parallel c.$$

Signalons que le triangle dont les sommets sont  $H_a, \text{proj}_{AA_0} B, \text{proj}_{AA_0} C$  est inversement semblable (p.125) à ABC et que le centre de son cercle circonscrit est le milieu de BC:  $\bullet [O(H_a, \text{proj}_{AA_0} B, \text{proj}_{AA_0} C)] = M_a$  (+évidemment énoncés analogues par permutation des lettres).

Dans le cas d'un triangle acutangle, posons  $(a, AA_0) \Rightarrow A'_0, (b, BB_0) \Rightarrow B'_0, (c, CC_0) \Rightarrow C'_0$ ; dans ce cas, on a  $\frac{A'_0 A_0}{AA'_0} + \frac{B'_0 B_0}{BB'_0} + \frac{C'_0 C_0}{CC'_0} = 1$ .

Notons enfin que  $R > 3OG, = 3OG$  ou  $< 3OG$  suivant que le triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle respectivement.

Cercles centrés en O et tangents aux côtés

Posons  $\circ(O, \overline{OM_a}) \Rightarrow \mathcal{E}'_a, \circ(O, \overline{OM_b}) \Rightarrow \mathcal{E}'_b, \circ(O, \overline{OM_c}) \Rightarrow \mathcal{E}'_c$ ; étant donné que par suite de la définition de O, on a  $OM_a \perp a, OM_b \perp b, OM_c \perp c$ , il résulte des définitions de ces cercles que  $a \text{ tang } \mathcal{E}'_a, b \text{ tang } \mathcal{E}'_b, c \text{ tang } \mathcal{E}'_c$ , avec pour points de contact respectifs  $M_a, M_b, M_c$ .

En raison des valeurs respectives  $\overline{AE'_a} = \frac{1}{2} \overline{AH}, \overline{BE'_b} = \frac{1}{2} \overline{BH}, \overline{CE'_c} = \frac{1}{2} \overline{CH}$  données plus haut

pour  $\overline{OM}_a, \overline{OM}_b, \overline{OM}_c$ , les rayons de ces trois cercles  $\mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b, \mathcal{E}'_c$  sont égaux aux rayons des cercles eulériens  $\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$ , ce que nous indiquons par la notation utilisée.

Rayons en fonction de  $R$ : suivant des formules données un peu plus haut, ils valent

$$\overline{OM}_a = R |\cos \hat{A}|, \quad \overline{OM}_b = R |\cos \hat{B}|, \quad \overline{OM}_c = R |\cos \hat{C}| \quad \text{respectivement pour } \mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b, \mathcal{E}'_c$$

(et par suite respectivement pour  $\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$ ).

Propriété des tangentes menées des sommets de  $ABC$  aux cercles respectifs  $\mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b, \mathcal{E}'_c$ :

les points de contact des tangentes  $\text{tang}_a \mathcal{E}'_a$  sont l'un sur  $M_c M_a$  et l'autre sur  $M_a M_b$ ,

" " " " " " "  $\text{tang}_b \mathcal{E}'_b$  " " "  $M_a M_b$  " " "  $M_b M_c$ ,

" " " " " " "  $\text{tang}_c \mathcal{E}'_c$  " " "  $M_b M_c$  " " "  $M_c M_a$ .

### Autre propriété du point O

Si on cherche un point du plan tel que ses distances à  $A, B, C$  soient proportionnelles à trois nombres donnés, on trouve deux solutions. Or les deux points qui satisfont ainsi à la condition posée sont tels que la droite qu'ils déterminent passe par  $O$ .

Par exemple, les centres isodynamiques  $W$  et  $W'$  (voir plus loin, p. 85) sont les deux points tels que leurs distances à  $A, B, C$  sont respectivement proportionnelles à  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ; or on a bien  $(O, W, W')$ .

### Droite d'Euler

On a  $(H, G, O)$  — et cette droite est appelée droite d'Euler, que nous désignerons par  $e$ :

On a aussi  $\overline{GH} = 2 \overline{OG}$  et donc  $\overline{OG} = \frac{1}{3} \overline{OH}$ ;

$$\overline{OH}^2 = R^2 (1 - 8 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}) = 9 R^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$\text{dist}_a A + \text{dist}_b B + \text{dist}_c C = 0$  (les distances sont évidemment prises en valeurs algébriques).

Théorème de Lezeman: si  $d$  // droite d'Euler du triangle formé par les droites  $a, b, c$ , chacune de ces trois droites est // droite d'Euler du triangle formé par  $d$  et les deux autres droites.

Théorème de Cabot: si  $e$  est la droite d'Euler du triangle  $abc$ , les droites d'Euler des triangles  $bce, ace$  et  $abc$  forment un triangle égal à  $abc$  et dont la droite d'Euler coïncide avec  $e$ .

Nota: étant donné que  $(H, G, O)$  — et  $\overline{OG} = \frac{1}{3} \overline{OH}$ , si  $P$  est un point quelconque du plan, on déduit de la formule donnée plus haut pour  $\overline{g_a}^2 = \overline{AV_a}^2$  (le rôle de  $A$  étant ici joué par  $P$  et ceux de  $B, V_a$  et  $C$  respectivement par  $O, G$  et  $H$ ) que

$$\overline{PH}^2 + 2 \overline{PO}^2 - 3 \overline{PG}^2 = \frac{2}{3} \overline{OH}^2 = 6 \overline{OG}^2.$$

La droite d'Euler  $e$  porte non seulement l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit de  $ABC$ , mais aussi les mêmes points relatifs aux triangles complémentaires et anticomplémentaires. Ce sont respectivement:  $O$  et  $O_3$  (p. 49) pour le triangle complémentaire (avec  $\overline{GO} = 2 \overline{O_3 G}$ ),  $\text{sym}_c H$  et  $H$  pour le triangle anticomplémentaire (avec  $\overline{G \text{sym}_c H} = 2 \overline{HG}$ ).

Enfin, on a  $h \perp e$ , où  $h$  est l'axe orthique (p. 32).

### Triangle tangentiel

Soient,  $\mathcal{C}$  étant le cercle circonscrit,  $\text{tang}_a \mathcal{C} \Rightarrow t_a, \text{tang}_b \mathcal{C} \Rightarrow t_b, \text{tang}_c \mathcal{C} \Rightarrow t_c$ ,  $(t_c, t_b) \Rightarrow A_t, (t_a, t_c) \Rightarrow B_t, (t_b, t_a) \Rightarrow C_t$ . On a donc  $A_t = \text{pol}_{\mathcal{C}} a, B_t = \text{pol}_{\mathcal{C}} b, C_t = \text{pol}_{\mathcal{C}} c$ . Le triangle  $A_t B_t C_t$  est appelé triangle tangentiel du triangle  $ABC$  (en désignant

sur tout si ABC est acutangle, auquel cas le triangle tangentiel est circonscrit à E) et on a évidemment

$$A_t \in m_a, \quad B_t \in m_b, \quad C_t \in m_c,$$

$$(c.\hat{a}d. (O, M_a, A_t) - , (O, M_b, B_t) - , (O, M_c, C_t) - );$$

$$\overline{A_t C} = \overline{A_t B}, \quad \overline{B_t A} = \overline{B_t C}, \quad \overline{C_t B} = \overline{C_t A};$$

c'est le triangle orthopédal de O puisque  $OA \perp t_a, OB \perp t_b, OC \perp t_c$  et donc  $\text{proj}_{t_a} O = A, \text{proj}_{t_b} O = B, \text{proj}_{t_c} O = C$ ;

$$C\hat{A}_t B = 2 |1 \text{dr.} - \hat{A}|, \quad A\hat{B}_t C = 2 |1 \text{dr.} - \hat{B}|, \quad B\hat{C}_t A = 2 |1 \text{dr.} - \hat{C}|;$$

$$(A_t, B, O, C) \circ, \quad (B_t, C, O, A) \circ, \quad (C_t, A, O, B) \circ,$$

avec  $\circ(A_t, B, O, C) = \circ(OA_t), \circ(B_t, C, O, A) = \circ(OB_t), \circ(C_t, A, O, B) = \circ(OC_t)$ ;

$$\frac{\text{dist}_b A_t}{\text{dist}_a A_t} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\text{dist}_c B_t}{\text{dist}_a B_t} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\text{dist}_a C_t}{\text{dist}_b C_t} = \frac{a}{b};$$

$t_a \uparrow BAC \downarrow a, \quad t_b \uparrow CBA \downarrow b, \quad t_c \uparrow ACB \downarrow c$ , c.a.d. pour un triangle acutangle,  $C\hat{A}B_t = \hat{B}$  et  $C_t\hat{A}B = \hat{C}$ ,  $A\hat{B}C_t = \hat{C}$  et  $A_t\hat{B}C = \hat{A}$ ,  $B\hat{C}A_t = \hat{A}$  et  $B_t\hat{C}A = \hat{B}$ , (pour un triangle obtusangle en A, remplacer  $\hat{A}$  par  $2 \text{dr.} - \hat{A}$ ).

Les coordonnées normales absolues des sommets du triangle tangentiel sont pour  $A_t: -\frac{a}{2} \text{tg} \hat{A}, \frac{b}{2} \text{tg} \hat{A}, \frac{c}{2} \text{tg} \hat{A}$ , pour  $B_t: \frac{a}{2} \text{tg} \hat{B}, -\frac{b}{2} \text{tg} \hat{B}, \frac{c}{2} \text{tg} \hat{B}$ , pour  $C_t: \frac{a}{2} \text{tg} \hat{C}, \frac{b}{2} \text{tg} \hat{C}, -\frac{c}{2} \text{tg} \hat{C}$ .

Soient  $\|(t_a, A_t) \Rightarrow p_a, (p_a, b) \Rightarrow P_{ba}, (p_a, c) \Rightarrow P_{ca}$ ; on a

$$A_t = \frac{1}{2}(P_{ba}, P_{ca}), \quad P_{ca} \hat{B} P_{ba} = 1 \text{dr.}, \quad P_{ba} \hat{C} P_{ca} = 1 \text{dr.},$$

ainsi que des énoncés analogues par permutation des lettres.

Le triangle tangentiel est homothétique au triangle orthique:  $H_a H_b H_c = \text{hom } A_t B_t C_t$ , on a  $t_a \parallel H_b H_c, t_b \parallel H_c H_a, t_c \parallel H_a H_b$  (conséquence du théorème de Miquel) (et par suite,  $t_a \parallel H'_b H'_c, t_b \parallel H'_c H'_a, t_c \parallel H'_a H'_b$ );  $t_a \perp M_a E_a, t_b \perp M_b E_b, t_c \perp M_c E_c$ ; on a aussi  $(A_t H_a, B_t H_b, C_t H_c) *$  et le point de concours  $(A_t H_a, B_t H_b, C_t H_c) \Rightarrow H_t$ , qui est le centre d'homothétie de  $H_a H_b H_c$  et  $A_t B_t C_t$  est sur la droite d'Euler:  $H_t \in e$  et on a  $H_t = \text{pol}_e h$  où  $h$  est l'axe orthique (p. 32).

On a d'autre part

$$P \in \mathcal{E} \rightsquigarrow \left\{ \text{dist}_{t_a} P = \frac{\text{dist}_b P \cdot \text{dist}_c P}{\text{dist}_a P}, \quad \text{dist}_{t_b} P = \frac{\text{dist}_c P \cdot \text{dist}_a P}{\text{dist}_b P}, \quad \text{dist}_{t_c} P = \frac{\text{dist}_a P \cdot \text{dist}_b P}{\text{dist}_c P} \right\},$$

d'où  $P \in \mathcal{E} \rightsquigarrow \text{dist}_{t_a} P \cdot \text{dist}_{t_b} P \cdot \text{dist}_{t_c} P = \text{dist}_a P \cdot \text{dist}_b P \cdot \text{dist}_c P$ ,

$$\text{et } P \in \mathcal{E} \rightsquigarrow \left\{ \text{dist}_a P = \sqrt{\text{dist}_{t_b} P \cdot \text{dist}_{t_c} P}, \quad \text{dist}_b P = \sqrt{\text{dist}_{t_c} P \cdot \text{dist}_{t_a} P}, \quad \text{dist}_c P = \sqrt{\text{dist}_{t_a} P \cdot \text{dist}_{t_b} P} \right\}.$$

On a aussi  $P \in \mathcal{E} \rightsquigarrow \{(P_b, P_c, A_t) -, (P_c, P_a, B_t) -, (P_a, P_b, C_t) -\}$  où  $P_a, P_b, P_c$  sont les sommets du triangle pédal de P (p. 14):  $(AP, a) \Rightarrow P_a, (BP, b) \Rightarrow P_b, (CP, c) \Rightarrow P_c$ .

Enfin, on a  $[(t_a, a), (t_b, b), (t_c, c)] -$  (droite de Lemoine =  $\text{pol}_e L$ : voir plus loin p. 79) et  $(AA_t, BB_t, CC_t) *$  (point de Lemoine L: p. 77). Les triangles ABC et  $A_t B_t C_t$  sont donc homologues (p. 124).



Segment déterminé sur un côté de  $ABC$  par une parallèle à  $t_a$ ,  $t_b$  ou  $t_c$  menée par le sommet opposé à ce côté:  $A(\|(t_a, B), b) = \frac{c^2}{b}$ ,  $A(\|(t_a, C), c) = \frac{b^2}{c}$  (dans les expressions du premier membre,  $\|(t_a, \dots)$  peut évidemment être remplacé par  $\perp(OA, \dots)$ , puisque  $t_a \perp OA$ ), + relations analogues obtenues par permutation des lettres.

Notons enfin les propriétés suivantes:

$M_a \text{ proj}_b A_t \perp c$ ,  $M_a \text{ proj}_c A_t \perp b$ ,  $M_b \text{ proj}_c B_t \perp a$ ,  $M_b \text{ proj}_a B_t \perp c$ ,  $M_c \text{ proj}_a C_t \perp b$ ,  $M_c \text{ proj}_b C_t \perp a$ ;  
 $\text{dist}_b A_t = \overline{M_a \text{ proj}_c A_t}$ ,  $\text{dist}_c A_t = \overline{M_a \text{ proj}_b A_t}$ ,  $\text{dist}_c B_t = \overline{M_b \text{ proj}_a B_t}$ , etc.

Pieds des médianes et pieds des hauteurs, cercle des neuf points

Première propriété

$$\overline{M_a H_b} = \overline{M_a H_c} = \frac{a}{2}, \quad \overline{M_b H_c} = \overline{M_b H_a} = \frac{b}{2}, \quad \overline{M_c H_a} = \overline{M_c H_b} = \frac{c}{2};$$

$$(B, H_c, H_b, C) \circ, \quad (C, H_a, H_c, A) \circ, \quad (A, H_b, H_a, B) \circ,$$

avec  $\circ [ \circ (B, H_c, H_b, C) ] = M_a, \quad \circ [ \circ (C, H_a, H_c, A) ] = M_b, \quad \circ [ \circ (A, H_b, H_a, B) ] = M_c;$

$$H_c H_b \uparrow BAC \downarrow BC, \quad H_a H_c \uparrow CBA \downarrow CA, \quad H_b H_a \uparrow ACB \downarrow AB.$$

On a aussi  $(M_a E_a, M_b E_b, M_c E_c) \circ$  (voir ces-droites  $\mathcal{O}_g$ ).

Autres relations et propriétés

$$\overline{AM_b} \cdot \overline{AH_b} = \overline{AM_c} \cdot \overline{AH_c}, \quad \overline{BM_c} \cdot \overline{BH_c} = \overline{BM_a} \cdot \overline{BH_a}, \quad \overline{CM_a} \cdot \overline{CH_a} = \overline{CM_b} \cdot \overline{CH_b};$$

$$\overline{M_a H_a} = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}, \quad \overline{M_b H_b} = \frac{|c^2 - a^2|}{2b}, \quad \overline{M_c H_c} = \frac{|a^2 - b^2|}{2c}.$$

Obte: une conséquence de la relation  $\overline{M_a H_a} = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$  est que le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances  $\overline{AB} = c$  et  $\overline{AC} = b$  à deux points fixes B et C soit = une droite perpendiculaire à BC et à une distance  $\frac{k^2}{2BC}$  du milieu de BC.

$$\text{dist}_{H_b H_c} M_a = \frac{a}{2} \sin \hat{A}, \quad \text{dist}_{H_c H_a} M_b = \frac{b}{2} \sin \hat{B}, \quad \text{dist}_{H_a H_b} M_c = \frac{c}{2} \sin \hat{C}.$$

$$\overline{HH_a} \cdot \overline{OM_a} = \overline{HH_b} \cdot \overline{OM_b} = \overline{HH_c} \cdot \overline{OM_c} = \frac{1}{2} R^2 \cos \hat{A}, \cos \hat{B}, \cos \hat{C};$$

$$GOM_a = \text{hom}(G, -\frac{1}{2}) GHA, \quad GOM_b = \text{hom}(G, -\frac{1}{2}) GHB, \quad GOM_c = \text{hom}(G, -\frac{1}{2}) GHC;$$

$$M_b M_c \perp h_a, \quad M_c M_a \perp h_b, \quad M_a M_b \perp h_c;$$

$$M_b E_c \perp a, \quad M_c E_b \perp a, \quad M_c E_c \perp b, \quad M_a E_c \perp b; \quad M_a E_b \perp c, \quad M_b E_a \perp c;$$

$$E_a H_b \perp M_a H_b, \quad E_a H_c \perp M_a H_c, \quad E_b H_c \perp M_b H_c, \quad E_b H_a \perp M_b H_a, \quad E_c H_a \perp M_c H_a, \quad E_c H_b \perp M_c H_b,$$

d'où  $E_a H_b$  et  $E_a H_c$  tang  $\circ(BC)$ ,  $E_b H_c$  et  $E_b H_a$  tang  $\circ(CA)$ ,  $E_c H_a$  et  $E_c H_b$  tang  $\circ(AB)$ ,

$$M_a H_b \text{ tang } \mathcal{E}_a, \quad M_a H_c \text{ tang } \mathcal{E}_a, \quad M_b H_c \text{ tang } \mathcal{E}_b, \quad M_b H_a \text{ tang } \mathcal{E}_b, \quad M_c H_a \text{ tang } \mathcal{E}_c, \quad M_c H_b \text{ tang } \mathcal{E}_c,$$

avec  $(\mathcal{E}_a, M_a H_b) = H_b, (\mathcal{E}_a, M_a H_c) = H_c, (\mathcal{E}_b, M_b H_c) = H_c, (\mathcal{E}_b, M_b H_a) = H_a, (\mathcal{E}_c, M_c H_a) = H_a, (\mathcal{E}_c, M_c H_b) = H_b;$

$$M_b M_c \uparrow BAC \downarrow H_b H_c, \quad M_c M_a \uparrow CBA \downarrow H_c H_a, \quad M_a M_b \uparrow ACB \downarrow H_a H_b.$$

Dans un triangle acutangle,  $H_a \hat{M}_b M_a = H_a \hat{M}_c M_a = H_a \hat{H}_b M_a = H_a \hat{H}_c M_a = |\hat{B} - \hat{C}|$ , etc.;

si  $\hat{B} > 180$ ,  $H_a \hat{M}_b M_a = H_a \hat{M}_c M_a = H_a \hat{H}_b M_a = 2 \text{ dir.} - H_a \hat{H}_c M_a = |\hat{B} - \hat{C}|$ , etc.

On a aussi  $\text{proj}_{E_b E_c} M_b = E_c, \text{proj}_{E_b E_c} M_c = E_b, \text{proj}_{E_c E_a} M_c = E_a, \text{proj}_{E_c E_a} M_a = E_c, \text{proj}_{E_a E_b} M_a = E_b, \text{proj}_{E_a E_b} M_b = E_a,$

$$\text{proj}_{M_b M_c} E_b = M_c, \text{proj}_{M_b M_c} E_c = M_b, \text{proj}_{M_c M_a} E_c = M_a, \text{proj}_{M_c M_a} E_a = M_c, \text{proj}_{M_a M_b} E_a = M_b, \text{proj}_{M_a M_b} E_b = M_a.$$

Cercle des neuf points

On a  $(M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b, E_c) \circ$ .

et on pose  $\circ(M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b, E_c) \Rightarrow \mathcal{O}_g;$

ce cercle est circonscrit à la fois au triangle complémentaire et au triangle orthique, ainsi qu'au triangle d'Euler, comme on appelle parfois le triangle  $E_a E_b E_c$  (p. 27); il est appelé cercle des neuf points. Il est parfois aussi appelé, à tort, cercle d'Euler pour rappeler qu'il passe par les points eulériens (et son centre est sur la droite d'Euler), mais il ne faut pas le confondre avec les cercles eulériens, qui ont les points d'Euler pour centres. Il est aussi appelé cercle de Steiner, ce mathématicien ayant établi que ce cercle est tangent au cercle inscrit et aux cercles excinscrits (voir plus loin).

Posons  $\circ(E_9) \Rightarrow O_9$ , on a  $O_9 \in OGH = e$  (droite d'Euler; p. 45) et plus précisément  $O_9 = \frac{1}{2}(O, H)$ , donc  $\overrightarrow{OO_9} = \overrightarrow{O_9H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$  et  $\overrightarrow{GO_9} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OH}$ ;  $O_9$  est le centre des moyennes distances des quatre points  $A, B, C, H$ :

$$\overrightarrow{OO_9} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}), \quad \overrightarrow{O_9A} + \overrightarrow{O_9B} + \overrightarrow{O_9C} + \overrightarrow{O_9H} = \vec{0}.$$

On peut écrire  $E_9 = \text{hom}(H, \frac{1}{2})E$  (et par suite,  $P \in E \rightarrow \frac{1}{2}(H, P) \in E_9$ ) comme aussi  $E_9 = \text{hom}(G, -\frac{1}{2})E$ , et son rayon est donc  $\frac{R_0}{2}$ :  $E_9 = \circ(O_9, \frac{R_0}{2})$ .

Pour un triangle acutangle,  $E_9$  est intérieure à  $E$ , tandis que pour un triangle obtusangle, ces deux cercles sont sécants. Rappelons que l'axe radical de  $E$  et  $E_9$  est l'axe orthique  $h$  (p. 32).

De même que  $O_9$  est le centre du cercle  $E_9$  circonscrit au triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$ , le point  $H$ , orthocentre de  $ABC$ , est le centre du cercle circonscrit au triangle anticomplémentaire  $A'B'C'$  (dont le rayon est  $2R_0$ ), puisque  $h_a, h_b, h_c$  sont sur les médianes du triangle anticomplémentaire,

On a aussi  $O_9 = \frac{1}{2}(M_a, E_a) = \frac{1}{2}(M_b, E_b) = \frac{1}{2}(M_c, E_c)$ , c.à.d. que  $M_a E_a, M_b E_b, M_c E_c$  sont des diamètres de  $E_9$  et  $\overline{M_a E_a} = \overline{M_b E_b} = \overline{M_c E_c} = R_0$ ;  $M_a E_a \parallel OA, M_b E_b \parallel OB, M_c E_c \parallel OC$  et par suite  $M_a E_a \perp H_b H_c, M_b E_b \perp H_c H_a, M_c E_c \perp H_a H_b$ ;

$\text{proj}_a O_9 = \frac{1}{2}(M_a, H_a), \text{proj}_b O_9 = \frac{1}{2}(M_b, H_b), \text{proj}_c O_9 = \frac{1}{2}(M_c, H_c)$  et si  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} + \hat{B}$ , on a  $O_9 \in c$  avec  $O_9 = \frac{1}{2}(M_c, H_c)$  en accord avec  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} + \hat{B} \rightarrow E_c = H_b$ ; de même, si  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} + \hat{C}$ , on a  $O_9 \in b$  avec  $O_9 = \frac{1}{2}(M_b, H_b)$  puisque  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} + \hat{C} \rightarrow E_b = H_c$ ; plus particulièrement encore, pour un triangle tel que  $\hat{A} = \frac{2}{3} \text{ dr.} = 120^\circ$  et  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{1}{3} \text{ dr.} = 30^\circ$  (c'est le tiers d'un triangle équilatéral, c.à.d. celui dont les sommets sont le centre d'un triangle équilatéral et deux de ses sommets), on a à la fois  $O_9 \in b$  et  $O_9 \in c$ , donc  $O_9 = A$ .

L'homologue de  $E_9$  dans l'homothétie  $A_1 B_1 C_1 = \text{hom}(H_a, H_b, H_c)$  est le cercle  $\circ(A_1, B_1, C_1)$  circonscrit au triangle tangentiel; étant donné que le centre  $H_c$  de cette homothétie est sur la droite d'Euler ( $H_c \in e$ , p. 46), de même que  $O_9$ , on a aussi  $\circ(A_1, B_1, C_1) \in e$ . On a  $\text{tang}_{A_1} E_9 \parallel t_a, \text{tang}_{B_1} E_9 \parallel t_b, \text{tang}_{C_1} E_9 \parallel t_c$ , c.à.d.  $\text{tang}_{A_1} E_9 \perp BAC \downarrow a, \text{tang}_{B_1} E_9 \perp CBA \downarrow b, \text{tang}_{C_1} E_9 \perp ACB \downarrow c$ .

Théorème de Brocard:  $O_9$  est l'orthocentre du triangle dont les sommets sont  $(M_B M_C, H_B H_C)$ ,  $(M_C M_A, H_C H_A)$ ,  $(M_A M_B, H_A H_B)$ .

Avec:  $\widehat{M_A H_A} = 2|\hat{B} - \hat{C}|$ ,  $\widehat{M_B H_B} = 2|\hat{C} - \hat{A}|$ ,  $\widehat{M_C H_C} = 2|\hat{A} - \hat{B}|$ ,  
si les arcs sont pris en valeurs algébriques, on a  $\widehat{M_A H_A} + \widehat{M_B H_B} + \widehat{M_C H_C} = 0$ .

Enfin,  $\mathcal{C}_9$  est aussi le cercle des neuf points des triangles  $HBC$ ,  $HCA$ ,  $HAB$  (et les cercles circonscrits à ces trois triangles ont pour rayon  $R_0$  comme celui de  $ABC$ , comme noté p. 42).

#### Note

À propos des points eulériens  $E_a, E_b, E_c$ , pour lesquels passe  $\mathcal{C}_9$ , on peut signaler que concernant les points  $A_m, B_m, C_m$  qui sont à la fois les milieux des médianes et les milieux des côtés du triangle complémentaire, on a  $(O, A_m, E_a) \sim$ ,  $(O, B_m, E_b) \sim$ ,  $(O, C_m, E_c) \sim$  et plus précisément même  $A_m = \frac{1}{2}(O, E_a)$ ,  $B_m = \frac{1}{2}(O, E_b)$ ,  $C_m = \frac{1}{2}(O, E_c)$ .

## Bissectrices, cercle inscrit et cercles exinscrits, trissectrices

### Bissectrices intérieures

Une bissectrice (intérieure) est une sécante portée par la bissectrice d'un des angles du triangle. Elles sont désignées par  $i_a, i_b, i_c$ , c.à.d. qu'on pose

$$\frac{1}{2}(AB, AC) \Rightarrow i_a, \quad \frac{1}{2}(BC, BA) \Rightarrow i_b, \quad \frac{1}{2}(CA, CB) \Rightarrow i_c$$

et leurs pieds sont  $(a, i_a) \Rightarrow D_a, (b, i_b) \Rightarrow D_b, (c, i_c) \Rightarrow D_c$ .

Nota: la bissectrice de l'angle opposé à l'un des angles du triangle, donc dans un des combles de celui-ci, est portée par la même droite que la bissectrice de cet angle; elles sont dans la prolongement l'une de l'autre, comme c'est toujours le cas pour des angles opposés.

Longueurs:  $h_a \leq i_a \leq q_a$  (les égalités n'ayant lieu que si le triangle est isocèle avec  $b=c$ ) et des énoncés analogues avec des indices  $b$  ou  $c$  à la place de  $a$ .  
On a aussi  $b > c$  (c.à.d.  $\hat{B} > \hat{C}$ )  $\Rightarrow i_b < i_c$  et réciproquement (et des énoncés analogues par permutation des lettres).

$$i_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{2\sqrt{bc}p(p-a)}{b+c}, \quad i_b = \frac{2ca}{c+a} \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{2\sqrt{ca}p(p-b)}{c+a}, \quad i_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\hat{C}}{2} = \frac{2\sqrt{ab}p(p-c)}{a+b}$$

$$i_a = a \frac{\sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \cdot \cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}, \quad i_b = b \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin \hat{A}}{\sin \hat{B} \cdot \cos \frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}}, \quad i_c = c \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{C} \cdot \cos \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$$

(Nota: si nous désignons par  $i'_a$  la sécante isotomique (p.15) de  $i_a$ , c.à.d. la sécante dont le pied est le point isotomique de  $D_a$ , on a  $i'^2_a = i^2_a + (b-c)^2$  et des formules analogues pour les sécantes  $i'_b$  et  $i'_c$  isotomiques de  $i_b$  et  $i_c$ . Ces sécantes  $i'_a, i'_b, i'_c$  isotomiques respectives de  $i_a, i_b, i_c$  sont parfois appelées antibissectrices.)

Première propriété:  $(i_a, i_b, i_c)^*$ ,

on pose  $(i_a, i_b, i_c) \Rightarrow I$ ,

c'est le point intérieur au triangle également distant des trois côtés:

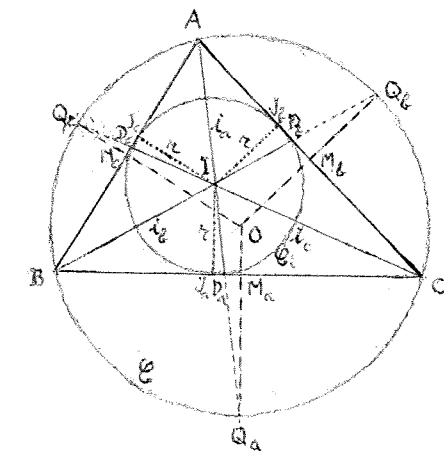
$$\text{dist}_a I = \text{dist}_b I = \text{dist}_c I$$

$$\overline{AI} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} = \frac{p-a}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2},$$

$$\overline{BI} = \sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}} = \frac{p-b}{\cos \frac{\hat{B}}{2}} = 4R \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2},$$

$$\overline{CI} = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}} = \frac{p-c}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} = 4R \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2};$$

$$\frac{\overline{D_a I}}{\overline{AI}} = \frac{a}{b+c}, \quad \frac{\overline{D_b I}}{\overline{BI}} = \frac{b}{c+a}, \quad \frac{\overline{D_c I}}{\overline{CI}} = \frac{c}{a+b};$$



$$\frac{\overline{D_a I}}{i_a} = \frac{a}{2p}, \quad \frac{\overline{D_b I}}{i_b} = \frac{b}{2p}, \quad \frac{\overline{D_c I}}{i_c} = \frac{c}{2p}.$$

angles:  $\text{ang}(c, i_a) = \text{ang}(i_a, b) = \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $\text{ang}(a, i_b) = \text{ang}(i_b, c) = \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $\text{ang}(b, i_c) = \text{ang}(i_c, a) = \frac{\hat{C}}{2}$ ;  
 $A\hat{D}_a B = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $C\hat{D}_a A = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $B\hat{D}_b C = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $A\hat{D}_b B = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $C\hat{D}_b A = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2}$ ,  $B\hat{D}_c C = \hat{A} + \frac{\hat{C}}{2}$ ;  
 $\text{ang}(i_c, i_a) = B\hat{I}C = 1 \text{ dr.} + \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $\text{ang}(i_c, i_b) = C\hat{I}A = 1 \text{ dr.} + \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $\text{ang}(i_a, i_b) = A\hat{I}B = 1 \text{ dr.} + \frac{\hat{C}}{2}$ ;  
 $B\hat{I}D_a = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{C}}{2}$ ,  $D_a\hat{I}C = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $C\hat{I}D_b = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $D_b\hat{I}A = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{C}}{2}$ ,  $A\hat{I}D_c = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $D_c\hat{I}B = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{A}}{2}$ .

$$i_a = \frac{1}{2}(AH_a, AO), \quad i_b = \frac{1}{2}(BH_b, BO), \quad i_c = \frac{1}{2}(CH_c, CO),$$

c'est-à-d. que  $i_a, i_b, i_c$  sont aussi les bissectrices des angles  $H_aAO, H_bBO, H_cCO$ ,

$$\text{ang}(h_a, i_a) = \text{ang}(i_a, AO) = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}, \quad \text{ang}(h_b, i_b) = \text{ang}(i_b, BO) = \frac{|\hat{C} - \hat{A}|}{2}, \quad \text{ang}(h_c, i_c) = \text{ang}(i_c, CO) = \frac{|\hat{A} - \hat{B}|}{2},$$

d'où  $i_a = \frac{h_a}{\cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}}$ ,  $i_b = \frac{h_b}{\cos \frac{\hat{C} - \hat{A}}{2}}$ ,  $i_c = \frac{h_c}{\cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}$ ;

$$i_a \perp \frac{1}{2}(a, t_a), \quad i_b \perp \frac{1}{2}(b, t_b), \quad i_c \perp \frac{1}{2}(c, t_c).$$

Positions des pieds:  $\frac{\overline{BD_a}}{\overline{CD_a}} = \frac{c}{b}$ ,  $\frac{\overline{CD_b}}{\overline{AD_b}} = \frac{a}{c}$ ,  $\frac{\overline{AD_c}}{\overline{BD_c}} = \frac{b}{a}$

(les rapports de section sont négatifs, mais sont considérés ici en valeurs absolues)  
 et la réciproque est vraie:  $\frac{\overline{BD_a}}{\overline{CD_a}} = \frac{c}{b}$  avec  $D_a$  entre  $B$  et  $C \rightarrow AD_a = \frac{1}{2}(AB, AC)$ , etc.

$$\overline{BD_a} = \frac{ca}{b+c}, \quad \overline{CD_a} = \frac{ab}{b+c}, \quad \overline{CD_b} = \frac{ab}{c+a}, \quad \overline{AD_b} = \frac{bc}{c+a}, \quad \overline{AD_c} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{BD_c} = \frac{ca}{a+b};$$

$$\overline{BD_a} \cdot \overline{CD_a} = bc - i_a^2, \quad \overline{CD_b} \cdot \overline{AD_b} = ca - i_b^2, \quad \overline{AD_c} \cdot \overline{BD_c} = ab - i_c^2;$$

$$M_a \overline{D_a} = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}, \quad M_b \overline{D_b} = \frac{b|c-a|}{2(c+a)}, \quad M_c \overline{D_c} = \frac{c|a-b|}{2(a+b)}$$

(et  $M_a \overline{H_a} \cdot M_a \overline{D_a} = \frac{1}{4}(b-c)^2$ ,  $M_b \overline{H_b} \cdot M_b \overline{D_b} = \frac{1}{4}(c-a)^2$ ,  $M_c \overline{H_c} \cdot M_c \overline{D_c} = \frac{1}{4}(a-b)^2$ ,  
 car  $M_a \overline{H_a} = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$ ,  $M_b \overline{H_b} = \frac{|c^2 - a^2|}{2b}$ ,  $M_c \overline{H_c} = \frac{|a^2 - b^2|}{2c}$ ).

Notons que si on pose  $(a, t_a) \Rightarrow F_a$ ,  $(b, t_b) \Rightarrow F_b$ ,  $(c, t_c) \Rightarrow F_c$  (cf. cercles d'Apollonios, p. 69),  
 on a aussi  $\overline{F_a A} = \overline{F_a D_a}$ ,  $\overline{F_b B} = \overline{F_b D_b}$ ,  $\overline{F_c C} = \overline{F_c D_c}$ .

Si sur  $AB$  et  $AC$  on prend respectivement, du côté opposé à  $A$ , des longueurs  $\overline{BB_{bc}} = \overline{BC}$  et  $\overline{CC_{bc}} = \overline{BC}$ , on obtient des points  $B_{bc}$  et  $C_{bc}$  qui sont tels que  $B_{bc}C_{bc} \parallel D_c D_b$ ,  $B_{bc}C \parallel i_b$ ,  $C_{bc}B \parallel i_c$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Soient  $d_{ac}$  et  $d_{bc}$  les parallèles à  $b$  et à  $c$  menées par  $D_a$ :  $\|(b, D_a) \Rightarrow d_{ab}$ ,  
 $\|(c, D_a) \Rightarrow d_{ac}$ ; le quadrilatère  $A(d_{ac}, c)D_a(d_{ac}, b)$  est un losange, dont le côté  $a$  pour longueur  $\frac{bc}{b+c}$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres),

Soit  $g_a$  la parallèle à  $i_a$  menée par le milieu de  $BC$ :  $\|(i_a, M_a) \Rightarrow g_a$ ;  
 on a  $A(b, g_a) = A(c, g_a) = \frac{|b-c|}{2}$ ,  $B(c, g_a) = C(b, g_a) = \frac{b+c}{2}$  et des théorèmes analogues par permutation des lettres.

Soient  $D_{ab}$  et  $D_{ac}$  les points en lesquels la perpendiculaire à  $i_a$  en  $D_a$ ,  $\perp(i_a, D_a)$ ,  
 rencontre les côtés  $b$  et  $c$ :  $(\perp(i_a, D_a), b) \Rightarrow D_{ab}$  et  $(\perp(i_a, D_a), c) \Rightarrow D_{ac}$ ; la

distance commune de ces points au sommet A est moyenne harmonique entre b et c:  $\frac{2}{AD_b} = \frac{2}{AD_c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Enfin si  $I_{ab}$  et  $I_{ac}$  sont les intersections respectivement avec AB et AC d'une parallèle à BC menée par I, on a  $\overline{I_{ab}I_{ac}} = \overline{BI_{ab}} + \overline{CI_{ac}}$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Autres propriétés: posons  $(i_a, m_a) \Rightarrow Q_a$ ,  $(i_b, m_b) \Rightarrow Q_b$ ,  $(i_c, m_c) \Rightarrow Q_c$ , on a  $Q_a \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{BQ_a} = \widehat{CQ_a}$ ,  $Q_b \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{CQ_b} = \widehat{AQ_b}$ ,  $Q_c \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{AQ_c} = \widehat{BQ_c}$ ;

$$\begin{aligned} Q_b \widehat{Q_a} Q_c &= Q_b \widehat{CI} = Q_c \widehat{BI} = \frac{B+C}{2} = 1 \text{ dr. } - \frac{\widehat{A}}{2}, \\ Q_a \widehat{Q_b} Q_c &= Q_c \widehat{AI} = Q_a \widehat{CI} = \frac{C+A}{2} = 1 \text{ dr. } - \frac{\widehat{B}}{2}, \\ Q_a \widehat{Q_c} Q_b &= Q_a \widehat{BI} = Q_b \widehat{AI} = \frac{A+B}{2} = 1 \text{ dr. } - \frac{\widehat{C}}{2}; \\ \widehat{BC} Q_a &= \widehat{CB} Q_a = \frac{\widehat{A}}{2}, \quad \widehat{CA} Q_b = \widehat{AC} Q_b = \frac{\widehat{B}}{2}, \quad \widehat{AB} Q_c = \widehat{BA} Q_c = \frac{\widehat{C}}{2}; \\ A \widehat{Q_a} M_a &= \frac{B-C}{2}, \quad B \widehat{Q_b} M_b = \frac{C-A}{2}, \quad C \widehat{Q_c} M_c = \frac{A-B}{2}; \\ \overline{Q_a I} &= \overline{Q_a B} = \overline{Q_a C} = \frac{a}{b+c} \overline{QA} = 2R \sin \frac{\widehat{A}}{2}, \\ \overline{Q_b I} &= \overline{Q_b C} = \overline{Q_b A} = \frac{b}{c+a} \overline{QB} = 2R \sin \frac{\widehat{B}}{2}, \\ \overline{Q_c I} &= \overline{Q_c A} = \overline{Q_c B} = \frac{c}{a+b} \overline{QC} = 2R \sin \frac{\widehat{C}}{2}, \end{aligned}$$

$Q_b Q_c \perp i_a$ ,  $Q_c Q_a \perp i_b$ ,  $Q_a Q_b \perp i_c$ ,  $(Q_b Q_c, AI) = \frac{1}{2}(A, I)$ ,  $(Q_c Q_a, BI) = \frac{1}{2}(B, I)$ ,  $(Q_a Q_b, CI) = \frac{1}{2}(C, I)$ , c.à.d. que  $Q_b Q_c$ ,  $Q_c Q_a$ ,  $Q_a Q_b$  sont les médianes respectives de AI, BI, CI;

$$\begin{aligned} \overline{Q_a A} &= \frac{bc}{i_a} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{\widehat{A}}{2}}, \quad \overline{Q_b B} = \frac{ca}{i_b} = \frac{c+a}{2 \cos \frac{\widehat{B}}{2}}, \quad \overline{Q_c C} = \frac{ab}{i_c} = \frac{a+b}{2 \cos \frac{\widehat{C}}{2}}, \\ \overline{Q_a D_a} &= \frac{\overline{BD_a} \cdot \overline{CD_a}}{i_a} = \frac{a^2}{2(b+c) \cos \frac{\widehat{A}}{2}}, \quad \overline{Q_b D_b} = \frac{\overline{CD_b} \cdot \overline{AD_b}}{i_b} = \frac{b^2}{2(c+a) \cos \frac{\widehat{B}}{2}}, \quad \overline{Q_c D_c} = \frac{\overline{AD_c} \cdot \overline{BD_c}}{i_c} = \frac{c^2}{2(a+b) \cos \frac{\widehat{C}}{2}}; \end{aligned}$$

$A \text{ proj}_B Q_a = A \text{ proj}_C Q_a = \frac{b+c}{2}$ ,  $B \text{ proj}_C Q_b = C \text{ proj}_A Q_b = \frac{c-a}{2}$  et des relations analogues pour  $Q_b$  et  $Q_c$ .

$B(\widehat{Q_a i_a}) D_a = D_a(\widehat{Q_a i_a}) C = \frac{B+C}{2}$  (et des relations analogues par permutation des lettres);

$(A D_a \text{ proj}_B \text{ proj}_C) = -1$  (idem);  $(B \text{ proj}_C \text{ proj}_A \text{ proj}_B) = (b-c)(c-a)$  (idem);

$(\overline{BH_a} - \overline{CH_a})(\overline{BD_a} - \overline{CD_a}) = (b-c)^2$  (idem) ou (si  $B$  et  $C < 90^\circ$ )  $\overline{M_a H_a} \cdot \overline{M_a D_a} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$  (idem);

$\overline{M_a \text{ proj}_B B} = \overline{M_a \text{ proj}_C C} = \frac{b-c}{2}$  (idem); soit une droite  $q'_a \perp i_a$  menée par  $M_a$ , c.à.d.

$\perp (i_a, M_a) \Rightarrow q'_a$ , on a  $\overline{A(q'_a b)} = \overline{A(q'_a c)} = \frac{b+c}{2}$  et  $\overline{B(q'_a c)} = \overline{C(q'_a b)} = \frac{b-c}{2}$  (idem).

Posons  $(Q_a Q_b, b) \Rightarrow Q_{ab}$ ,  $(Q_a Q_c, c) \Rightarrow Q_{ac}$ ,  $(Q_b Q_c, c) \Rightarrow Q_{bc}$ ,  $(Q_b Q_a, a) \Rightarrow Q_{ba}$ ,  $(Q_c Q_a, a) \Rightarrow Q_{ca}$ ,  $(Q_c Q_b, b) \Rightarrow Q_{cb}$ ; on a  $Q_{ab} Q_{ac} \parallel a$ ,  $Q_{bc} Q_{ba} \parallel b$ ,  $Q_{ca} Q_{cb} \parallel c$  et  $(Q_{ab} Q_{ac}, Q_{bc} Q_{ba}, Q_{ca} Q_{cb})^* \text{ avec } (Q_{ab} Q_{ac}, Q_{bc} Q_{ba}, Q_{ca} Q_{cb}) = 1$ .

Cercle inscrit

Le cercle inscrit  $\mathcal{C}_i$  est le cercle intérieur au triangle et tangent à ses trois côtés:  $a \text{ tang } \mathcal{C}_i$ ,  $b \text{ tang } \mathcal{C}_i$ ,  $c \text{ tang } \mathcal{C}_i$ .

Centre:  $(\mathcal{C}_i) = (i_a, i_b, i_c) = 1$ .

Rayon :  $\text{dist}_a l = \text{dist}_b l = \text{dist}_c l \Rightarrow r$

$$r = \overline{AI} \sin \frac{\hat{A}}{2} = \overline{BI} \sin \frac{\hat{B}}{2} = \overline{CI} \sin \frac{\hat{C}}{2} \quad (\text{voir les valeurs de } \overline{AI}, \overline{BI}, \overline{CI} \text{ plus haut})$$

$$= (p-a) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}$$

$$= a \frac{\sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} = b \frac{\sin \frac{\hat{C}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2}} = c \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{abc}{4pR} = 4R \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2} = R(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} - 1)$$

$$= \frac{ah_a}{2p} = \frac{bh_b}{2p} = \frac{ch_c}{2p} = \frac{h_a \sin \frac{\hat{A}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}} = \frac{h_b \sin \frac{\hat{B}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}} = \frac{h_c \sin \frac{\hat{C}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{p} (\operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2}) = \frac{1}{p} \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} ;$$

$$\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI} = 4Rr^2 = \frac{abc r}{p}, \quad \overline{AI} \cdot \overline{O_1 I} = \overline{BI} \cdot \overline{O_1 I} = \overline{CI} \cdot \overline{O_1 I} = 2Rr = \frac{abc}{2p} ;$$

$$\overline{M_a I}^2 + \overline{M_b I}^2 + \overline{M_c I}^2 = \frac{1}{2} (p^2 - 12Rr + 3r^2) ;$$

$$\overline{HI}^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}, \quad \overline{O_1 I} = \frac{R}{2} - r ;$$

$$\overline{AH} + \overline{BH} + \overline{CH} = 2(\overline{OM_a} + \overline{OM_b} + \overline{OM_c}) = 2(R+r) ;$$

$$\overline{OI}^2 = R^2 (1 - 8 \sin \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2} \sin \frac{\hat{C}}{2}) = R^2 [3 - 2(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C})] = R(R - 2r).$$

La condition pour que  $\mathcal{C}_r$  passe par  $O$  (soit  $\overline{OI} = r$ ) peut s'écrire  $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} = \sqrt{2}$  (et alors  $r = (\sqrt{2} - 1)R$ ). Si  $\mathcal{C}_r$  passe par  $G$  ( $\overline{GI} = r$ ), on a  $\overline{M_a I}^2 + \overline{M_b I}^2 + \overline{M_c I}^2 = (2R + \frac{7}{2}r)r$ .

$\text{dist}_a O + \text{dist}_b O + \text{dist}_c O = \overline{AE_a} + \overline{BE_b} + \overline{CE_c} = R + r$  (si le triangle est obtusangle en  $A$  par exemple, affecter le terme correspondant, soit le premier dans ce cas, du signe -).

Notes : soient  $A_{ba}$  et  $A_{ca}$  les points qui sont respectivement sur  $BA$  et sur  $CA$  à la distance  $a$  de  $B$  et de  $C$  ( $\overline{BA_{ba}} = \overline{CA_{ca}} = a$ ) du même côté que  $A$  par rapport à  $B$  et à  $C$  ; on a  $A_{ba} A_{ca} \perp OI$  et  $OI =$  le rayon du cercle  $\circ(A, A_{ba}, A_{ca})$  (+ énoncés analogues à déduire par permutation des lettres).

Points de contact :  $(\mathcal{C}_r, a) \Rightarrow J_a$ ,  $(\mathcal{C}_r, b) \Rightarrow J_b$ ,  $(\mathcal{C}_r, c) \Rightarrow J_c$  ;  $J_a J_b J_c$  est le triangle podaire de  $I$  ;  $J_a = \text{proj}_a I$ ,  $J_b = \text{proj}_b I$ ,  $J_c = \text{proj}_c I$  ; le triangle orthique de ce triangle  $J_a J_b J_c$  est homothétique à  $ABC$ .

$$\overline{AJ_b} = \overline{AJ_c} = p - a, \quad \overline{BJ_c} = \overline{BJ_a} = p - b, \quad \overline{CJ_a} = \overline{CJ_b} = p - c ;$$

$$\overline{M_a J_a} = \frac{1}{2} |b - c|, \quad \overline{M_b J_b} = \frac{1}{2} |c - a|, \quad \overline{M_c J_c} = \frac{1}{2} |a - b| ;$$

$$\overline{M_a J_a}^2 = \overline{M_a H_a} \cdot \overline{M_a D_a}, \quad \overline{M_b J_b}^2 = \overline{M_b H_b} \cdot \overline{M_b D_b}, \quad \overline{M_c J_c}^2 = \overline{M_c H_c} \cdot \overline{M_c D_c} \text{ pour un triangle acutangle.}$$

$$\text{On a aussi } \overline{A(h_a, M_a I)} = \overline{B(h_b, M_b I)} = \overline{C(h_c, M_c I)} = r.$$

Signalons que  $\frac{1}{2}(A, J_a) \in M_a I$ ,  $\frac{1}{2}(B, J_b) \in M_b I$ ,  $\frac{1}{2}(C, J_c) \in M_c I$  et que les intersections de  $i_b$  et de  $i_c$  avec le cercle  $\circ(BC)$  sont  $\in J_b J_c$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

$(J_a J_b, i_a) = \text{proj}_a B$ ,  $(J_b J_c, i_b) = \text{proj}_b C$  et des énoncés analogues avec  $i_b$  et avec  $i_c$ .



$$\overline{J_b J_c} = 2r \cos \frac{\hat{A}}{2}, \quad \overline{J_c J_a} = 2r \cos \frac{\hat{B}}{2}, \quad \overline{J_a J_b} = 2r \cos \frac{\hat{C}}{2};$$

$$J_b J_c \perp i_a, \quad J_c J_a \perp i_b, \quad J_a J_b \perp i_c;$$

$$J_b J_c = \text{pol}_{e_c} A, \quad J_c J_a = \text{pol}_{e_a} B, \quad J_a J_b = \text{pol}_{e_b} C;$$

$$J_b \hat{J}_a J_c = J_b \hat{A} = A \hat{J}_c = 1 \text{dr}_1 - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2},$$

$$J_c \hat{J}_b J_a = J_c \hat{B} = B \hat{J}_a = 1 \text{dr}_1 - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{A}}{2},$$

$$J_a \hat{J}_c J_b = J_a \hat{C} = C \hat{J}_b = 1 \text{dr}_1 - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}.$$

On a  $(AJ_a, BJ_b, CJ_c)^*$ , le point de concours étant le point de Gergonne, que nous noterons  $\Gamma$ :  $(AJ_a, BJ_b, CJ_c) \Rightarrow \Gamma$ ; il satisfait aux relations suivantes:

$$\frac{\overline{A\Gamma}}{J_a \Gamma} = \frac{(p-b)a}{(p-b)(p-c)}, \quad \frac{\overline{B\Gamma}}{J_b \Gamma} = \frac{(p-b)b}{(p-c)(p-a)}, \quad \frac{\overline{C\Gamma}}{J_c \Gamma} = \frac{(p-c)c}{(p-a)(p-b)}, \quad \frac{\overline{A\Gamma} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{C\Gamma}}{J_a \Gamma \cdot J_b \Gamma \cdot J_c \Gamma} = \frac{4R}{r};$$

ses coordonnées barycentriques sont  $\alpha = \frac{1}{p-a}, \beta = \frac{1}{p-b}, \gamma = \frac{1}{p-c}$ .

On a aussi  $(H_b H_c, D_b D_c, J_b J_c)^*$ ,  $(H_c H_a, D_c D_a, J_c J_a)^*$ ,  $(H_a H_b, D_a D_b, J_a J_b)^*$ .

Désignons par  $I_{ak}, I_{bk}, I_{ck}$  les points qui divisent dans un même rapport  $k$  les rayons des points de contact en posant  $(p-k)I_{ak} : kJ_a \Rightarrow I_{ak}$ ,  $(p-k)I_{bk} : kJ_b \Rightarrow I_{bk}$ ,  $(p-k)I_{ck} : kJ_c \Rightarrow I_{ck}$ .

Les droites  $A I_{ak}, B I_{bk}, C I_{ck}$  concourent en un point, qui dépend évidemment de  $k$ :  $(A I_{ak}, B I_{bk}, C I_{ck})^*$ . Un tel point est appelé point de Khazriya; nous pouvons le désigner par  $K_k$ , l'indice servant à spécifier que sa situation dépend de  $k$ . Il se situe entre  $I$ , qui correspond à  $k=0$ , et  $\Gamma$ , qui correspond à  $k=1$ .

Soit  $G_j$  le centre de gravité du triangle  $J_a J_b J_c$ , c'est-à-d. le point de concours des droites  $J_a \frac{1}{2}(J_b, J_c), J_b \frac{1}{2}(J_c, J_a), J_c \frac{1}{2}(J_a, J_b)$ ; on a  $G_j \in OI$  avec  $\frac{\overline{OG_j}}{OI} = \frac{1}{3} \frac{r}{R}$ .

Notes:

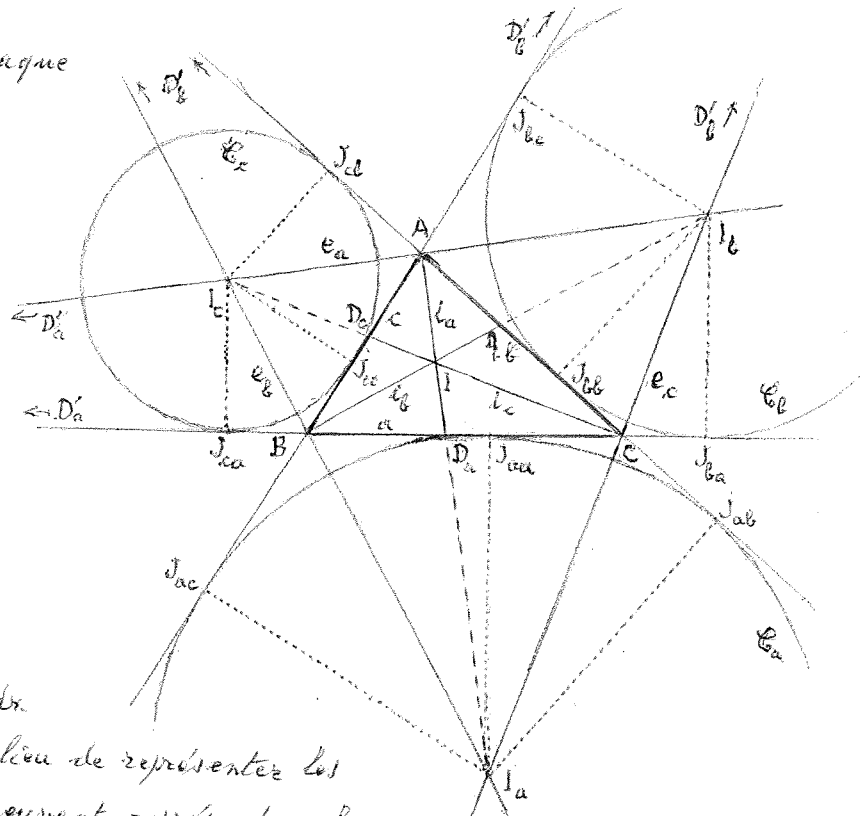
Le centre de gravité du contour du triangle, supposé formé d'une ligne (de longueur  $2p$ ) homogène, est le centre du cercle inscrit au triangle complémentaire (cercle qu'on appelle parfois cercle de Spieker), soit compl 1 avec la notation de la page 37, c'est donc le point de concours des parallèles à  $i_a, i_b, i_c$  menées respectivement par  $M_a, M_b, M_c$ , soit  $[ \parallel(i_a, M_a), \parallel(i_b, M_b), \parallel(i_c, M_c) ]$ . Les coordonnées barycentriques sont  $\alpha = b+c, \beta = c+a, \gamma = a+b$ . La droite 1 compl 1 est appelée droite de Housel.

Bissectrices extérieures

Une bissectrice extérieure est la bissectrice d'un angle extérieur du triangle. En chaque sommet, il y a deux angles extérieurs, dont les bissectrices sont dans le prolongement l'une de l'autre. Les droites portant ces demi-droites sont désignées par  $e_a, e_b, e_c$  respectivement pour les sommets  $A, B, C$ .

Les points  $(a, e_a) \Rightarrow D'_a, (b, e_b) \Rightarrow D'_b, (c, e_c) \Rightarrow D'_c$  sont sur les

prolongements des côtés, chaque fois du côté du plus grand des angles adjacents au côté opposé: par exemple,  $D'_a$  est sur le prolongement du côté  $a$  au delà de  $C$  ou sur son prolongement au delà de  $B$  suivant que respectivement  $\hat{C} > \hat{B}$  (c.à.d.  $c > b$ ) ou  $\hat{B} > \hat{C}$  (c.à.d.  $b > c$ ).



On sait que

$e_a \perp i_a, e_b \perp i_b, e_c \perp i_c,$   
 c.à.d.  $D'_a D'_b = D'_b D'_c = D'_c D'_a = 1 \text{ dr.}$

Les symboles  $e_a, e_b, e_c$  au lieu de représenter les droites indéfinies ci-dessus, peuvent représenter les séviennes  $AD'_a \Rightarrow e_a, BD'_b \Rightarrow e_b, CD'_c \Rightarrow e_c$ .

Longueurs:

$$e_a = \frac{2bc \sin \frac{\hat{A}}{2}}{|b-c|} = \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{|b-c|}, \quad e_b = \frac{2ca \sin \frac{\hat{B}}{2}}{|c-a|} = \frac{2\sqrt{ca(p-c)(p-a)}}{|c-a|}, \quad e_c = \frac{2ab \sin \frac{\hat{C}}{2}}{|a-b|} = \frac{2\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}{|a-b|}$$

$$e_a = a \frac{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \sin \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}} = i_a \cotg \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}, \quad e_b = b \frac{\sin \hat{C} \sin \hat{A}}{\sin \hat{B} \sin \frac{|\hat{C}-\hat{A}|}{2}} = i_b \cotg \frac{|\hat{C}-\hat{A}|}{2}, \quad e_c = c \frac{\sin \hat{A} \sin \hat{B}}{\sin \hat{C} \sin \frac{|\hat{A}-\hat{B}|}{2}} = i_c \cotg \frac{|\hat{A}-\hat{B}|}{2}$$

Positions des pieds:

$$\frac{\overline{BD'_a}}{\overline{CD'_a}} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{CD'_b}}{\overline{AD'_b}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{AD'_c}}{\overline{BD'_c}} = \frac{b}{a},$$

les rapports de section sont donc les mêmes que dans le cas des bissectrices intérieures, sauf le signe, puisqu'ils sont ici positifs, c.à.d. que les faisceaux  $(A, cb; i_a, e_a), (B, ac; i_b, e_b), (C, ba; i_c, e_c)$  sont harmoniques et donc que les pieds de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure issues d'un même sommet divisent harmoniquement le côté opposé à ce sommet:

$$(BC D_a D'_a) = -1, \quad (CAD_b D'_b) = -1, \quad (AB D_c D'_c) = -1.$$

Conséquences:

$$\overline{M_a D_a} \cdot \overline{M_a D'_a} = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \overline{M_b D_b} \cdot \overline{M_b D'_b} = \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \overline{M_c D_c} \cdot \overline{M_c D'_c} = \left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

chaque côté est la moyenne harmonique entre les distances d'une de ses extrémités et les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet opposé:  $\frac{2}{a} = \frac{1}{\overline{CD_a}} + \frac{1}{\overline{CD'_a}}$  et  $\frac{2}{a} = \frac{1}{\overline{BD_a}} + \frac{1}{\overline{BD'_a}}$  (prendre les longueurs avec leurs signes) et des relations analogues pour  $b$  et pour  $c$ .

$$\overline{BD'_a} = \frac{ca}{|b-c|}, \quad \overline{CD'_a} = \frac{ab}{|b-c|}, \quad \overline{CD'_b} = \frac{ab}{|c-a|}, \quad \overline{AD'_b} = \frac{bc}{|c-a|}, \quad \overline{AD'_c} = \frac{bc}{|a-b|}, \quad \overline{BD'_c} = \frac{ca}{|a-b|};$$

$$\overline{BD'_a} \cdot \overline{CD'_a} = bc + e_a^2, \quad \overline{CD'_b} \cdot \overline{AD'_b} = ca + e_b^2, \quad \overline{AD'_c} \cdot \overline{BD'_c} = ab + e_c^2;$$

$$\overline{D'_a D'_a} = \frac{i_a}{\sin \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}} = \frac{e_a}{\cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}} = 2a \frac{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \sin |\hat{B}-\hat{C}|} = \frac{2abc}{|b^2 - c^2|},$$

$$\overline{D_b D'_c} = \frac{i_b}{\sin \frac{|\hat{C}-\hat{A}|}{2}} = \frac{e_b}{\cos \frac{\hat{C}-\hat{A}}{2}} = 2R \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin \hat{A}}{\sin \hat{B} \cdot \sin |\hat{C}-\hat{A}|} = \frac{2abc}{|c^2 - a^2|},$$

$$\overline{D_c D'_a} = \frac{i_c}{\sin \frac{|\hat{A}-\hat{B}|}{2}} = \frac{e_c}{\cos \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}} = 2R \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B}}{\sin \hat{C} \cdot \sin |\hat{A}-\hat{B}|} = \frac{2abc}{|a^2 - b^2|}.$$

On a  $(D'_a, D'_b, D'_c) -$  et nous posons  $D'_a D'_b D'_c \Rightarrow d$ ;  
c'est la polaire bilinéaire (p.16) de  $I$ :  $d = \text{pol}_{ABC} I$ ; on a  $d \perp OI$ ;  
on a de plus  $d = \text{pol}_{G_i} G_j$  où  $G_j$  est le centre de gravité du triangle  $I_j I_k I_l$  (p.55).

On a aussi  $(D_b, D_c, D'_a) -$ ,  $(D_c, D_a, D'_b) -$ ,  $(D_a, D_b, D'_c) -$ .

Propriétés:

$$\text{ang}(b, e_a) = \text{ang}(e_a, c) = 1 \text{ dr. } - \frac{\hat{A}}{2}, \quad \text{ang}(c, e_b) = \text{ang}(e_b, a) = 1 \text{ dr. } - \frac{\hat{B}}{2}, \quad \text{ang}(a, e_c) = \text{ang}(e_c, b) = 1 \text{ dr. } - \frac{\hat{C}}{2}.$$

$$(i_a, e_b, e_c) * , \quad (i_b, e_c, e_a) * , \quad (i_c, e_a, e_b) * \quad \text{et en pose}$$

$$(i_a, e_b, e_c) \Rightarrow I_a, \quad (i_b, e_c, e_a) \Rightarrow I_b, \quad (i_c, e_a, e_b) \Rightarrow I_c.$$

On a  $\text{dist}_a I_a = \text{dist}_b I_a = \text{dist}_c I_a$ , relations où les notations  $b$  et  $c$  doivent être considérées comme représentant des droites indéfinies  $CA$  et  $AB$  (côtés prolongés), ainsi que des relations analogues pour  $I_b$  et  $I_c$  avec la même type de remarque.

$$\frac{D'_a I_c}{e_a} = \frac{a}{2(p-b)}, \quad \frac{D'_b I_c}{e_b} = \frac{a}{2(p-c)}, \quad \frac{D'_c I_a}{e_c} = \frac{b}{2(p-a)}, \quad \frac{D'_c I_b}{e_c} = \frac{c}{2(p-a)}, \quad \frac{D'_a I_b}{e_a} = \frac{c}{2(p-b)},$$

$$\overline{AI_a} = \sqrt{\frac{bc p}{p-a}} = \frac{p}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2},$$

$$\overline{BI_b} = \sqrt{\frac{ca p}{p-b}} = \frac{p}{\cos \frac{\hat{B}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2},$$

$$\overline{CI_c} = \sqrt{\frac{ab p}{p-c}} = \frac{p}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2},$$

$$\overline{AI_b} = \sqrt{\frac{bc(p-c)}{p-b}} = \frac{p-c}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2}, \quad \overline{AI_c} = \sqrt{\frac{bc(p-b)}{p-c}} = \frac{p-b}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2} \quad \text{et}$$

des formules analogues pour  $\overline{BI_c}$ ,  $\overline{BI_a}$ ,  $\overline{CI_a}$ ,  $\overline{CI_b}$ ;

$$\overline{AI} \cdot \overline{AI_a} = \overline{AI_b} \cdot \overline{AI_c} = bc, \quad \overline{BI} \cdot \overline{BI_b} = \overline{BI_c} \cdot \overline{BI_a} = ca, \quad \overline{CI} \cdot \overline{CI_c} = \overline{CI_a} \cdot \overline{CI_b} = ab;$$

$$\overline{\Pi_a} = \frac{a}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \sin \frac{\hat{A}}{2}, \quad \overline{\Pi_b} = \frac{b}{\cos \frac{\hat{B}}{2}} = 4R \sin \frac{\hat{B}}{2}, \quad \overline{\Pi_c} = \frac{c}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} = 4R \sin \frac{\hat{C}}{2};$$

$$\overline{\Pi_a} \cdot \overline{\Pi_b} \cdot \overline{\Pi_c} = 16 R^3 r.$$

Le triangle  $I_a I_b I_c$

Ces trois points sont les points associés (p.17) de  $I$  et on a

$$OI_a \perp D_b D_c, \quad OI_b \perp D_c D_a, \quad OI_c \perp D_a D_b.$$

Longueurs des côtés:

$$\overline{I_b I_c} = \frac{a}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{A}}{2}, \quad \overline{I_c I_a} = \frac{b}{\sin \frac{\hat{B}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{B}}{2}, \quad \overline{I_a I_b} = \frac{c}{\sin \frac{\hat{C}}{2}} = 4R \cos \frac{\hat{C}}{2};$$

$$\overline{I_a I_b} \cdot \overline{I_b I_c} \cdot \overline{I_c I_a} = 16 R^2 p.$$

$$\text{Angles: } B\hat{I}_a C = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}, \quad C\hat{I}_b A = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{A}}{2}, \quad A\hat{I}_c B = 1 \text{ dr.} - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}.$$

Hauteurs:  $A I_a$ ,  $B I_b$ ,  $C I_c$  ( $A I_a \perp I_b I_c$ ,  $B I_b \perp I_c I_a$ ,  $C I_c \perp I_a I_b$ ) dont les longueurs sont données un peu plus haut; orthocentre:  $I$ ;

le triangle  $I_a I_b I_c$  est le triangle orthocentrique du triangle  $ABC$ , c.à.d. que celui-ci en est le triangle orthique.

Droite d'Euler:  $IO$ .

Rayon du cercle circonscrit:  $2R$ , centre:  $\text{sym}_O I$  ( $= \Pi$ , p. 65).

$$\text{On a } I_a = \text{sym}_{Q_a} I, \quad I_b = \text{sym}_{Q_b} I, \quad I_c = \text{sym}_{Q_c} I,$$

donc  $\overline{Q_a I_a} = \overline{Q_a I}$  ( $= \overline{Q_a B} = \overline{Q_a C} = 2R \sin \frac{\hat{A}}{2}$  comme indiqué plus haut) et des relations analogues pour  $Q_b$  et  $Q_c$ ;

$Q_a, Q_b, Q_c$  sont les points extérieurs du triangle  $I_a I_b I_c$ :  $(I, B, I_a, C)_O$ , etc.

Posons  $(e_a, m_a) \Rightarrow Q'_a$ ,  $(e_b, m_b) \Rightarrow Q'_b$ ,  $(e_c, m_c) \Rightarrow Q'_c$ ,  
on a  $Q'_a \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{CQ'_a} = \widehat{Q'_a B}$ ,  $Q'_b \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{A Q'_b} = \widehat{Q'_b C}$ ,  $Q'_c \in \mathcal{E}$  avec  $\widehat{B Q'_c} = \widehat{Q'_c A}$ ,  
 $Q'_a = \text{sym}_O Q_a$ ,  $Q'_b = \text{sym}_O Q_b$ ,  $Q'_c = \text{sym}_O Q_c$ , c.à.d. que  $Q_a Q'_a$ ,  $Q_b Q'_b$ ,  $Q_c Q'_c$  sont les diamètres de  $\mathcal{E}$  portés par les médianes:  $Q_a Q'_a \perp a$ ,  $Q_b Q'_b \perp b$ ,  $Q_c Q'_c \perp c$   
et  $\overline{M_a Q_a} \cdot \overline{M_a Q'_a} = \frac{a^2}{4}$ ,  $\overline{M_b Q_b} \cdot \overline{M_b Q'_b} = \frac{b^2}{4}$ ,  $\overline{M_c Q_c} \cdot \overline{M_c Q'_c} = \frac{c^2}{4}$ ;

$$\text{on a aussi } Q'_a = \frac{1}{2}(I_b, I_c), \quad Q'_b = \frac{1}{2}(I_c, I_a), \quad Q'_c = \frac{1}{2}(I_a, I_b)$$

$$\text{et } \overline{Q'_a I_b} = \overline{Q'_a I_c} = \overline{Q'_a B} = \overline{Q'_a C} = 2R \cos \frac{\hat{A}}{2},$$

$$\overline{Q'_b I_c} = \overline{Q'_b I_a} = \overline{Q'_b C} = \overline{Q'_b A} = 2R \cos \frac{\hat{B}}{2},$$

$$\overline{Q'_c I_a} = \overline{Q'_c I_b} = \overline{Q'_c A} = \overline{Q'_c B} = 2R \cos \frac{\hat{C}}{2};$$

$$B\hat{Q}_a C = 2 \text{ dr.} - B\hat{Q}'_a C = \hat{A}, \quad C\hat{Q}'_b A = 2 \text{ dr.} - C\hat{Q}_b A = \hat{B}, \quad A\hat{Q}'_c B = 2 \text{ dr.} - A\hat{Q}_c B = \hat{C}.$$

Médianes du triangle  $I_a I_b I_c$ :  $I_a Q'_a$ ,  $I_b Q'_b$ ,  $I_c Q'_c$ ;

centre de gravité: sur  $IO$ , au delà de  $O$  à une distance de  $I$  égale à  $\frac{4}{3} IO$ .

Cercle des neuf points de  $I_a I_b I_c$ :  $\mathcal{E}$ .

Théorème de Poncelet: le centre des moyennes distances de  $I, I_a, I_b, I_c$  est  $O$ :  $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI_a} + \overrightarrow{OI_b} + \overrightarrow{OI_c} = \vec{0}$ .

Notons encore qu'on a

$$\overline{A I_a} \cdot \overline{I_a Q_a} = \overline{B I_b} \cdot \overline{I_b Q'_b} = \overline{C I_c} \cdot \overline{I_c Q'_c} = 8 R^2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2},$$

$$\overline{A I_b} \cdot \overline{I_b Q'_a} = \overline{B I_c} \cdot \overline{I_c Q'_b} = \overline{C I_a} \cdot \overline{I_a Q'_c} = 8 R^2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2},$$

$$\overline{A I_c} \cdot \overline{I_c Q'_a} = \overline{B I_a} \cdot \overline{I_a Q'_b} = \overline{C I_b} \cdot \overline{I_b Q'_c} = 8 R^2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2}.$$

### Cercles exinscrits

Un cercle exinscrit est un cercle extérieur au triangle, tangent à un des côtés et aux prolongements des deux autres; nous les désignerons par  $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$ , avec pour centres respectifs  $(\mathcal{C}_a) = I_a = (x_a, y_a, z_a)$ ,  $(\mathcal{C}_b) = I_b = (x_b, y_b, z_b)$ ,  $(\mathcal{C}_c) = I_c = (x_c, y_c, z_c)$  et pour rayons respectifs  $\text{dist}_a I_a \Rightarrow r_a$ ,  $\text{dist}_b I_b \Rightarrow r_b$ ,  $\text{dist}_c I_c \Rightarrow r_c$ ; on a aussi  $r_a = \text{dist}_b I_a = \text{dist}_c I_a$ ,  $r_b = \text{dist}_a I_b = \text{dist}_c I_b$ ,  $r_c = \text{dist}_a I_c = \text{dist}_b I_c$  où les indices a, b, c pour le symbole dist représentent les droites portant les côtés (prolongements de ceux-ci).

Expressions des rayons:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = (p-c) \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} = (p-b) \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = (p-a) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2},$$

$$r_b = p \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}} = (p-a) \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = (p-c) \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2},$$

$$r_c = p \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} = (p-b) \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} = (p-a) \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2};$$

$$r_a = a \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}}{\cos \frac{\hat{A}}{2}} = b \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}} = c \frac{\sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{C}}{2}},$$

$$r_b = b \frac{\cos \frac{\hat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2}} = c \frac{\sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{C}}{2}} = a \frac{\sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}},$$

$$r_c = c \frac{\cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2}}{\cos \frac{\hat{C}}{2}} = a \frac{\sin \frac{\hat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}} = b \frac{\sin \frac{\hat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\sin \frac{\hat{B}}{2}};$$

$$r_a = \overline{AI_a} \sin \frac{\hat{A}}{2} = r \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{h_a \sin \frac{\hat{A}}{2}}{2 \sin \frac{\hat{B}}{2} \sin \frac{\hat{C}}{2}} = \frac{h_b \cos \frac{\hat{B}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{C}}{2}} = \frac{h_c \cos \frac{\hat{C}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2}},$$

$$r_b = \overline{BI_b} \sin \frac{\hat{B}}{2} = r \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{h_b \sin \frac{\hat{B}}{2}}{2 \sin \frac{\hat{C}}{2} \sin \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{h_c \cos \frac{\hat{C}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{B}}{2} \sin \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{h_a \cos \frac{\hat{A}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{B}}{2} \sin \frac{\hat{C}}{2}},$$

$$r_c = \overline{CI_c} \sin \frac{\hat{C}}{2} = r \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{h_c \sin \frac{\hat{C}}{2}}{2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2}} = \frac{h_a \cos \frac{\hat{A}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{C}}{2} \sin \frac{\hat{B}}{2}} = \frac{h_b \cos \frac{\hat{B}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{C}}{2} \sin \frac{\hat{A}}{2}};$$

$$r_a = 4R \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2} = R(1 + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} - \cos \hat{A}),$$

$$r_b = 4R \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2} = R(1 + \cos \hat{C} + \cos \hat{A} - \cos \hat{B}),$$

$$r_c = 4R \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} = R(1 + \cos \hat{A} + \cos \hat{B} - \cos \hat{C});$$

$$r_a - r = a \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = 4R \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} = 2 \overline{M_a Q_a}, \quad r_b + r_c = a \operatorname{cotg} \frac{\hat{A}}{2} = 4R \cos^2 \frac{\hat{A}}{2} = 2 \overline{M_a Q'_a},$$

$$r_b - r = b \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = 4R \sin^2 \frac{\hat{B}}{2} = 2 \overline{M_b Q_b}, \quad r_c + r_a = b \operatorname{cotg} \frac{\hat{B}}{2} = 4R \cos^2 \frac{\hat{B}}{2} = 2 \overline{M_b Q'_b},$$

$$r_c - r = c \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = 4R \sin^2 \frac{\hat{C}}{2} = 2 \overline{M_c Q_c}, \quad r_a + r_b = c \operatorname{cotg} \frac{\hat{C}}{2} = 4R \cos^2 \frac{\hat{C}}{2} = 2 \overline{M_c Q'_c},$$

$$r_a = \frac{p}{p-a} r, \quad r_b = \frac{p}{p-b} r, \quad r_c = \frac{p}{p-c} r, \quad r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2,$$

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}, \quad r_a r_b r_c = r p^2,$$

$$\frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_c + r_a}{r_b} + \frac{r_a + r_b}{r_c} = \frac{4R_0}{r} - 2,$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_b}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c},$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$r r_a + r_b r_c = bc, \quad r r_b + r_c r_a = ca, \quad r r_c + r_a r_b = ab,$$

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c), \quad b^2 = (r_b - r)(r_c + r_a), \quad c^2 = (r_c - r)(r_a + r_b),$$

$$R_0 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{r_a - r}{r_b + r_c}, \quad R_0 \frac{\hat{B}}{2} = \frac{r_b - r}{r_c + r_a}, \quad R_0 \frac{\hat{C}}{2} = \frac{r_c - r}{r_a + r_b}; \quad \overline{AI_a} \cdot \overline{AI_a} = 2R_0 r_a, \text{ etc.},$$

$$\overline{AI_a} \cdot \overline{BI_a} \cdot \overline{CI_a} = 4R_0 r_a^2 \quad (\text{et des formules analogues pour } I_b \text{ et } I_c),$$

$$\overline{OI_a}^2 = R_0^2 (1 + 8 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}) = R_0^2 [3 + 2(\cos \hat{B} + \cos \hat{C} - \cos \hat{A})] = R_0 (R_0 + 2r_a) \quad (\text{idem}),$$

$$\overline{O_9 I_a} = \frac{R_0}{2} + r_a \quad (\text{idem}), \quad \overline{HI_a}^2 = 2r_a^2 - 4R_0^2 \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} \quad (\text{idem}),$$

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 + \overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2 = 12R_0^2, \quad \overline{O_9 I} + \overline{O_9 I_a} + \overline{O_9 I_b} + \overline{O_9 I_c} = 6R_0;$$

$$r_a \pm \overline{AH} = r_b + \overline{BH} = r_c + \overline{CH} = \frac{1}{2}(r + r_a + r_b + r_c) = 2R_0 + r = R_0 (1 + \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C})$$

(dans le premier membre: signe supérieur si ABC est acutangle, signe inférieur si ABC est obtusangle).

Points de contact:  $(C_a, a) \Rightarrow J_{aa}, (C_b, b) \Rightarrow J_{bb}, (C_c, c) \Rightarrow J_{cc},$

$(C_a, b) \Rightarrow J_{ab}, (C_a, c) \Rightarrow J_{ac}, (C_b, c) \Rightarrow J_{bc}, (C_b, a) \Rightarrow J_{ba}, (C_c, a) \Rightarrow J_{ca}, (C_c, b) \Rightarrow J_{cb};$

$J_{aa} = \text{proj}_{I_a} I_a, J_{bb} = \text{proj}_{I_b} I_b, J_{cc} = \text{proj}_{I_c} I_c, J_{ab} = \text{proj}_{I_a} I_b, J_{ba} = \text{proj}_{I_b} I_a, J_{ac} = \text{proj}_{I_a} I_c, J_{ca} = \text{proj}_{I_c} I_a, J_{bc} = \text{proj}_{I_b} I_c, J_{cb} = \text{proj}_{I_c} I_b;$

$$J_{ab} J_{ac} \perp I_a, \quad J_{ba} J_{bc} \perp I_b, \quad J_{ca} J_{cb} \perp I_c;$$

$$\overline{BJ_{aa}} = r - c = \overline{CJ_a}, \quad \overline{CJ_{aa}} = r - b = \overline{BJ_a}, \quad \text{d'où } J_{aa} = \text{sym}_{I_a} J_a,$$

$$\overline{CJ_{bb}} = r - a = \overline{AJ_b}, \quad \overline{AJ_{bb}} = r - c = \overline{CJ_b}, \quad \text{d'où } J_{bb} = \text{sym}_{I_b} J_b,$$

$$\overline{AJ_{cc}} = r - b = \overline{BJ_c}, \quad \overline{BJ_{cc}} = r - a = \overline{AJ_c}, \quad \text{d'où } J_{cc} = \text{sym}_{I_c} J_c,$$

c.à.d. que  $J_a$  et  $J_{aa}$  sont des points isotomiques (p.15) sur  $a$ , idem pour  $J_b$  et  $J_{bb}$  sur  $b$  et pour  $J_c$  et  $J_{cc}$  sur  $c$ .

$$\overline{BJ_{aa}} = \overline{CJ_{ba}} = r - a, \quad \overline{CJ_{bb}} = \overline{AJ_{cb}} = r - b, \quad \overline{AJ_{cc}} = \overline{BJ_{ca}} = r - c;$$

$$\overline{AJ_{ab}} = \overline{AJ_{ac}} = \overline{BJ_{bc}} = \overline{BJ_{ba}} = \overline{CJ_{ca}} = \overline{CJ_{cb}} = r;$$

$$\overline{M_a J_{aa}} = \frac{|b-c|}{2} = \overline{M_a J_a}, \quad \overline{M_b J_{bb}} = \frac{|c-a|}{2} = \overline{M_b J_b}, \quad \overline{M_c J_{cc}} = \frac{|a-b|}{2} = \overline{M_c J_c},$$

$$\overline{M_a J_{ba}} = \overline{M_a J_{ca}} = \frac{b+c}{2}, \quad \overline{M_b J_{cb}} = \overline{M_b J_{ab}} = \frac{c+a}{2}, \quad \overline{M_c J_{ac}} = \overline{M_c J_{bc}} = \frac{a+b}{2};$$

$$(H_a D_a J_a J_{aa}) = -1, \quad (H_b D_b J_b J_{bb}) = -1, \quad (H_c D_c J_c J_{cc}) = -1;$$

on a aussi  $(J_{ab} J_{ac} J_a I_b) = \text{proj}_{I_b} B, \quad (J_{ab} J_{ac}, I_c I_a) = \text{proj}_{I_a} C,$

$(J_{ba} J_{bc}, I_b I_c) = \text{proj}_{I_c} C, \quad (J_{ba} J_{bc}, I_a I_b) = \text{proj}_{I_b} A, \quad (J_{ca} J_{cb}, I_c I_a) = \text{proj}_{I_a} A, \quad (J_{ca} J_{cb}, I_b I_c) = \text{proj}_{I_c} B,$

Relation avec les points diamétralement opposés sur  $\mathcal{C}_c$  des points de contact de ce cercle, soient  $\text{sym}_{I_a} J_a \Rightarrow J_a', \text{sym}_{I_b} J_b \Rightarrow J_b', \text{sym}_{I_c} J_c \Rightarrow J_c';$

$$J'_a \in AJ_{aa}, \quad J'_b \in BJ_{bb}, \quad J'_c \in CJ_{cc}$$

$$\text{On a } AJ_{aa} \parallel IM_a, \quad BJ_{bb} \parallel IM_b, \quad CJ_{cc} \parallel IM_c.$$

On a aussi  $(AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc})^*$  et nous poserons  $(AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}) \Rightarrow N$ ; c'est le point de Nagel, qui est le point réciproque (p.16) du point de Gergonne:  $N = \text{recipro } \Gamma$ , ainsi que l'antécoplémentaire (p.37) de  $I$ :  $I = \text{compl } N$ , d'où  $(I, G, N) = 2 \overline{IG}$ ; les coordonnées barycentriques de  $N$  sont:  $\alpha = p-a, \beta = p-b, \gamma = p-c$ . Adjoints de  $N$ :  $N_a = (AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}), N_b = (BJ_{bb}, CJ_{cc}, AJ_{aa}), N_c = (CJ_{cc}, AJ_{aa}, BJ_{bb})$ ; ce sont respectivement les antécoplémentaires (p.37) de  $I_a, I_b, I_c$  et les réciproques (p.16) des adjoints  $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$  du point de Gergonne  $\Gamma$ , avec  $\Gamma_a = (AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}), \Gamma_b = (BJ_{bb}, CJ_{cc}, AJ_{aa}), \Gamma_c = (CJ_{cc}, AJ_{aa}, BJ_{bb})$ , dont les coordonnées barycentriques sont pour  $\Gamma_a$ :  $\alpha = \frac{1}{p}, \beta = -\frac{1}{p-c}, \gamma = -\frac{1}{p-b}$ , pour  $\Gamma_b$ :  $\alpha = -\frac{1}{p-c}, \beta = \frac{1}{p}, \gamma = -\frac{1}{p-a}$ , pour  $\Gamma_c$ :  $\alpha = -\frac{1}{p-b}, \beta = -\frac{1}{p-a}, \gamma = \frac{1}{p}$ .

Le cercle  $\circ(HN)$  s'appelle cercle de Fuhrmann. Son rayon vaut  $\frac{1}{2} HN = OI = \sqrt{R(R-2r)} = R \sqrt{1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = R \sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}$   
 $= R \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 + 3abc}{abc}}$

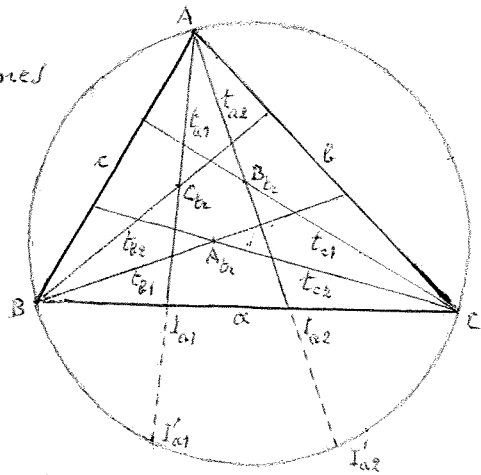
### Trisectrices intérieures

Comme pour les bissectrices, il y a lieu de considérer d'une part les trisectrices intérieures (ici aussi on sous-entend éventuellement "intérieures") et d'autre part les trisectrices extérieures.

Les trisectrices intérieures sont les droites qui divisent chaque angle intérieur en trois parties égales (leurs prolongements de l'autre côté du sommet dont elles sont issues, dans chacun des triangles, divisent aussi en trois parties égales les angles opposés).

Nous utiliserons les notations suivantes pour les trisectrices

issues de  $A$ :  $t_{a1}$  pour la plus proche de  $AB$  (adjacente à  $c$ )  
 et  $t_{a2}$  pour la plus proche de  $AC$  (adjacente à  $b$ ),  
 issues de  $B$ :  $t_{b1}$  pour la plus proche de  $BC$  (adjacente à  $a$ )



et  $t_{b2}$  pour la plus proche de BA (adjacente à c),  
 issues de C:  $t_{c1}$  pour la plus proche de CA (adjacente à b)  
 et  $t_{c2}$  pour la plus proche de CB (adjacente à a);

nous désignerons par  $\tau_a, \tau_b, \tau_c$  les mesures des angles qu'elles déterminent, c.à.d.  
 $\text{ang}(AB, t_{a1}) = \text{ang}(t_{a1}, t_{a2}) = \text{ang}(t_{a2}, AC) = \frac{\hat{A}}{3} \Rightarrow \tau_a$  (d'où  $\text{ang}(AB, t_{a2}) = \text{ang}(t_{a1}, AC) = 2\tau_a$ ),  
 $\text{ang}(BC, t_{b1}) = \text{ang}(t_{b1}, t_{b2}) = \text{ang}(t_{b2}, BA) = \frac{\hat{B}}{3} \Rightarrow \tau_b$  (d'où  $\text{ang}(BC, t_{b2}) = \text{ang}(t_{b1}, BA) = 2\tau_b$ ),  
 $\text{ang}(CA, t_{c1}) = \text{ang}(t_{c1}, t_{c2}) = \text{ang}(t_{c2}, CB) = \frac{\hat{C}}{3} \Rightarrow \tau_c$  (d'où  $\text{ang}(CA, t_{c2}) = \text{ang}(t_{c1}, CB) = 2\tau_c$ );

$$\text{on a donc} \quad \tau_a + \tau_b + \tau_c = \frac{\pi}{3} \text{ dr.} = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Longueurs: } t_{a1} &= \frac{c \sin \hat{B}}{\sin(\hat{B} + \tau_a)} = \frac{b \sin \hat{C}}{\sin(\hat{B} + \tau_a)}, & t_{a2} &= \frac{b \sin \hat{C}}{\sin(\hat{C} + \tau_a)} = \frac{c \sin \hat{B}}{\sin(\hat{C} + \tau_a)}, \\ t_{b1} &= \frac{a \sin \hat{C}}{\sin(\hat{C} + \tau_b)} = \frac{c \sin \hat{A}}{\sin(\hat{C} + \tau_b)}, & t_{b2} &= \frac{c \sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \tau_b)} = \frac{a \sin \hat{C}}{\sin(\hat{A} + \tau_b)}, \\ t_{c1} &= \frac{b \sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \tau_c)} = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin(\hat{A} + \tau_c)}, & t_{c2} &= \frac{a \sin \hat{B}}{\sin(\hat{B} + \tau_c)} = \frac{b \sin \hat{A}}{\sin(\hat{B} + \tau_c)}. \end{aligned}$$

Désignons par  $A_{12}, B_{12}, C_{12}$  les intersections des trisectrices adjacentes à un même côté de ABC, c.à.d. posons  $(t_{b1}, t_{c2}) \Rightarrow A_{12}$ ,  $(t_{c1}, t_{a2}) \Rightarrow B_{12}$ ,  $(t_{a1}, t_{b2}) \Rightarrow C_{12}$ ;  
 on a  $\widehat{BA_{12}C} = \frac{\hat{C}}{3} \text{ dr.} + \tau_a = 120^\circ + \tau_a$ ,  $\widehat{CB_{12}A} = \frac{\hat{A}}{3} \text{ dr.} + \tau_b = 120^\circ + \tau_b$ ,  $\widehat{AC_{12}B} = \frac{\hat{B}}{3} \text{ dr.} + \tau_c = 120^\circ + \tau_c$ .  
 Théorème de Morley: le triangle dont les sommets sont  $A_{12}, B_{12}, C_{12}$  est équilatéral;  
 les longueurs des côtés de ce triangle sont telles que

$$\overline{B_{12}C_{12}} = \overline{C_{12}A_{12}} = \overline{A_{12}B_{12}} = 8 R \sin \tau_a \sin \tau_b \sin \tau_c.$$

$$\text{On a donc (p.116)} \quad \widehat{B_{12}A_{12}C_{12}} = \widehat{C_{12}B_{12}A_{12}} = \widehat{A_{12}C_{12}B_{12}} = \frac{\pi}{3} \text{ dr.} = 60^\circ.$$

Si nous désignons par  $I_{a1}$  et  $I_{a2}$  les pieds des trisectrices  $t_{a1}$  et  $t_{a2}$  en posant  
 $(a, t_{a1}) \Rightarrow I_{a1}$  et  $(a, t_{a2}) \Rightarrow I_{a2}$  (soit  $AI_{a1} = t_{a1}$  et  $AI_{a2} = t_{a2}$ ) et par  $I'_{a1}$  et  $I'_{a2}$  les secondes  
 intersections (autres que A) de  $t_{a1}$  et de  $t_{a2}$  avec le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ , on a  
 les similitudes (spéc.) interviennent entre triangles  $AI_{a1}B \sim ACI_{a2}$  et  $A_{12}C \sim AB I'_{a1}$ ,  
 qui entraînent respectivement  $\frac{AI_{a1}}{b} = \frac{c}{AI_{a2}} = \frac{I_{a1}B}{CI_{a2}}$  et  $\frac{AI_{a2}}{c} = \frac{b}{AI_{a1}} = \frac{I_{a2}C}{BI'_{a1}}$ ,  
 donc  $t_{a1} + \overline{AI'_{a2}} = t_{a2} + \overline{AI'_{a1}} = bc$ .

Si nous remarquons que  $t_{a1}$  et  $t_{a2}$  sont des sévientes conjuguées isogonales (p.72) puisque  
 $\text{ang}(AB, t_{a1}) = \text{ang}(t_{a2}, AC) = \frac{\hat{A}}{3}$ , ces relations constituent un cas particulier de celles qui  
 sont données p.73. On a évidemment  $\widehat{BI'_{a1}} = \widehat{I'_{a1}I'_{a2}} = \widehat{I'_{a2}C}$  et  $I'_{a1}I'_{a2} \parallel a$ .

Des résultats semblables peuvent être énoncés, par permutation des lettres, pour les trisectrices issues de B ou issues de C.

### Trisectrices extérieures

Comme pour les bissectrices, les trisectrices des deux angles extérieurs en  
 chaque sommet sont dans les prolongements les unes des autres; nous désignerons  
 par  $\tau'_a, \tau'_b, \tau'_c$  les mesures des angles qu'elles déterminent, les bis des angles extérieurs:



$$\frac{1}{3}(2dr - \hat{A}) = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{3} \Rightarrow \tau'_a, \quad \frac{1}{3}(2dr - \hat{B}) = \frac{\hat{C} + \hat{A}}{3} \Rightarrow \tau'_b, \quad \frac{1}{3}(2dr - \hat{C}) = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{3} \Rightarrow \tau'_c$$

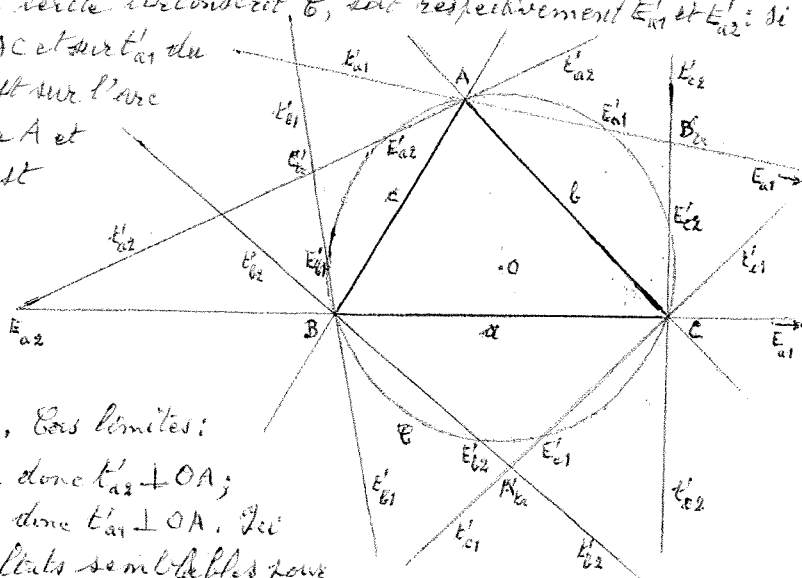
Les trisectrices extérieures seront désignées comme suit :

$$\begin{aligned} \text{en } A & \begin{cases} t'_{a1} = \text{droite telle que } \text{ang}(AC, t'_{a1}) = \tau'_a & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{a1}, AB) = 2\tau'_a), \\ t'_{a2} = \text{droite telle que } \text{ang}(AC, t'_{a2}) = 2\tau'_a & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{a2}, AB) = \tau'_a), \end{cases} \\ \text{en } B & \begin{cases} t'_{b1} = \text{droite telle que } \text{ang}(BA, t'_{b1}) = \tau'_b & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{b1}, BC) = 2\tau'_b), \\ t'_{b2} = \text{droite telle que } \text{ang}(BA, t'_{b2}) = 2\tau'_b & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{b2}, BC) = \tau'_b), \end{cases} \\ \text{en } C & \begin{cases} t'_{c1} = \text{droite telle que } \text{ang}(CB, t'_{c1}) = \tau'_c & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{c1}, CA) = 2\tau'_c), \\ t'_{c2} = \text{droite telle que } \text{ang}(CB, t'_{c2}) = 2\tau'_c & (\text{d'où } \text{ang}(t'_{c2}, CA) = \tau'_c). \end{cases} \end{aligned}$$

On a  $\tau_a + \tau'_a = \tau_b + \tau'_b = \tau_c + \tau'_c = \frac{2}{3}dr = 60^\circ$ ,  $\tau'_a + \tau'_b + \tau'_c = \frac{4}{3}dr = 120^\circ$  ;  
 $\text{ang}(t_{a1}, t'_{a1}) = \frac{2}{3}dr + \tau_a$ ,  $\text{ang}(t'_{a2}, t'_{a2}) = \frac{2}{3}dr + \tau'_a$  et des formules semblables avec  $b$  ou  $c$  à la place de  $a$ ,  
 $\text{ang}(t_{a2}, t'_{a1}) = \text{ang}(t'_{b2}, t'_{b1}) = \text{ang}(t'_{c2}, t'_{c1}) = \frac{2}{3}dr = 60^\circ$ ,  
 $\text{ang}(t'_{a1}, t'_{a2}) = \text{ang}(t'_{b1}, t'_{b2}) = \text{ang}(t'_{c1}, t'_{c2}) = \frac{4}{3}dr = 120^\circ$ .

Posons  $(a, t'_{a1}) \Rightarrow E_{a1}$  et  $(a, t'_{a2}) \Rightarrow E_{a2}$  pour les pieds de  $t'_{a1}$  et de  $t'_{a2}$ , c'est-à-dire les intersections des trisectrices extérieures issues de  $A$  avec le côté opposé  $a$ . Ces points sont évidemment sur les prolongements du segment  $BC$ . Le plus habituellement, à savoir quand les longueurs des côtés  $b$  et  $c$  (ou les mesures des angles  $B$  et  $C$ ) ne sont pas trop différentes, plus précisément si  $\hat{B} < 2\hat{C}$  et  $\hat{C} < 2\hat{B}$ , ils se situent de part et d'autre de  $BC$  :  $E_{a1}$  sur le prolongement de  $BC$  du côté de  $C$  et  $E_{a2}$  sur le prolongement de  $BC$  du côté de  $B$ , mais si  $\hat{B} > 2\hat{C}$ ,  $E_{a1}$  est du côté de  $B$ , au delà de  $E_{a2}$  ; si au contraire  $\hat{C} > 2\hat{B}$ ,  $E_{a2}$  est du côté de  $C$ , au delà de  $E_{a1}$ . Et la limite, soit  $\hat{B} = 2\hat{C} \sim t'_{a1} \parallel a$  ( $E_{a1}$  à l'infini sur  $a$ ), soit  $\hat{C} = 2\hat{B} \sim t'_{a2} \parallel a$  ( $E_{a2}$  à l'infini sur  $a$ ). Des résultats semblables peuvent être énoncés pour les points  $(b, t'_{b1}) \Rightarrow E_{b1}$  et  $(b, t'_{b2}) \Rightarrow E_{b2}$ , intersections avec  $b$  des trisectrices extérieures issues de  $B$  et pour les points  $(c, t'_{c1}) \Rightarrow E_{c1}$  et  $(c, t'_{c2}) \Rightarrow E_{c2}$ , intersections avec  $c$  des trisectrices extérieures issues de  $C$ .

Des considérations analogues peuvent être données pour les secondes intersections (autres que  $A$ ) de  $t'_{a1}$  et de  $t'_{a2}$  avec le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ , soit respectivement  $E'_{a1}$  et  $E'_{a2}$  : si  $\hat{B} < 2\hat{C}$  et  $\hat{C} < 2\hat{B}$ ,  $E'_{a1}$  est sur l'arc  $AC$  et sur  $t'_{a1}$  du côté de  $E_{a1}$  (entre  $A$  et  $E_{a1}$ ) et  $E'_{a2}$  est sur l'arc  $AB$  et sur  $t'_{a2}$  du côté de  $E_{a2}$  (entre  $A$  et  $E_{a2}$ ), tandis que si  $\hat{B} > 2\hat{C}$ ,  $E'_{a2}$  est sur l'arc  $AC$  (entre  $A$  et  $E'_{a1}$ ) et sur  $t'_{a2}$  de l'autre côté de  $A$  que  $E_{a2}$ , et si  $\hat{C} > 2\hat{B}$ ,  $E'_{a1}$  est sur l'arc  $AB$  (entre  $A$  et  $E'_{a2}$ ) et sur  $t'_{a1}$  de l'autre côté de  $A$  que  $E_{a1}$ . Cas limites :  
 $\hat{B} = 2\hat{C} \sim E'_{a2} = A$ , c.à.d.  $t'_{a2} \text{ tang } \mathcal{C}$ , donc  $t'_{a2} \perp OA$  ;  
 $\hat{C} = 2\hat{B} \sim E'_{a1} = A$ , c.à.d.  $t'_{a1} \text{ tang } \mathcal{C}$ , donc  $t'_{a1} \perp OA$ . Ici encore, on peut donner des résultats semblables pour



les intersections avec  $\mathcal{B}$  des bissectrices extérieures issues de  $B$  ou issues de  $C$  (notamment:  $\hat{A} = 2\hat{C} \sim t'_{c1} \text{ tang } \mathcal{B}$  et  $t'_{c1} \perp OB$ ,  $\hat{C} = 2\hat{A} \sim t'_{b2} \text{ tang } \mathcal{B}$  et  $t'_{b2} \perp OB$ ,  $\hat{B} = 2\hat{A} \sim t'_{c1} \text{ tang } \mathcal{B}$  et  $t'_{c1} \perp OC$ ,  $\hat{A} = 2\hat{B} \sim t'_{b2} \text{ tang } \mathcal{B}$  et  $t'_{b2} \perp OC$ ).

Désignons par  $A'_b, B'_a, C'_a$  les intersections des bissectrices extérieures adjacentes à un même côté de  $ABC$ , en posant

$$(t'_{b2}, t'_{c1}) \Rightarrow A'_b, \quad (t'_{c2}, t'_{a1}) \Rightarrow B'_a, \quad (t'_{a2}, t'_{b1}) \Rightarrow C'_a;$$

$$\text{on a } \widehat{CA'_bB} = \frac{2}{3} \text{ch}_1 + \tau'_a = 60^\circ + \tau'_a, \quad \widehat{AB'_aC} = \frac{2}{3} \text{ch}_2 + \tau'_b = 60^\circ + \tau'_b, \quad \widehat{BC'_aA} = \frac{2}{3} \text{ch}_3 + \tau'_c = 60^\circ + \tau'_c.$$

Chaque fois, le triangle dont les sommets sont  $A'_b, B'_a, C'_a$  est équilatéral; les longueurs des côtés de ce triangle sont telles que  $\overline{B'_aC'_a} = \overline{C'_aA'_b} = \overline{A'_bB'_a} = 8R \cdot \sin \tau'_a \cdot \sin \tau'_b \cdot \sin \tau'_c$ .

$$\text{On a donc (p. 110)} \quad \widehat{B'_aA'_bC'_a} = \widehat{C'_aB'_aA'_b} = \widehat{A'_bC'_aB'_a} = \frac{2}{3} \text{ch}_i = 60^\circ;$$

les côtés de ce triangle sont parallèles à ceux du triangle  $A_bB_aC_a$ :

$$\overline{B'_aC'_a} \parallel \overline{B_aC_a}, \quad \overline{C'_aA'_b} \parallel \overline{C_aA_b}, \quad \overline{A'_bB'_a} \parallel \overline{A_bB_a}.$$

D'autres triangles ayant pour sommets des intersections de bissectrices extérieures entre elles ou avec des prolongements de bissectrices intérieures ont leurs côtés parallèles à ceux-là, notamment les triangles  $A'_b(t_{a1}, t'_{c1})(t_{a2}, t'_{c2})$ ,  $B'_a(t_{b1}, t'_{a1})(t_{b2}, t'_{a2})$ ,  $C'_a(t_{c1}, t'_{b1})(t_{c2}, t'_{b2})$ , qui sont homothétiques à  $A'_bB'_aC'_a$  avec pour centres d'homothétie respectifs  $A'_b, B'_a, C'_a$ .

$$\text{Autre théorème: } \overline{AE'_{a1}} \cdot \overline{AE'_{a2}} = \overline{AE_{a2}} \cdot \overline{AE'_{a1}} = bc;$$

ces relations résultent des similitudes (p. 110)  $\triangle ACE_{a1} \sim \triangle AE'_{a2}B$  et  $\triangle ABE_{a2} \sim \triangle AE'_{a1}C$ , qui entraînent respectivement  $\frac{b}{\overline{AE'_{a2}}} = \frac{\overline{AE_{a1}}}{c} = \frac{\overline{CE_{a1}}}{\overline{E'_{a2}B}}$  et  $\frac{c}{\overline{AE'_{a1}}} = \frac{\overline{AE_{a2}}}{b} = \frac{\overline{BE_{a2}}}{\overline{E'_{a1}C}}$ .

Note: ces énoncés sont des cas particuliers d'énoncés plus généraux; en effet les similitudes de ces triangles et les relations qu'elles entraînent, notamment  $\overline{AE_{a1}} \cdot \overline{AE'_{a2}} = bc$  et  $\overline{AE_{a2}} \cdot \overline{AE'_{a1}} = bc$ , restent vraies si les droites  $t'_{a1}$  et  $t'_{a2}$  ne sont pas nécessairement les bissectrices extérieures issues de  $A$ , mais d'autres droites passant par  $A$  et faisant, à l'extérieur de  $ABC$ , un même angle l'une avec  $AB$  et l'autre avec  $AC$  (cf. plus haut la considération des bissectrices intérieures  $t_{a1}$  et  $t_{a2}$  comme bissectrices conjuguées isogonales particulières).

Ces résultats peuvent évidemment être transférés, par permutation des lettres, aux bissectrices extérieures issues de  $B$  ou issues de  $C$  et à des droites passant par  $B$  ou passant par  $C$  et faisant des angles égaux, vers l'extérieur, avec les côtés adjacents au sommet considéré.

## Notes et théorèmes divers

### Note 1

Suivant une option complètement différente de celle qui est utilisée pour les points de Gergonne et de Nagel, les points adjoints d'un point  $P$  donné sont parfois définis de la manière suivante. Soient  $P_{ja}, P_{jb}, P_{jc}$  les intersections respectives de  $PJ_a, PJ_b, PJ_c$  avec le cercle inscrit  $\mathcal{C}_i$  (autres que  $J_a, J_b, J_c$ ); appelons respectivement  $P'_{ja}, P'_{jb}, P'_{jc}$  les secondes intersections avec ce cercle des droites (d'ailleurs concourantes)  $AP_{ja}, BP_{jb}, CP_{jc}$ . On a  $(J_a P_{ja}, J_b P'_{jb}, J_c P'_{jc})^*$ ,  $(J_b P_{jb}, J_c P'_{jc}, J_a P'_{ja})^*$ ,  $(J_c P_{jc}, J_a P'_{ja}, J_b P'_{jb})^*$ . Ce sont alors ces trois points de concours qu'on appelle points adjoints de  $P$ . Mais ceci ne donne pas les points adjoints aux points de Gergonne et de Nagel tels qu'ils sont donnés plus haut, page 61.

Notons que pour avoir un accord avec ces points, on pourrait définir les points adjoints de tout point  $P$  intérieur à  $ABC$  par la construction suivante. Soit  $P_a P_b P_c$  est comme plus haut le triangle pédal de  $P$  et les grandeurs étant prises avec leurs signes, portons une longueur  $\frac{b-c}{P_a C - B P_a} \overline{B P_a}$  sur le prolongement de  $AC$  à partir de  $C$  et joignons à  $B$ ; portons une longueur  $\frac{b-c}{P_c C - B P_c} \overline{P_c C}$  sur le prolongement de  $AB$  à partir de  $B$  et joignons à  $C$ ; l'intersection de ces droites est le premier point. Portons une longueur  $\frac{c-a}{P_b A - C P_b} \overline{C P_b}$  sur le prolongement de  $BA$  à partir de  $A$  et joignons à  $C$ ; portons une longueur  $\frac{c-a}{P_b A - C P_b} \overline{P_b A}$  sur le prolongement de  $BC$  à partir de  $C$  et joignons à  $A$ ; l'intersection de ces droites est le deuxième point. Portons une longueur  $\frac{a-b}{P_c B - A P_c} \overline{A P_c}$  sur le prolongement de  $CB$  à partir de  $B$  et joignons à  $A$ ; portons une longueur  $\frac{a-b}{P_c B - A P_c} \overline{P_c B}$  sur le prolongement de  $CA$  à partir de  $A$  et joignons à  $B$ ; l'intersection de ces droites est le troisième point. Ils se situent respectivement sur les cévénnes isotomiques (p. 15) de  $AP_a$ , de  $BP_b$ , de  $CP_c$  (cf. les cévénnes isotomiques  $AJ_a$  et  $AJ_{a_2}$ ,  $BJ_b$  et  $BJ_{b_2}$ ,  $CJ_c$  et  $CJ_{c_2}$  pour les points adjoints de  $\Gamma$  et  $N$ ).

### Note 2

D'une part, les perpendiculaires abaissées de  $I_a$ , de  $I_b$ , de  $I_c$  respectivement sur  $a$ , sur  $b$ , sur  $c$ , qui sont  $I_a J_{aa}, I_b J_{bb}, I_c J_{cc}$ , sont concourantes:

$(I_a J_{aa}, I_b J_{bb}, I_c J_{cc})^*$ ; nous poserons  $(I_a J_{aa}, I_b J_{bb}, I_c J_{cc}) \Rightarrow \Pi$   
 et on a  $\Pi I_a = \Pi I_b = \Pi I_c$ , c.à.d. que ce point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle  $I_a I_b I_c$ :  $\Pi = \circ [I_a, I_b, I_c] = \text{sym}_0 I$ .

D'autre part, les perpendiculaires abaissées de  $I$ , de  $I_b$  et de  $I_c$  respectivement sur  $a$ , sur  $c$  et sur  $b$  sont aussi concourantes et semblablement pour les perpendiculaires abaissées de  $I$ ,  $I_c$  et  $I_a$  sur  $b$ ,  $a$  et  $c$ , ainsi que de  $I$ ,  $I_a$  et  $I_b$  sur  $c$ ,  $b$  et  $a$ :

$(I_a J_b, I_b J_c, I_c J_a)^*$ ,  $(I_b J_c, I_c J_a, I_a J_b)^*$ ,  $(I_c J_a, I_a J_b, I_b J_c)^*$  et si on pose  $(I_a J_b, I_b J_c, I_c J_a) \Rightarrow \Pi_a$ ,  $(I_b J_c, I_c J_a, I_a J_b) \Rightarrow \Pi_b$ ,  $(I_c J_a, I_a J_b, I_b J_c) \Rightarrow \Pi_c$ , on a  $\Pi_a I_a = \Pi_a I_b = \Pi_a I_c$ ,  $\Pi_b I_b = \Pi_b I_c = \Pi_b I_a$ ,  $\Pi_c I_c = \Pi_c I_a = \Pi_c I_b$ , c.à.d. que  $\Pi_a = \circ [0(I, I_b, I_c)]$ ,  $\Pi_b = \circ [0(I, I_c, I_a)]$ ,  $\Pi_c = \circ [0(I, I_a, I_b)]$ .

Les cercles circonscrits à  $I_b I_c$ , à  $I_c I_a$  et à  $I_a I_b$ , de centres respectifs  $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c$ , ont pour rayon  $2R$ , comme le cercle circonscrit à  $I_a I_b I_c$ , de centre  $\Pi$  ;  $\overline{\Pi I_a} = \overline{\Pi I_b} = \overline{\Pi I_c} = \overline{\Pi_a I_b} = \overline{\Pi_a I_c} = \overline{\Pi_b I_c} = \overline{\Pi_b I_a} = \overline{\Pi_c I_a} = \overline{\Pi_c I_b} = 2R$  ; on a non seulement  $\Pi = \text{sym}_O I$ , mais aussi  $\Pi_a = \text{sym}_O I_a$ ,  $\Pi_b = \text{sym}_O I_b$ ,  $\Pi_c = \text{sym}_O I_c$  et par suite (p.6)  $\Pi_a \Pi_b \Pi_c = \text{hom}(O, -1) I_a I_b I_c$ ,  $\Pi_b \Pi_c \parallel I_b I_c$ ,  $\Pi_c \Pi_a \parallel I_c I_a$ ,  $\Pi_a \Pi_b \parallel I_a I_b$ .

Note 3

Le centre radical (p.7) des cercles exinscrits  $E_a, E_b, E_c$  est le point compl 1, centre du cercle inscrit au triangle complémentaire, dont il est question dans la note de la page 55. Il est en effet à l'intersection des droites  $\frac{1}{2}(I_{bb}, I_{cc}) \frac{1}{2}(I_{cc}, I_{aa})$ ,  $\frac{1}{2}(I_{aa}, I_{bb}) \frac{1}{2}(I_{cc}, I_{aa})$ , qui sont les axes radicaux de ces cercles pris deux à deux et qui portent les bissectrices du triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$  respectivement issues de  $M_a$ , de  $M_b$ , de  $M_c$  (on a notamment  $R_{E_c}(M_a) = R_{E_c}(M_b) = (\frac{b+c}{2})^2$ ,  $R_{E_c}(M_b) = R_{E_a}(M_b) = (\frac{c+a}{2})^2$ ,  $R_{E_a}(M_c) = R_{E_b}(M_c) = (\frac{a+b}{2})^2$ ). Le centre radical des cercles  $E_b, E_c, E_a$  est le centre du cercle exinscrit au triangle complémentaire qui se trouve sur sa bissectrice intérieure  $M_a$  compl 1 (+ énoncé analogues pour le centre radical de  $E_c, E_a, E_b$  et celui de  $E_a, E_b, E_c$ ).

Le point compl 1, centre radical de  $E_a, E_b, E_c$ , est le point par lequel passe chacun des trois cercles tangents intérieurement à l'un de ces trois cercles et extérieurement aux deux autres.

Note 4

À propos des points  $Q_a, Q_b, Q_c$  (p.53), il est à remarquer que  $\text{dist}_a Q_a = \text{dist}_{I_b} Q_a = \text{dist}_{I_c} Q_a$ ,  $\text{dist}_b Q_b = \text{dist}_{I_c} Q_b = \text{dist}_{I_a} Q_b$ ,  $\text{dist}_c Q_c = \text{dist}_{I_a} Q_c = \text{dist}_{I_b} Q_c$  ; ainsi, lorsque ABC est acutangle,  $Q_a, Q_b, Q_c$  sont les centres des cercles inscrits respectivement aux triangles  $A_i BC, B_i CA, C_i AB$  ; lorsque ABC est obtusangle en A,  $Q_a$  est le centre d'un cercle exinscrit au triangle  $A_i BC$ , tandis que  $Q_b$  et  $Q_c$  sont encore les cercles inscrits respectivement aux triangles  $B_i CA$  et  $C_i AB$ . Dans un cas comme dans l'autre, nous appellerons respectivement  $I_a, I_b, I_c$  ces cercles inscrits (exinscrit pour l'un d'eux si ABC est obtusangle) aux triangles  $A_i BC, B_i CA, C_i AB$ , c.à.d. les cercles centrés en  $Q_a, Q_b, Q_c$  ( $\circ(I_a) = Q_a, \circ(I_b) = Q_b, \circ(I_c) = Q_c$ ) et tangents respectivement à  $a, b, c$  ( $a \text{ tang } I_a, b \text{ tang } I_b, c \text{ tang } I_c$ ), étant donné que

$$(Z_a, a) = M_a, \quad (Z_b, b) = M_b, \quad (Z_c, c) = M_c, \quad \text{c.c.d.}$$

$\text{dist}_a Q_a = \overline{Q_a M_a}$ ,  $\text{dist}_b Q_b = \overline{Q_b M_b}$ ,  $\text{dist}_c Q_c = \overline{Q_c M_c}$ , leurs rayons respectifs valent  $\overline{Q_a M_a} = R_0 \mp \overline{OM_a} = (1 - \cos A) R_0$ ,  $\overline{Q_b M_b} = R_0 - \overline{OM_b} = (1 - \cos B) R_0$ ,  $\overline{Q_c M_c} = R_0 - \overline{OM_c} = (1 - \cos C) R_0$ , or dans la première égalité, le signe supérieur vaut si  $\hat{A} < 1 \text{ rad}$  et le signe inférieur si le triangle est obtusangle en A, ce qui donne bien  $(1 - \cos \hat{A}) R_0$  dans les deux cas (on suppose de toute façon  $\hat{B}$  et  $\hat{C} < 1 \text{ rad}$ ).

Propriétés :

$Q_{ab} Q_{ac} \text{ tang } Z_a$ ,  $Q_{ab} Q_{bc} \text{ tang } Z_b$ ;  $Q_{bc} Q_{ba} \text{ tang } Z_a$ ,  $Q_{bc} Q_{ca} \text{ tang } Z_a$ ;  $Q_{ca} Q_{cb} \text{ tang } Z_b$ ,  $Q_{ca} Q_{ab} \text{ tang } Z_b$ ; rappelons que ces trois tangentes communes extérieures aux cercles  $Z_a, Z_b, Z_c$  (les trois autres sont  $t_a, t_b, t_c$ ) sont parallèles aux côtés de ABC et passent toutes trois par I (p. 53). Les axes radicaux, c.à d. (p. 7) les droites portant les cordes communes, de  $Z_a$  et  $Z_b$ , de  $Z_b$  et  $Z_c$ , de  $Z_c$  et  $Z_a$  forment un triangle homothétique à ABC (centre d'homothétie: point de coordonnées normales  $\lambda = a^2, \mu = b^2, \nu = c^2$ ) et le centre de son cercle inscrit coïncide avec le centre radical (p. 7) des trois cercles  $Z_a, Z_b, Z_c$ .

### Note 5

Posons  $(J_a J_b, J_c J_a) \Rightarrow J_A$ ,  $(J_b J_c, J_a J_b) \Rightarrow J_B$ ,  $(J_c J_a, J_b J_c) \Rightarrow J_C$ .  
On a  $J_A \in h_a$ ,  $J_B \in h_b$ ,  $J_C \in h_c$ ;  
 $\overline{AJ_A} = r_a$ ,  $\overline{BJ_B} = r_b$ ,  $\overline{CJ_C} = r_c$ ;  
 $\circ [O(J_A, J_B, J_C)] = H$  avec pour rayon

$$\begin{aligned} \overline{HJ_A} = \overline{HJ_B} = \overline{HJ_C} &= \frac{1}{2} (r + r_a + r_b + r_c) = 2R_0 + r \\ &= R_0 (1 + \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}) = 2R_0 \left(1 + 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2}\right). \end{aligned}$$

Notons aussi que les droites  $J_A J_A$ ,  $J_B J_B$ ,  $J_C J_C$  portent les symédianes (p. 75) respectives des triangles  $J_a J_b J_c$  et  $J_A J_B J_C$ .

### Théorème de Feuerbach

On a  $E_a \text{ tang } E_b$   
et nous poserons pour le point de contact entre ces deux cercles, appelé point de Feuerbach  $(E_a, E_b) \Rightarrow \Phi$ , (d'où  $\Phi \in IO_3$ ).

On a aussi  $E_a \text{ tang } E_c$ ,  $E_b \text{ tang } E_c$ ,  $E_c \text{ tang } E_a$   
et nous poserons  $(E_a, E_b) \Rightarrow \Phi_a$ ,  $(E_b, E_c) \Rightarrow \Phi_b$ ,  $(E_c, E_a) \Rightarrow \Phi_c$ .

Théorème de Hamilton:  $E_9$  est aussi tangent aux cercles inscrits et exinscrits aux triangles HBC, HCA, HAB (conséquence directe de ce que  $E_9$  est aussi le cercle des neuf points de ces trois triangles: p. 50).

Soient comme un peu plus haut (pp. 60-61)  $J'_a, J'_b, J'_c$  les points diamétralement

opposés et  $J_a, J_b, J_c$  sur  $\mathcal{O}_i$ ; on a

$$\Phi \in \mathcal{J}'_a \perp \frac{1}{2}(A, J), \quad \Phi \in \mathcal{J}'_b \perp \frac{1}{2}(B, I), \quad \Phi \in \mathcal{J}'_c \perp \frac{1}{2}(C, I).$$

On a aussi  $\Phi \in \text{sym}_{\mathcal{H}_a} \mathcal{O}_I$ ,  $\Phi \in \text{sym}_{\mathcal{H}_a} \perp (\mathcal{O}_I, \mathcal{H}_a)$ ,  $\Phi \in \text{sym}_{\mathcal{H}_c} \mathcal{O}_I$ , ainsi que des relations analogues obtenues par permutation des lettres.

Si nous posons  $(a, \mathcal{O}_I) \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{O}_I}$ ,  $(b, \mathcal{O}_I) \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{O}_I}$ ,  $(c, \mathcal{O}_I) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{O}_I}$ , on a encore

$$\Phi \in \circ(\Lambda_{\mathcal{B}_{\mathcal{O}_I}}), \quad \Phi \in \circ(\mathcal{B}_{\mathcal{B}_{\mathcal{O}_I}}), \quad \Phi \in \circ(\mathcal{C}_{\mathcal{C}_{\mathcal{O}_I}}).$$

Enfin,  $\Phi$  est l'orthopôle (p. 21) de la droite  $\mathcal{O}_I$ .

### Autres théorèmes

Posons  $\text{proj}_a B \Rightarrow I_{Ba}$  et  $\text{proj}_a B \Rightarrow E_{Ba}$ ; on a

$$I_{Ba} E_{Ba} \parallel b, \quad M_b \in I_{Ba} E_{Ba}, \quad \overline{M_a I_{Ba}} = \frac{|b-c|}{2}, \quad \overline{M_c E_{Ba}} = \frac{b+c}{2},$$

ainsi que des propriétés analogues obtenues par permutation des lettres.

Si on pose de même  $\text{proj}_a C \Rightarrow I_{Ca}$ , on a aussi

$$\overline{B I_{Ba}} \cdot \overline{A I_{Ca}} = \overline{C I_{Ca}} \cdot \overline{A I_{Ba}} = S \quad \text{où } S \text{ est l'aire du triangle } ABC \text{ (voir p. 89),}$$

ainsi encore que des relations analogues obtenues par permutation des lettres.

Considérons enfin la parallèle à une bissectrice intérieure menée par le pied d'une autre et de même la parallèle à cette autre menée par le pied de la première, puis les intersections de ces deux parallèles avec la bissectrice extérieure relative au troisième sommet; avec  $(\|i_a, D_c), e_a) \Rightarrow D_{ac}^e$  et  $(\|i_c, D_b), e_c) \Rightarrow D_{cb}^e$ , on a

$$(B, C, D_{ac}^e, D_{cb}^e) \circ, \quad (A, D_b, B, D_{cb}^e) \circ \text{ et } (A, D_c, C, D_{ac}^e) \circ.$$

(+ évidemment des théorèmes analogues par permutation des lettres).

### Problème de Mohr

Il consiste à inscrire dans le triangle  $ABC$  trois cercles tangents entre eux et tangents chacun à deux côtés du triangle.

On peut procéder comme suit; on trace les cercles inscrits aux trois triangles  $IBC$ ,  $ICA$  et  $IAB$  et on mène les trois tangentes communes intérieures à ces cercles pris deux à deux; les cercles cherchés sont les cercles inscrits aux trois triangles formés par une de ces tangentes et deux côtés du triangle  $ABC$  (de deux manières possibles pour chacun d'eux).

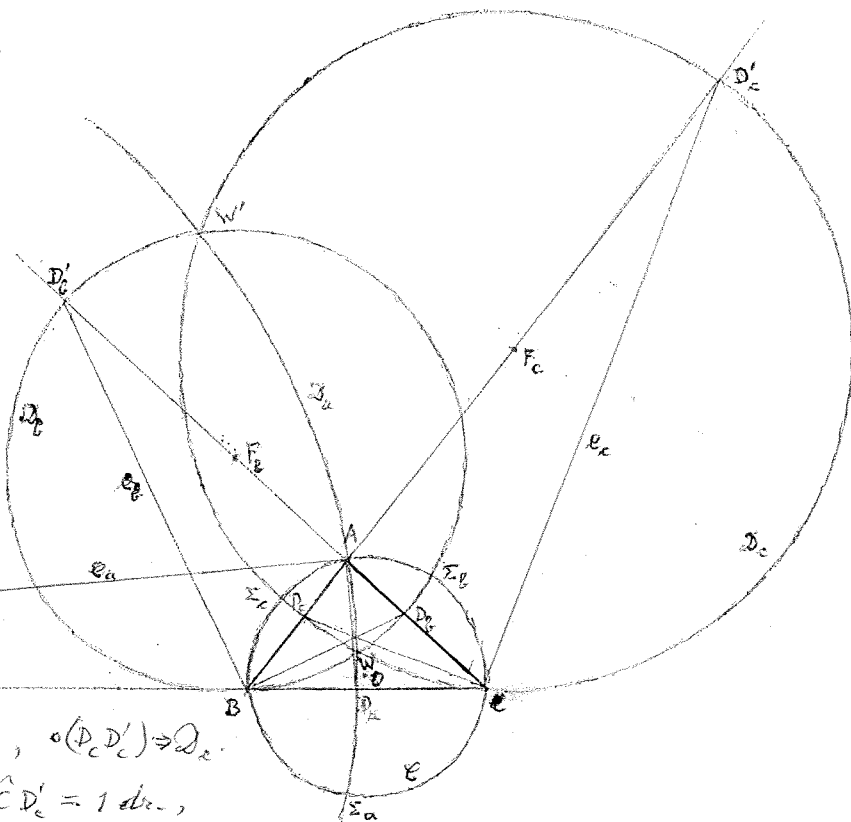
Distance de  $A$  aux points de contact du cercle dans l'angle  $BAC$ :  $\frac{1}{2}(\rho - r + \overline{AI} - \overline{BI} - \overline{CI})$ ,  
 " "  $B$  " " " " " " " "  $CBA$ :  $\frac{1}{2}(\rho - r - \overline{AI} + \overline{BI} - \overline{CI})$ ,  
 " "  $C$  " " " " " " " "  $ACB$ :  $\frac{1}{2}(\rho - r - \overline{AI} - \overline{BI} + \overline{CI})$ ,  
 où  $\overline{AI}$ ,  $\overline{BI}$ ,  $\overline{CI}$  ont les valeurs données plus haut:  $\overline{AI} = \sqrt{\frac{bc(\rho-a)}{\rho}}$ ,  $\overline{BI} = \sqrt{\frac{ca(\rho-b)}{\rho}}$ ,  $\overline{CI} = \sqrt{\frac{ab(\rho-c)}{\rho}}$  (p. 51).

(Note: le problème consistant à tracer trois cercles tangents entre eux extérieurement deux à deux et ayant pour centres respectifs trois points donnés  $A, B$  et  $C$  se résout comme suit: on trace les cercles ayant ces points pour centres et pour rayons respectifs  $\overline{AO}_a = \overline{AO}_c = \rho - a$ ,  $\overline{BO}_c = \overline{BO}_a = \rho - b$  et  $\overline{CO}_a = \overline{CO}_b = \rho - c$ ;  $\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b$  et  $\mathcal{O}_c$  sont les points de contact entre ces cercles.)

Cercles d'Apollonios

Définition et notations

Un cercle d'Apollonios est un cercle qui a pour diamètre le segment de droite dont des extrémités sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure d'un même angle du triangle; il y en a donc trois et nous les désignerons par  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ .



par  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$  ;  $\leftarrow \mathcal{D}_a \leftarrow F_a$

$\circ(\mathcal{D}_a, \mathcal{D}'_a) \Rightarrow \mathcal{D}_a$  ,  $\circ(\mathcal{D}_b, \mathcal{D}'_b) \Rightarrow \mathcal{D}_b$  ,  $\circ(\mathcal{D}_c, \mathcal{D}'_c) \Rightarrow \mathcal{D}_c$ .

Puisque  $\widehat{D}_a A D'_a = \widehat{D}_b B D'_b = \widehat{D}_c C D'_c = 1 \text{ dr.}$ ,

on a aussi  $\mathcal{D}_a = \circ(A, \mathcal{D}_a, \mathcal{D}'_a)$  ,  $\mathcal{D}_b = \circ(B, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}'_b)$  ,  $\mathcal{D}_c = \circ(C, \mathcal{D}_c, \mathcal{D}'_c)$ .

Nous désignerons leurs centres respectifs par  $F_a, F_b, F_c$  :

$\circ(\mathcal{D}_a) \Rightarrow F_a$  ,  $\circ(\mathcal{D}_b) \Rightarrow F_b$  ,  $\circ(\mathcal{D}_c) \Rightarrow F_c$ .

On a donc  $F_a = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_a, \mathcal{D}'_a)$  ,  $F_b = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_b, \mathcal{D}'_b)$  ,  $F_c = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_c, \mathcal{D}'_c)$ .

Propriété fondamentale

$P \in \mathcal{D}_a \sim \frac{PB}{PC} = \frac{c}{b}$  ,  $P \in \mathcal{D}_b \sim \frac{PC}{PA} = \frac{a}{c}$  ,  $P \in \mathcal{D}_c \sim \frac{PA}{PB} = \frac{b}{a}$  ;

le cercle  $\mathcal{D}_a$  par exemple est le lieu des points dont les distances à deux points donnés B et C sont dans un rapport constant  $= \frac{c}{b}$  (et en particulier  $= \frac{D_a B}{D_a C} = \frac{D'_a B}{D'_a C}$  pour les extrémités du diamètre  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}'_a$ , qui divisent harmoniquement le segment BC). Une conséquence de ceci est que des cercles de centres B et C ayant des rayons respectifs proportionnels à  $c = \overline{BA}$  et  $b = \overline{CA}$  sont vus sous un même angle de tout point  $P \in \mathcal{D}_a$  (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Autres propriétés, centres isodynamiques

On a  $(F_a, F_b, F_c) -$  et les cercles  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$  ont des points d'intersections W et W' communs, appelés centres isodynamiques (qui sont les points inverses des centres isogones Y et Y' ; voir pp. 98-99), avec évidemment  $WW' \perp F_a F_b F_c$  et  $\frac{1}{2}(W, W') \in F_a F_b F_c$  ; ces trois

cercles ont donc même corde commune (axe radical)  $WW'$ , appelée corde d'Apollonios.

Ces points sont les points dont les distances aux sommets  $A, B, C$  du triangle sont inversement proportionnelles aux longueurs des côtés opposés :

$$a \cdot \overline{AW} = b \cdot \overline{BW} = c \cdot \overline{CW} \quad \text{et} \quad a \cdot \overline{AW'} = b \cdot \overline{BW'} = c \cdot \overline{CW'}$$

Il en résulte qu'une involution ayant pour pôle  $W$  ou  $W'$  transforme  $ABC$  en un triangle équilatéral.

Les triangles podaires de  $W$  et de  $W'$  sont équilatéraux ! si on pose  $\text{proj}_A W \Rightarrow W_a$ ,  $\text{proj}_B W \Rightarrow W_b$ ,  $\text{proj}_C W \Rightarrow W_c$  et  $\text{proj}_A W' \Rightarrow W'_a$ ,  $\text{proj}_B W' \Rightarrow W'_b$ ,  $\text{proj}_C W' \Rightarrow W'_c$ , on a

$$\overline{W_b W_c} = \overline{W_c W_a} = \overline{W_a W_b} \quad \text{et} \quad \overline{W'_b W'_c} = \overline{W'_c W'_a} = \overline{W'_a W'_b}$$

Si on désigne par  $A_W, B_W, C_W$  les secondes intersections de  $AW, BW, CW$  avec  $\mathcal{C}$  (les premières étant évidemment  $A, B, C$ ) et par  $A_{W'}, B_{W'}, C_{W'}$  les secondes intersections de  $AW', BW', CW'$  avec  $\mathcal{C}$  (même remarque), on obtient aussi des triangles équilatéraux :

$$\overline{B_W C_W} = \overline{C_W A_W} = \overline{A_W B_W} \quad \text{et} \quad \overline{B_{W'} C_{W'}} = \overline{C_{W'} A_{W'}} = \overline{A_{W'} B_{W'}}$$

Notons que  $\frac{\overline{WA_W}}{a} = \frac{\overline{WB_W}}{b} = \frac{\overline{WC_W}}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{WA'_{W'}}}{a} = \frac{\overline{WB'_{W'}}}{b} = \frac{\overline{WC'_{W'}}}{c}$

On a  $O \in WW'$ ,  $OA \text{ tang } \mathcal{D}_a$ ,  $OB \text{ tang } \mathcal{D}_b$ ,  $OC \text{ tang } \mathcal{D}_c$ ,

$F_a A \text{ tang } \mathcal{C}$ ,  $F_b B \text{ tang } \mathcal{C}$ ,  $F_c C \text{ tang } \mathcal{C}$ ,

c.à.d. que le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  est orthogonal à  $\mathcal{D}_a$ , à  $\mathcal{D}_b$ , à  $\mathcal{D}_c$ ,

on a  $F_a \in t_a$ ,  $F_b \in t_b$ ,  $F_c \in t_c$

et plus explicitement (cf. p. 52)  $F_a = (a, t_a)$ ,  $F_b = (b, t_b)$ ,  $F_c = (c, t_c)$ ,

et par suite  $A_f = (BF_b, CF_c)$ ,  $B_f = (CF_c, AF_a)$ ,  $C_f = (AF_a, BF_b)$  ;

$$AF_a \perp OA, \quad BF_b \perp OB, \quad CF_c \perp OC ;$$

$W \in \text{pol}_{\mathcal{C}} W'$ ,  $W' \in \text{pol}_{\mathcal{C}} W$ , d'où  $\mathcal{R}_c^2 = \overline{OW} \cdot \overline{OW'}$ .

Désignons par  $R_a, R_b, R_c$  les rayons respectifs de  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ , c.à.d.

$$\overline{F_a D_a} = \overline{F_a D'_a} = \overline{F_a A} \Rightarrow R_a, \quad \overline{F_b D_b} = \overline{F_b D'_b} = \overline{F_b B} \Rightarrow R_b, \quad \overline{F_c D_c} = \overline{F_c D'_c} = \overline{F_c C} \Rightarrow R_c,$$

$$\text{ou encore} \quad \overline{D_a D'_a} \Rightarrow 2R_a, \quad \overline{D_b D'_b} \Rightarrow 2R_b, \quad \overline{D_c D'_c} \Rightarrow 2R_c ;$$

d'après les valeurs de  $\overline{D_a D'_a}$ ,  $\overline{D_b D'_b}$ ,  $\overline{D_c D'_c}$  données plus haut (p. 56-57), on a donc

$$R_a = \frac{abc}{|b^2 - c^2|}, \quad R_b = \frac{abc}{|c^2 - a^2|}, \quad R_c = \frac{abc}{|a^2 - b^2|} ;$$

si l'on a par exemple  $a > b > c$ , il en résulte que  $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c}$  ;

$$\text{on a} \quad \overline{AF_a}^2 = R_a^2 = \overline{BF_a} \cdot \overline{CF_a}, \quad \overline{BF_b}^2 = R_b^2 = \overline{CF_b} \cdot \overline{AF_b}, \quad \overline{CF_c}^2 = R_c^2 = \overline{AF_c} \cdot \overline{BF_c}$$



Notons enfin que l'on a :

$$\text{pour } F_a \text{ sur } BC, \quad \overline{BF_a} = \frac{ac^2}{|b^2 - c^2|}, \quad \overline{CF_a} = \frac{ab^2}{|b^2 - c^2|};$$

$$\text{pour } F_b \text{ sur } CA, \quad \overline{CF_b} = \frac{ba^2}{|c^2 - a^2|}, \quad \overline{AF_b} = \frac{bc^2}{|c^2 - a^2|};$$

$$\text{pour } F_c \text{ sur } AB, \quad \overline{AF_c} = \frac{cb^2}{|a^2 - b^2|}, \quad \overline{BF_c} = \frac{ca^2}{|a^2 - b^2|}.$$

### Intersections des cercles d'Apollonios avec le cercle circonscrit

Si nous désignons par  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c$  les secondes intersections respectives de  $\mathcal{C}$  avec  $D_a, D_b, D_c$  (autres que  $A, B, C$  respectivement), de sorte qu'on a  $F_a \Sigma_a \text{ tang } \mathcal{C}$ ,  $F_b \Sigma_b \text{ tang } \mathcal{C}$ ,  $F_c \Sigma_c \text{ tang } \mathcal{C}$ , (avec  $\overline{F_a \Sigma_a} = \overline{F_a A}$ ,  $\overline{F_b \Sigma_b} = \overline{F_b B}$ ,  $\overline{F_c \Sigma_c} = \overline{F_c C}$ ), il résulte de l'orthogonalité de  $\mathcal{C}$  à  $D_a$ , à  $D_b$ , à  $D_c$ , qu'on a aussi

$$\Sigma_a F_a \perp O \Sigma_a, \quad \Sigma_b F_b \perp O \Sigma_b, \quad \Sigma_c F_c \perp O \Sigma_c.$$

Pour la sécante commune  $A \Sigma_a$  (axe radical) de  $\mathcal{C}$  et  $D_a$ ,  
la sécante commune  $B \Sigma_b$  (axe radical) de  $\mathcal{C}$  et  $D_b$ ,  
la sécante commune  $C \Sigma_c$  (axe radical) de  $\mathcal{C}$  et  $D_c$ , on a alors

$$A \Sigma_a = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_a, \quad B \Sigma_b = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_b, \quad C \Sigma_c = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_c;$$

de plus, on a évidemment  $OF_a \perp A \Sigma_a$ ,  $OF_b \perp B \Sigma_b$ ,  $OF_c \perp C \Sigma_c$ .

Relations avec les sommets  $A_t, B_t, C_t$  du triangle tangentiel (p. 45):  
 $\overline{A_t \Sigma_a} \cdot \overline{A_t A} = \overline{A_t B}^2 = \overline{A_t C}^2$ ,  $\overline{B_t \Sigma_b} \cdot \overline{B_t B} = \overline{B_t C}^2 = \overline{B_t A}^2$ ,  $\overline{C_t \Sigma_c} \cdot \overline{C_t C} = \overline{C_t A}^2 = \overline{C_t B}^2$ ,

Voici plus loin les relations avec les symédianes, qui sont portées par les polaires respectives de  $F_a, F_b, F_c$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$ , et avec le point de Lemoine, dont la polaire, la droite de Lemoine  $l$ , est la droite  $\overline{F_a F_b F_c}$ .

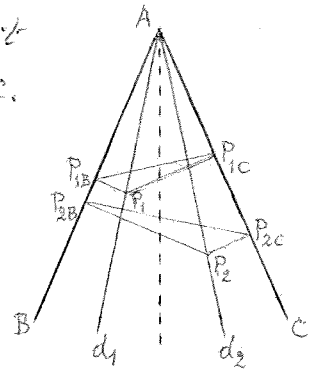
il est ainsi que, comme pour tous les points situés sur les symédianes (p. 75), on a

$$\frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_a}{b} = \frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_a}{c}, \quad \frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_b}{c} = \frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_b}{a}, \quad \frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_c}{a} = \frac{\text{dist}_{\mathcal{C}} \Sigma_c}{b}.$$

Céviennes conjuguées isogonales et points inverses

Rappel

Nous avons rappelé plus haut (p.5) la définition de la conjuguée isogonale  $d_2 = \text{cisog}_{BAC} d_1$  d'une demi-droite  $d_1$  issue du sommet A d'un angle BAC par rapport aux côtés de cet angle et nous avons dit que  $d_1$  et  $d_2$  font des angles égaux avec la bissectrice de BAC.



Soient  $P_1 \in d_1$  et  $P_2 \in d_2$ ; les projections  $\text{proj}_{AB} P_1 \Rightarrow P_{1B}$ ,  $\text{proj}_{AC} P_1 \Rightarrow P_{1C}$ ,  $\text{proj}_{AB} P_2 \Rightarrow P_{2B}$ ,  $\text{proj}_{AC} P_2 \Rightarrow P_{2C}$  de ces points sur les côtés AB et AC de l'angle sont telles que  $P_{1B}P_{1C} \perp d_2$ ,  $P_{2B}P_{2C} \perp d_1$ ,  $\overline{P_1P_{1B}} \cdot \overline{P_2P_{2B}} = \overline{P_1P_{1C}} \cdot \overline{P_2P_{2C}}$  (condition nécessaire et suffisante) et  $P_{1B}P_{1C} \uparrow BAC \downarrow P_{2B}P_{2C}$  et cet antiparallélisme de  $P_{1B}P_{1C}$  et  $P_{2B}P_{2C}$  entraîne  $(P_{1B}, P_{1C}, P_{2B}, P_{2C})_0$  et  $\overline{AP_{1B}} \cdot \overline{AP_{2B}} = \overline{AP_{1C}} \cdot \overline{AP_{2C}}$ .

Signalons que si deux droites sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle, les points milieux des segments de ces droites compris dans l'angle, joints au sommet A, donnent des conjuguées isogonales. En d'autres termes, les médianes issues de A dans deux triangles tels que  $AP_{1B}P_{1C}$  et  $AP_{2B}P_{2C}$ , dont les côtés opposés à A sont antiparallèles, sont conjuguées isogonales par rapport aux côtés de l'angle A, c.à.d. qu'on a  $P_{1B}P_{1C} \uparrow BAC \downarrow P_{2B}P_{2C} \rightarrow A \frac{1}{2}(P_{2B}, P_{2C}) = \text{cisog}_{BAC} A \frac{1}{2}(P_{1B}, P_{1C})$ .

Céviennes conjuguées isogonales

Ce qui vient d'être rappelé s'applique aux céviennes issues de chacun des sommets du triangle ABC et à leurs conjuguées isogonales par rapport aux côtés adjacents. Pour les notations  $\text{cisog}_{BAC}$ ,  $\text{cisog}_{CBA}$ ,  $\text{cisog}_{ACB}$ , nous écrirons plus simplement  $\text{cisog}_A$ ,  $\text{cisog}_B$ ,  $\text{cisog}_C$ ; ainsi pour deux céviennes conjuguées isogonales  $v_{a1}$  et  $v_{a2}$  issues du sommet A par rapport aux côtés b et c, nous écrirons  $v_{a2} = \text{cisog}_A v_{a1}$  (ou  $v_{a1} = \text{cisog}_A v_{a2}$  puisque la relation  $\text{cisog}$  est une relation symétrique), ce qui implique  $\text{ang}(v_{a1}, i_a) = \text{ang}(i_a, v_{a2})$  où  $i_a$  est la bissectrice intérieure de l'angle BAC (p.51).

Les bissectrices intérieures  $i_a, i_b, i_c$  ou extérieures  $e_a, e_b, e_c$  sont leurs propres conjuguées isogonales.

Théorèmes

Soient les céviennes conjuguées isogonales  $v_{a1} = AV_{a1}$  et  $v_{a2} = AV_{a2} = \text{cisog}_A v_{a1}$ , où  $V_{a1}$  et  $V_{a2}$  sont leurs pieds:  $V_{a1} = (v_{a1}, a)$ ,  $V_{a2} = (v_{a2}, a)$ ; on a

$$\frac{v_{a1}^R}{v_{a2}^L} = \frac{\overline{BV_{a1}} \cdot \overline{V_{a1}C}}{\overline{BV_{a2}} \cdot \overline{V_{a2}C}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{BV_{a1}} \cdot \overline{BV_{a2}}}{\overline{CV_{a1}} \cdot \overline{CV_{a2}}} = \frac{c^2}{b^2} \quad (\text{relation de Steiner}),$$

ainsi que des relations analogues pour des droites conjuguées isogonales issues des sommets B ou C.

Soient  $V_{a1}''$  et  $V_{a2}''$  les intersections, autres que A, respectivement de  $v_{a1}$  et  $v_{a2}$  avec le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ ; toujours avec  $v_{a2} = \text{cisog}_A v_{a1}$ , on a  $V_{a1}'' V_{a2}'' \parallel BC$  et les similitudes (p.121)  $AV_{a1}B \sim ACV_{a2}''$ ,  $AV_{a1}C \sim ABV_{a2}''$ ,  $AV_{a2}B \sim ACV_{a1}''$ ,  $AV_{a2}C \sim ABV_{a1}''$ , d'où, entre autres,  $v_{a1} \cdot \overline{AV_{a2}''} = \overline{AV_{a1}''} \cdot \overline{AV_{a2}''} = bc$  et  $v_{a2} \cdot \overline{AV_{a1}''} = \overline{AV_{a2}''} \cdot \overline{AV_{a1}''} = bc$ , ainsi encore que des relations analogues par permutation des lettres. Pour la wallace (p.94) de  $V_{a1}''$ , on a  $w(V_{a1}'') \perp v_{a2}$  et plus généralement (p.97)  $\text{ang}[w_\varphi(V_{a1}''), v_{a2}] = \varphi$  ou  $\text{dir.} = \varphi$ .

Si  $P \in \mathcal{C}$ , on a  $\text{cisog}_A AP \parallel \text{cisog}_B BP \parallel \text{cisog}_C CP$ ,

### Droites concourantes et points inverses

Soient les droites conjuguées isogonales  $v_{a2} = \text{cisog}_A v_{a1}$ ,  $v_{b2} = \text{cisog}_B v_{b1}$ ,  $v_{c2} = \text{cisog}_C v_{c1}$  on a  $(v_{a1}, v_{b1}, v_{c1})^* \rightsquigarrow (v_{a2}, v_{b2}, v_{c2})^*$ .

Les points  $P_1 = (v_{a1}, v_{b1}, v_{c1})$  et  $P_2 = (v_{a2}, v_{b2}, v_{c2})$  sont appelés points inverses ou conjugués isogonaux l'un de l'autre<sup>(\*)</sup>. La seconde dénomination est notamment utilisée par les auteurs qui appellent "points inverses" ce qu'avec d'autres nous appelons points réciproques (p.16). Nous écrivons alors  $P_2 = \text{inv } P_1$  (ou  $P_1 = \text{inv } P_2$ , cette relation étant évidemment symétrique).

Notons que lorsqu'un des deux points est soit intérieur, soit extérieur au triangle ABC, l'autre l'est aussi.

Exemples de points inverses: l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit, car  $AO = \text{cisog}_A h_a$ ,  $BO = \text{cisog}_B h_b$ ,  $CO = \text{cisog}_C h_c$ , on a donc  $O = \text{inv } H$  et  $H = \text{inv } O$ ; la réciproque  $H_2$  de l'orthocentre (p.37) et le centre d'homothétie  $H_t$  de  $H_1 H_2 H_3$  et  $A_1 B_1 C_1$  (p.96):  $H_2 = \text{inv } H_t$ . Le centre I du cercle inscrit et les centres  $I_a, I_b, I_c$  des cercles exinscrits sont leurs propres points inverses:  $\text{inv } I = I$ ,  $\text{inv } I_a = I_a$ ,  $\text{inv } I_b = I_b$ ,  $\text{inv } I_c = I_c$ . Le point inverse d'un point du cercle circonscrit  $P \in \mathcal{C}$  est à l'infini (dans la direction de la wallace, v. p.94, de P) puisqu'alors  $\text{cisog}_A AP \parallel \text{cisog}_B BP \parallel \text{cisog}_C CP$ .

Propriétés:  $\text{dist}_a P_1, \text{dist}_a P_2 = \text{dist}_b P_1, \text{dist}_b P_2 = \text{dist}_c P_1, \text{dist}_c P_2$ , c'est à d. que les coordonnées normales  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  de  $P_1$  et  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$  de  $P_2$  sont inversement proportionnelles les unes aux autres:  $\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_2 = \nu_1 \nu_2$ ; avec les coordonnées normales absolues:  $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}} = \frac{\text{dist}_c P_1}{\text{dist}_c P_2} = \frac{\text{dist}_a P_1}{\text{dist}_a P_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ,  $\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}} = \frac{\text{dist}_a P_1}{\text{dist}_a P_2} = \frac{\text{dist}_c P_1}{\text{dist}_c P_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ ,  $\frac{\overline{CP_1}}{\overline{CP_2}} = \frac{\text{dist}_b P_1}{\text{dist}_b P_2} = \frac{\text{dist}_a P_1}{\text{dist}_a P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . Si  $P_1$  et  $P_2$  sont intérieurs à ABC (si l'un des deux points l'est, l'autre l'est aussi),  $B\hat{P}_1 C + B\hat{P}_2 C = 2 \text{dir.} + \hat{A}$ ,  $C\hat{P}_1 A + C\hat{P}_2 A = 2 \text{dir.} + \hat{B}$ ,  $A\hat{P}_1 B + A\hat{P}_2 B = 2 \text{dir.} + \hat{C}$ .

(\*) Le lieu des points inverses de l'ensemble des points d'une courbe est appelé arguesienne de cette courbe par rapport au triangle considéré, suivant une dénomination proposée par Saltel en l'honneur de Desargues (1593-1662), mathématicien déjà admiré par Pascal et par Fermat, mais dont presque tous les travaux ont été perdus. L'arguesienne d'une droite est une ellipse.

De la propriété  $P_{1B}P_{1C} \perp d_2$  dans le rappel ci-avant, il résulte que les côtés du triangle podaire de  $P_1$  sont respectivement perpendiculaires aux droites  $AP_2$ ,  $BP_2$ ,  $CP_2$ :

si on pose  $\text{proj}_A P_1 \Rightarrow P'_{1a}$ ,  $\text{proj}_B P_1 \Rightarrow P'_{1b}$ ,  $\text{proj}_C P_1 \Rightarrow P'_{1c}$ , on a

$$AP_2 \perp P'_{1b}P'_{1c}, \quad BP_2 \perp P'_{1c}P'_{1a}, \quad CP_2 \perp P'_{1a}P'_{1b}; \text{ de même,}$$

si on pose  $\text{proj}_A P_2 \Rightarrow P'_{2a}$ ,  $\text{proj}_B P_2 \Rightarrow P'_{2b}$ ,  $\text{proj}_C P_2 \Rightarrow P'_{2c}$ , on a

$$AP_1 \perp P'_{2b}P'_{2c}, \quad BP_1 \perp P'_{2c}P'_{2a}, \quad CP_1 \perp P'_{2a}P'_{2b}.$$

On a de plus  $(P'_{1a}, P'_{1b}, P'_{1c}, P'_{2a}, P'_{2b}, P'_{2c}) \circ$ , le centre de ce cercle étant  $\frac{1}{2}(P_1, P_2)$ .

Si  $P_2 = \text{inv } P_1$  et  $Q_2 = \text{inv } Q_1$ , on a

$$\text{soit } P_1 \hat{A} Q_1 = Q_2 \hat{A} P_2, \quad \text{soit } P_1 \hat{A} Q_1 + P_2 \hat{A} Q_2 = 2 \text{ dr.},$$

ainsi que des énoncés analogues obtenus en remplaçant A par B ou par C.

### Transversales inverses

Si les pieds  $V_{a1}, V_{b1}, V_{c1}$  des droites  $v_{a1}, v_{b1}, v_{c1}$  sont en ligne droite, i.e.d. sur une même transversale  $u_1 = V_{a1}V_{b1}V_{c1}$ , les pieds  $V_{a2}, V_{b2}, V_{c2}$  de leurs conjuguées isogonales  $v_{a2}, v_{b2}, v_{c2}$  sont aussi en ligne droite, i.e.d. sur une même transversale, soit  $u_2 = V_{a2}V_{b2}V_{c2}$ :

si  $AV_{a2} = \text{cscog}_A AV_{a1}$ ,  $BV_{b2} = \text{cscog}_B BV_{b1}$ ,  $CV_{c2} = \text{cscog}_C CV_{c1}$  (où  $V_{a1} = (a, v_{a1})$ ,  $V_{b1} = (b, v_{b1})$ ,  $V_{c1} = (c, v_{c1})$ ,  $V_{a2} = (a, v_{a2})$ ,  $V_{b2} = (b, v_{b2})$ ,  $V_{c2} = (c, v_{c2})$  avec  $AV_{a1} = v_{a1}$ ,  $BV_{b1} = v_{b1}$ ,  $CV_{c1} = v_{c1}$ ,  $AV_{a2} = v_{a2}$ ,  $BV_{b2} = v_{b2}$ ,  $CV_{c2} = v_{c2}$ ),

$$\text{on a } (V_{a1}, V_{b1}, V_{c1}) - \rightsquigarrow (V_{a2}, V_{b2}, V_{c2}) - .$$

Des transversales telles que  $u_1 = V_{a1}V_{b1}V_{c1}$  et  $u_2 = V_{a2}V_{b2}V_{c2}$  avec les relations ci-dessus sont appelées transversales inverses (l'une de l'autre).

## Symédiannes, point, droite et cercles de Lemoine

### Definition et notations

La conjuguée isogonale d'une médiane par rapport aux côtés adjacents au sommet dont cette médiane est issue est appelé symédiane (issue de ce même sommet). Nous désignerons par  $s_a, s_b, s_c$  respectivement les conjuguées isogonales de  $g_a, g_b, g_c$  :

$$\text{isog}_A g_a \rightarrow s_a, \quad \text{isog}_B g_b \rightarrow s_b, \quad \text{isog}_C g_c \rightarrow s_c.$$

### Propriétés

$P \in s_a \rightarrow \frac{\text{dist}_B P}{\text{dist}_C P} = \frac{b}{c}$ ,  $P \in s_b \rightarrow \frac{\text{dist}_C P}{\text{dist}_A P} = \frac{c}{a}$ ,  $P \in s_c \rightarrow \frac{\text{dist}_A P}{\text{dist}_B P} = \frac{a}{b}$  ;  
 $A_e \in s_a, B_e \in s_b, C_e \in s_c$  ; une symédiane et la côté du triangle tangentiel passant par le sommet dont elle est issue séparent harmoniquement les côtés adjacents à ce sommet :  
 $(A, c b, s_a, t_a) = -1$ ,  $(B, a c, s_b, t_b) = -1$ ,  $(C, b a, s_c, t_c) = -1$ ,  
 c.à.d. que les droites conjuguées harmoniques de  $s_a, s_b, s_c$  par rapport aux angles  $BAC, CBA, ACB$  sont  $t_a, t_b, t_c$  respectivement.

$K_a \in s_a, K_b \in s_b, K_c \in s_c$  où, comme plus haut (p.28),  $K_a = \frac{1}{2}(H_b, H_c)$ ,

$K_b = \frac{1}{2}(H_c, H_a), K_c = \frac{1}{2}(H_a, H_b)$  ;

plus généralement  
 si  $\angle BAC = \alpha \rightarrow \frac{1}{2}(U_b, U_c) \in s_a$   
 où  $U_b = (u, b)$  et  $U_c = (u, c)$  ;

de même que  $g_a$  est le lieu des milieux des segments de transversales

parallèles à la troisième aux deux autres côtés,

$s_a$  est le lieu des milieux

des segments des

antiparallèles à

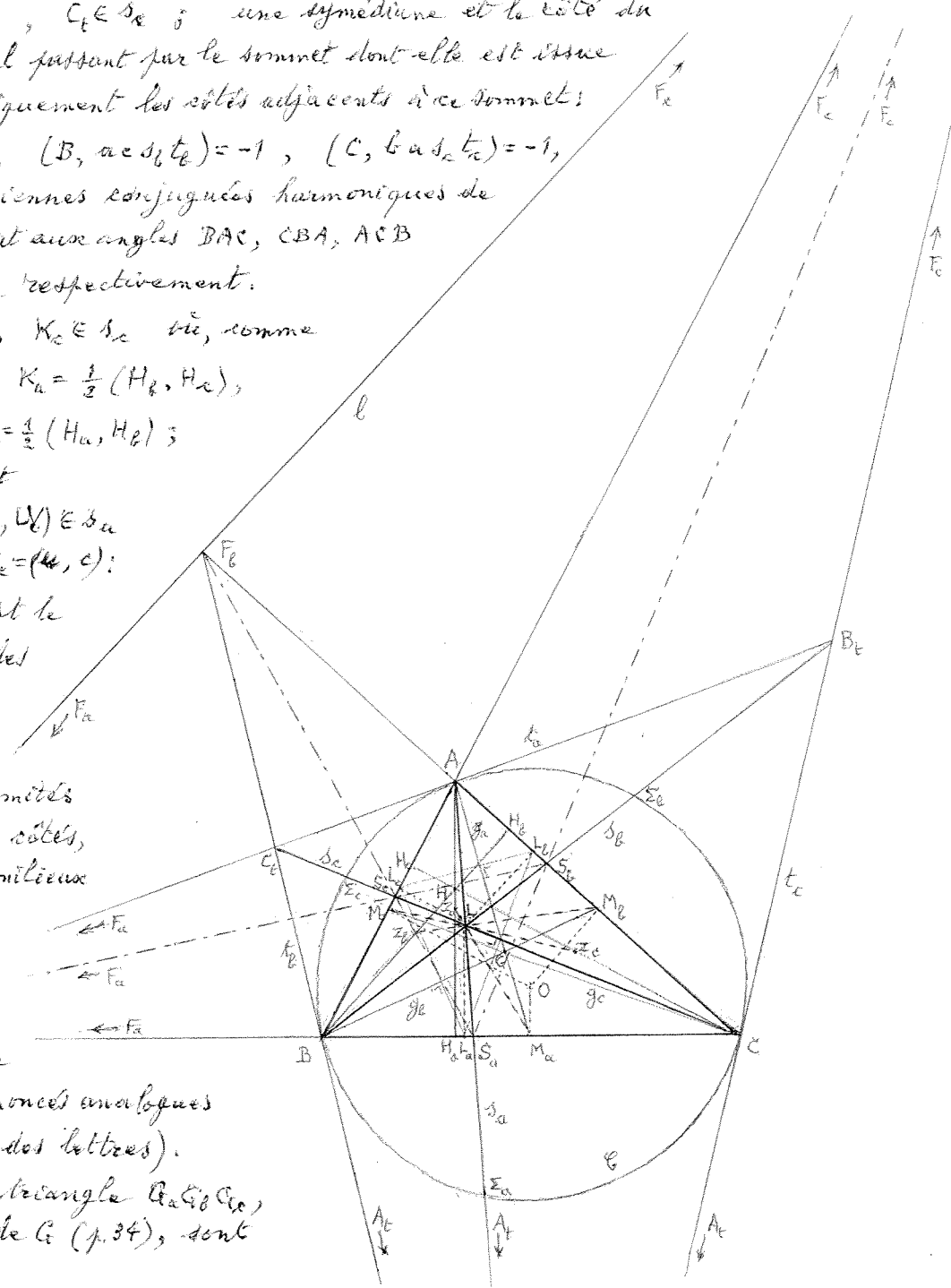
$a$  (comme  $H_b H_c$ )

limités aux deux

autres côtés (+ énoncé analogues

par permutation des lettres).

Les côtés du triangle  $A_e B_e C_e$ , triangle podaire de  $G$  (p.34), sont



perpendiculaires aux symédianes :

$$s_a \perp G_b G_c, \quad s_b \perp G_c G_a, \quad s_c \perp G_a G_b,$$

et par suite  $s_a \perp \frac{1}{2}(B, H_b) \frac{1}{2}(C, H_c)$ ,  $s_b \perp \frac{1}{2}(C, H_c) \frac{1}{2}(A, H_a)$ ,  $s_c \perp \frac{1}{2}(A, H_a) \frac{1}{2}(B, H_b)$  en raison du parallélisme de ces droites aux côtés de  $G_a G_b G_c$  (p. 34).

Cas particulier :  $s_b \perp s_c \rightarrow G \hat{B}A + A \hat{C}C = \text{ang}(g_b, c) + \text{ang}(b, g_c) = 1 \text{ dr.}$   
et réciproquement, ainsi que des énoncés analogues obtenus par permutation des lettres.

Longueurs des symédianes :

$$s_a^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left( 2 - \frac{a^2}{b^2 + c^2} \right), \quad s_b^2 = \frac{c^2 a^2}{c^2 + a^2} \left( 2 - \frac{b^2}{c^2 + a^2} \right), \quad s_c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right);$$

$$s_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} g_a, \quad s_b = \frac{2ca}{c^2 + a^2} g_b, \quad s_c = \frac{2ab}{a^2 + b^2} g_c;$$

$b > c \rightarrow s_b < s_c$  et réciproquement (et des énoncés analogues par permutation des lettres).

Pour les pieds des symédianes, posons

$$(a, s_a) \Rightarrow S_a, \quad (b, s_b) \Rightarrow S_b, \quad (c, s_c) \Rightarrow S_c;$$

$$\text{on a} \quad \frac{BS_a}{S_a C} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CS_b}{S_b A} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{AS_c}{S_c B} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\overline{BS_a} = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}, \quad \overline{S_a C} = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}, \quad \overline{CS_b} = \frac{ba^2}{c^2 + a^2}, \quad \overline{S_b A} = \frac{bc^2}{c^2 + a^2}, \quad \overline{AS_c} = \frac{cb^2}{a^2 + b^2}, \quad \overline{S_c B} = \frac{ca^2}{a^2 + b^2};$$

$$\frac{M_a D_a}{D_a S_a} = \frac{g_a}{s_a}, \quad \frac{M_b D_b}{D_b S_b} = \frac{g_b}{s_b}, \quad \frac{M_c D_c}{D_c S_c} = \frac{g_c}{s_c};$$

$$\overline{M_a S_a} = \frac{a}{2} \frac{|b^2 - c^2|}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{b^2 + c^2} \overline{M_a H_a}, \quad \overline{M_b S_b} = \frac{b}{2} \frac{|c^2 - a^2|}{c^2 + a^2} = \frac{b^2}{c^2 + a^2} \overline{M_b H_b}, \quad \overline{M_c S_c} = \frac{c}{2} \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \overline{M_c H_c}.$$

Les intersections des symédianes  $s_a, s_b, s_c$  avec le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  coïncident avec les secondes intersections respectives (autres que  $A, B, C$  respectivement)  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c$  des cercles d'Apollonius  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$  avec  $\mathcal{C}$  (p. 71), c.à.d. que

$$\Sigma_a \in s_a = AA_t, \quad \Sigma_b \in s_b = BB_t, \quad \Sigma_c \in s_c = CC_t;$$

en d'autres termes, les sécantes communes de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_a$ , de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_b$ , de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_c$  portent respectivement les symédianes  $s_a, s_b, s_c$ ; par conséquent, les relations données au chapitre avant-précédent pour ces droites peuvent s'écrire

$$s_a = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_a, \quad s_b = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_b, \quad s_c = \text{pol}_{\mathcal{C}} F_c,$$

$$s_a \perp OF_a, \quad s_b \perp OF_b, \quad s_c \perp OF_c.$$

Signalons que les symédianes du triangle  $I_a I_b I_c$  sont portées par  $I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c$  et celles du triangle  $I'_a I'_b I'_c$  sont portées par  $I'_a M'_a, I'_b M'_b, I'_c M'_c$  (+énoncés obtenus par permutation des lettres  $a, b, c$  pour celles des triangles  $I_c I_a I_b$  et  $I'_c I'_a I'_b$ ).

Point de Lemoine

Pourquoi  $(g_a, g_b, g_c)^*$ , on a  $(s_a, s_b, s_c)^*$ ;

ce point de concours des symédianes est appelé point de Lemoine (ou point de Grèbe ou point de Lhuillier) et nous le désignerons par  $L$ :  $(s_a, s_b, s_c) \Rightarrow L$ , c'est le point inverse de  $G$ :

$$L = \text{inv } G.$$

Le point L est aussi le centre radical (= point d'égalité puissance par rapport aux trois cercles : p.7) des cercles  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ .

et on a  $L \in WW'$ .

De plus, si nous désignons par  $\mathcal{P}_L(L)$  la puissance de L par rapport à  $\mathcal{C}$  (p.7), on a  $\mathcal{P}_L(L) = \overline{AL} \cdot \overline{LZ}_a = \overline{BL} \cdot \overline{LZ}_b = \overline{CL} \cdot \overline{LZ}_c$ .

Étant donné que (p.75)  $K_a \in \mathcal{D}_a, K_b \in \mathcal{D}_b, K_c \in \mathcal{D}_c$ , on a  $L = (AK_a, BK_b, CK_c)$ .

En vertu d'une propriété donnée pour  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ , on a aussi

$$L = (AA_L, BB_L, CC_L)$$

Les points harmoniquement associés (p.17) à L sont  $A_L, B_L, C_L$ , i.e.d. qu'on a

$$(AS_a LA_L) = -1, \quad (BS_b LB_L) = -1, \quad (CS_c LC_L) = -1.$$

Le point L est le point dont les distances aux côtés du triangle (donc les coordonnées normales) sont proportionnelles aux longueurs de ceux-ci :

$$\frac{\text{dist}_a L}{a} = \frac{\text{dist}_b L}{b} = \frac{\text{dist}_c L}{c} \quad \text{et par suite} \quad \frac{\text{dist}_a L}{\sin A} = \frac{\text{dist}_b L}{\sin B} = \frac{\text{dist}_c L}{\sin C};$$

en fait, les coordonnées normales absolues (p.14) de L valent respectivement  $\text{dist}_a L = \frac{a}{\lambda}, \text{dist}_b L = \frac{b}{\lambda}, \text{dist}_c L = \frac{c}{\lambda}$  avec  $\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S} = \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}$  i.e. J est l'aire (p.89) de ABC.

C'est aussi le point  $L = (M_a Z_a, M_b Z_b, M_c Z_c)$  i.e., comme plus haut (p.36),  $Z_a, Z_b, Z_c$  sont les milieux des hauteurs:  $Z_a = \frac{1}{2}(A, H_a), Z_b = \frac{1}{2}(B, H_b), Z_c = \frac{1}{2}(C, H_c)$ .

Il résulte de ce que  $L \in M_a Z_a, L \in M_b Z_b, L \in M_c Z_c$  et de ce que  $O \in m_a = M_a Z'_a, O \in m_b = M_b Z'_b, O \in m_c = M_c Z'_c$  avec (p.36)  $Z'_a = \text{sym}_{m_a} Z_a, Z'_b = \text{sym}_{m_b} Z_b, Z'_c = \text{sym}_{m_c} Z_c$ , que L et O sont des points réciproques l'un de l'autre (p.16) dans le triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$ , dont les milieux des côtés sont  $A_m, B_m, C_m$ , ce que l'on pourrait noter  $L = \text{recipr}_{M_a M_b M_c} O$ .

De plus, L est le point complémentaire (p.37) de  $H_c$ , le point réciproque de l'orthocentre (p.37) et qui est aussi le point inverse de  $H_c$  (p.73):  $L = \text{compl } H_c$ , ce qui signifie que  $(H_c, G, L) =$  avec  $\overline{GL} = \frac{1}{2} \overline{H_c G}$ .

Enfin, le centre O du cercle de Taylor (p.28) et l'orthocentre  $H_c$  du triangle orthique (p.29) sont sur la droite OL:  $(O, L, O, H_c) =$  (cf. p.30).

Signalons aussi que L est le point de Gergonne (p.55) du triangle  $K_a K_b K_c$  si ABC est acutangle ou un de ses adjoints (p.61) par rapport à ce triangle si ABC est obtusangle.

Propriétés relatives aux angles:

$$\begin{aligned} \widehat{BGC} + \widehat{BLC} &= 2dr + \widehat{A}, & \widehat{CAL} + \widehat{CLA} &= 2dr + \widehat{B}, & \widehat{ALB} + \widehat{ALB} &= 2dr + \widehat{C}; \\ \widehat{GBA} + \widehat{ACG} &= \text{ang}(g_b, c) + \text{ang}(b, g_c) = 2dr - \widehat{BLC}, \\ \widehat{GCB} + \widehat{BAG} &= \text{ang}(g_c, a) + \text{ang}(c, g_a) = 2dr - \widehat{CLA}, \\ \widehat{GAC} + \widehat{CBG} &= \text{ang}(g_a, b) + \text{ang}(a, g_b) = 2dr - \widehat{ALB}; \end{aligned}$$

pour un triangle acutangle,

$\widehat{H\hat{A}G} = \widehat{L\hat{A}O}$  et  $\widehat{L\hat{A}H} = \widehat{O\hat{A}G}$ ,  $\widehat{H\hat{B}G} = \widehat{L\hat{B}O}$  et  $\widehat{L\hat{B}H} = \widehat{O\hat{B}G}$ ,  $\widehat{H\hat{C}G} = \widehat{L\hat{C}O}$  et  $\widehat{L\hat{C}H} = \widehat{O\hat{C}G}$ ,  
pour un triangle obtusangle en A, les deux premières relations sont à remplacer par  
 $\widehat{H\hat{A}G} + \widehat{L\hat{A}O} = 2dr.$  et  $\widehat{L\hat{A}H} + \widehat{O\hat{A}G} = 2dr.$

Posons  $\text{proj}_a L \Rightarrow L_a$ ,  $\text{proj}_b L \Rightarrow L_b$ ,  $\text{proj}_c L \Rightarrow L_c$ ;

on a  $(H_a S_a L_a M_a) = -1$ ,  $(H_b S_b L_b M_b) = -1$ ,  $(H_c S_c L_c M_c) = -1$ .

Le point de Lemoine L est le point tel que la somme des carrés de ses distances aux côtés du triangle ABC soit minimum:

$$\overline{LL_a}^2 + \overline{LL_b}^2 + \overline{LL_c}^2 \text{ min.};$$

les côtés du triangle podaire de L sont perpendiculaires aux médianes:

$$L_b L_c \perp g_a, \quad L_c L_a \perp g_b, \quad L_a L_b \perp g_c$$

(et donc  $L_b L_c \parallel HK'_a$ ,  $L_c L_a \parallel HK'_b$ ,  $L_a L_b \parallel HK'_c$  où  $K'_a, K'_b, K'_c$  sont (p. 32) les intersections des côtés du triangle orthique avec les côtés correspondants de ABC, c.à.d. les points qui définissent l'axe orthique);

$$M_a L_a = \frac{a|b^2 - c^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} M_a H_a, \quad M_b L_b = \frac{b|c^2 - a^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2} M_b H_b, \quad M_c L_c = \frac{c|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} M_c H_c$$

parmi les triangles inscrits à ABC, celui dont la somme des carrés des côtés est maximum est encore le triangle podaire de L:  $\overline{L_b L_c}^2 + \overline{L_c L_a}^2 + \overline{L_a L_b}^2 \text{ min.}$

On peut noter que les (secondes) intersections des médianes avec le cercle  $\omega(H_a)$  sont les sommets d'un triangle inversement semblable (p. 32) à  $L_a L_b L_c$  et que les droites joignant ces points aux (secondes) intersections respectives des hauteurs avec ce cercle concourent en L et sont les symédianes des deux triangles ayant pour sommets les (secondes) intersections avec ce cercle, soit des hauteurs, soit des médianes.

Si comme plus haut (p. 34)  $G_a, G_b, G_c$  sont les projections de G sur les côtés ( $G_a G_b G_c$  = triangle podaire de G), on a  $(G_a, L_a, G_b, L_b, G_c, L_c) \circ$ ,

c.à.d. que  $G_a G_b G_c$  et  $L_a L_b L_c$  sont inscrits dans la même circonférence;

le point de Lemoine L est le centre de gravité de son triangle podaire  $L_a L_b L_c$ .

Signalons encore que les points de Lemoine  $\Lambda_a, \Lambda_b, \Lambda_c$  des triangles  $AH_a H_b, BH_b H_c, CH_c H_a$  sont

$$\Lambda_a = \text{sym}_c L_a, \quad \Lambda_b = \text{sym}_a L_b, \quad \Lambda_c = \text{sym}_b L_c,$$

$$\text{avec } \Lambda_a \in g_b, \quad \Lambda_b \in g_c, \quad \Lambda_c \in g_a.$$

D'après des énoncés donnés à la fin du paragraphe précédent, pour les symédianes, le point de Lemoine du triangle  $L_a L_b L_c$  est le point  $(I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c)$ , celui du triangle  $(I_b L_b, I_c M_c)$  est le point  $(I_a M_a, I_b M_b)$ , etc.

### Droite de Lemoine

Les triangles ABC,  $S_a S_b S_c$  et  $A_1 B_1 C_1$  sont dans la situation des triangles respectifs ABC,  $P_1 P_2 P_3$  et  $P''_1 P''_2 P''_3$  de la figure de la page 16; ils sont homologiques avec pour axe d'homologie la droite  $F_1 F_2 F_3$  et pour centre d'homologie le point L; cette droite  $F_1 F_2 F_3$



est donc la polaire trilinéaire du point de Lemoine  $L$ . Elle est appelée droite de Lemoine et nous la désignerons par  $l$ :  $F_a F_b F_c \rightarrow l$ .

On a  $F_a \in S_b S_c$ ,  $F_b \in S_c S_a$ ,  $F_c \in S_a S_b$

et  $F_a, F_b, F_c$  sont les conjugués harmoniques de  $S_a, S_b, S_c$  par rapport à  $BC, CA, AB$  respectivement:

$$(BC S_a F_a) = -1, \quad (CA S_b F_b) = -1, \quad (AB S_c F_c) = -1.$$

(Rappelons que (p.70)  $F_a = (a, t_a)$ ,  $F_b = (b, t_b)$ ,  $F_c = (c, t_c)$ .)

Mais par rapport au cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ ,  $F_a, F_b, F_c$  sont les pôles des droites  $s_a, s_b, s_c$  qui portent leurs cordes de contact respectives  $AS_a, BS_b, CS_c$ ; cette droite  $l = F_a F_b F_c$  est donc la polaire du point de concours  $L$  de  $s_a, s_b, s_c$ . En résumé,  $l = F_a F_b F_c$  est à la fois la polaire trilinéaire de  $L$  par rapport au triangle  $ABC$  et la polaire de  $L$  par rapport au cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ :

$$l = \text{pol}_{ABC} L, \quad l = \text{pol}_{\mathcal{C}} L.$$

On a  $l \perp OL$  et  $\text{dist}_O l = \frac{R_0^2}{OL}$ .

La transversale réciproque (p.10) réciproque de la droite de Lemoine est appelée droite de Longchamps. C'est l'axe orthique (p.32) du triangle anticomplémentaire  $AB'C'$  (p.38).

Par conséquent, on a réciproque  $l \perp e$  et réciproque est l'axe radical (p.7) des cercles  $\omega(A', B', C')$  (de centre  $H$  et rayon  $2R$ ) et  $\mathcal{C} = \omega(A, B, C)$ . Les intersections avec réciproque des axes radicaux de  $\omega(A', B', C')$  avec les cercles d'Apollonius  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$  sont respectivement sur  $s_a, s_b, s_c$ . On appelle parfois point de Longchamps l'orthocentre du triangle anticomplémentaire, soit  $\text{sym}_O H$  (p.45); si nous le désignons par  $\Lambda$ ,  $\text{sym}_O H \rightarrow \Lambda$ , on a  $\Lambda \in e$  avec  $O\Lambda = HO = 3GO = 2O_0O$ . La droite de Longchamps est la polaire trilinéaire de ce point pour le triangle anticomplémentaire; réciproque  $l = \text{pol}_{AB'C'} \Lambda$ .

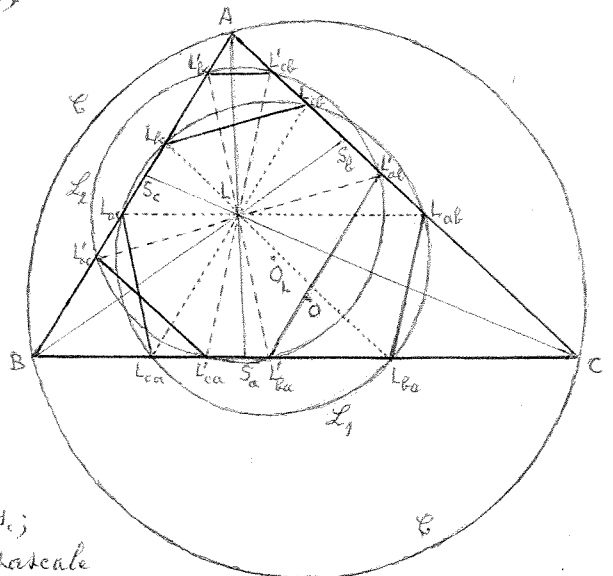
Premier cercle de Lemoine

Soient  $\|(a, L) \rightarrow l_a, (b, L) \rightarrow l_b, (c, L) \rightarrow l_c$ ;  $\|(b, L) \rightarrow l_b, (c, L) \rightarrow l_c, (a, L) \rightarrow l_a$ ;  $\|(c, L) \rightarrow l_c, (a, L) \rightarrow l_a, (b, L) \rightarrow l_b$  (les droites  $l_a, l_b, l_c$  sont parfois appelées les droites de Lemoine, il ne faut toutefois pas les confondre avec la droite de Lemoine  $l$  considérée ci-dessus, on dit plus volontiers les parallèles de Lemoine),

on a  $(l_{ca}, l_{ba}, l_{ab}, l_{cb}, l_{bc}, l_{ac}) \circ$ , c'est le premier cercle de Lemoine; nous poserons  $\circ(l_{ca}, l_{ba}, l_{ab}, l_{cb}, l_{bc}, l_{ac}) \rightarrow L_1$  et  $\circ(L_1) \rightarrow O_L$ .

On a  $O_L = \frac{1}{2}(O, L)$ .

L'hexagone  $L_{ca}L_{ba}L_{ab}L_{cb}L_{bc}L_{ac}$  est le premier hexagone de Lemoine; on a  $L_{ca}L_{ba} \parallel BAC \downarrow a$ ,  $L_{ac}L_{ba} \parallel CBA \downarrow b$ ,  $L_{ba}L_{ab} \parallel ACB \downarrow c$ , et par suite,  $L_{cb}L_{ba} \parallel t_a$ ,  $L_{ac}L_{cb} \parallel t_b$ ,  $L_{ca}L_{ab} \parallel t_c$ , ainsi que  $\frac{1}{2}(L_{cb}, L_{bc}) \in s_a$ ,  $\frac{1}{2}(L_{ac}, L_{ca}) \in s_b$ ,  $\frac{1}{2}(L_{ba}, L_{ab}) \in s_c$ ; la polaire de  $L$  par rapport au cercle  $L_1$  est la pascali



de cet hexagone, c'est-à-d. la droite portant les points de concours des côtés opposés de cet hexagone inscrit au cercle  $L_1$ ; c'est aussi l'axe radical de  $\mathcal{C}$  et  $L_1$ , c'est-à-d. le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces deux cercles (p. 7).

Par définition des sommets de cet hexagone, ses diagonales  $L_{ab}L_{bc} = l_a$ ,  $L_{bc}L_{ca} = l_b$ ,  $L_{ca}L_{cb} = l_c$  sont parallèles à  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et donc à ses côtés portés par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

On a aussi  $L_{ab}L_{bc} = l_a \parallel L_{ca}L_{cb} \in a$ ,  $L_{bc}L_{ca} = l_b \parallel L_{cb}L_{ab} \in b$ ,  $L_{ca}L_{cb} = l_c \parallel L_{ac}L_{bc} \in c$ .  
 On a aussi  $\overline{L_{ac}L_{ca}} = \overline{L_{ba}L_{ab}} = \overline{L_{cb}L_{bc}}$ ,  $\overline{L_{ac}L_{ca}} = \overline{L_{ca}L_{ab}}$ ,  $\overline{L_{ba}L_{ab}} = \overline{L_{ab}L_{bc}}$ ,  $\overline{L_{cb}L_{bc}} = \overline{L_{cb}L_{ca}}$ ;  
 $\hat{A} = \widehat{L_{ca}L_{cb}} = \widehat{B'L_{bc}L_{ba}} = \widehat{L_{cb}L_{bc}} = \widehat{CL_{ca}L_{ab}} = \widehat{L_{bc}L_{ab}} = \widehat{L_{ac}L_{ca}B}$ , etc.

Généralisation: cercles de Tucker

Considérons les points  $[(1-k)L, kA] \Rightarrow T_{kA}$ ,  $[(1-k)L, kB] \Rightarrow T_{kB}$ ,  $[(1-k)L, kC] \Rightarrow T_{kC}$ ;  
 on a évidemment  $T_{kA}T_{kB}T_{kC} = \text{hom}(L, k)ABC$ ,

donc  $T_{kA}T_{kB} \parallel c$ ,  $T_{kB}T_{kC} \parallel a$ ,  $T_{kC}T_{kA} \parallel b$ . Soient  $(T_{kA}T_{kB}, l) \Rightarrow T_{ab}^k$  et  $(T_{kB}T_{kC}, c) \Rightarrow T_{bc}^k$ ,  $(T_{kC}T_{kA}, a) \Rightarrow T_{ca}^k$  et  $(T_{kA}T_{kC}, b) \Rightarrow T_{cb}^k$ ,  
 on a  $(T_{ca}^k, T_{ba}^k, T_{ab}^k, T_{cb}^k, T_{bc}^k, T_{ac}^k) \circ$  et un tel cercle est appelé cercle de Tucker.

Si on pose  $[(T_{ca}^k, T_{ba}^k, T_{ab}^k, T_{cb}^k, T_{bc}^k, T_{ac}^k)] \Rightarrow O_{Tk}$ , on a  $O_{Tk} \in O_L$   
 et plus précisément  $O_{Tk} = [(1-k')L, k'O]$  avec  $k' = \frac{1}{2} + \frac{k}{2}$ .

Cas limites: pour  $k=0$ , on retrouve le premier cercle de Lemoine ( $O_{T0} = O_L$ );  
 pour  $k=1$ , c'est le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  ( $O_{T1} = O$ ).

Second cercle de Lemoine

Soient  $\uparrow BAC \setminus (a, L) \Rightarrow L'_{ab}$ ,  $(L'_{ab}, b) \Rightarrow L'_{ab}$  et  $(L'_{ab}, c) \Rightarrow L'_{bc}$ ,  $\uparrow CBA \setminus (b, L) \Rightarrow L'_{bc}$ ,  $(L'_{bc}, c) \Rightarrow L'_{bc}$  et  $(L'_{bc}, a) \Rightarrow L'_{ca}$ ,  
 $\uparrow ACB \setminus (c, L) \Rightarrow L'_{ca}$ ,  $(L'_{ca}, a) \Rightarrow L'_{ca}$  et  $(L'_{ca}, b) \Rightarrow L'_{cb}$ , on a

$(L'_{ca}, L'_{ba}, L'_{ab}, L'_{cb}, L'_{bc}, L'_{ac}) \circ$ , c'est le second cercle de Lemoine et  
 nous noterons  $\circ(L'_{ca}, L'_{ba}, L'_{ab}, L'_{cb}, L'_{bc}, L'_{ac}) \Rightarrow L_2$ . On a  $\circ(L_2) = L$ .

L'hexagone  $L'_{ca}L'_{ba}L'_{ab}L'_{cb}L'_{bc}L'_{ac}$  est le second hexagone de Lemoine.

On a  $L'_{ca}L'_{bc} \perp a$ ,  $L'_{ba}L'_{cb} \perp a$ ,  $L'_{ab}L'_{ca} \perp b$ ,  $L'_{cb}L'_{ac} \perp b$ ,  $L'_{bc}L'_{ab} \perp c$ ,  $L'_{ac}L'_{ba} \perp c$ ,  
 d'où  $L'_{ca}L'_{bc} \parallel L'_{ba}L'_{cb}$ ,  $L'_{ab}L'_{ca} \parallel L'_{cb}L'_{ac}$ ,  $L'_{bc}L'_{ab} \parallel L'_{ac}L'_{ba}$ ;  
 $L'_{bc}L'_{cb} \parallel a$ ,  $L'_{ca}L'_{ac} \parallel b$ ,  $L'_{ab}L'_{ba} \parallel c$ ,  $\overline{L'_{bc}L'_{cb}} = \overline{L'_{ca}L'_{ac}}$ ,  $\overline{L'_{ca}L'_{ac}} = \overline{L'_{ab}L'_{ba}}$ ,  $\overline{L'_{ab}L'_{ba}} = \overline{L'_{bc}L'_{cb}}$ ;  
 $L'_{ca}L'_{ba}L'_{cb}L'_{bc}$ ,  $L'_{ab}L'_{cb}L'_{ac}L'_{ca}$ ,  $L'_{bc}L'_{ac}L'_{ca}L'_{ab}$  sont des rectangles.

Le second hexagone de Lemoine est un hexagone dont les côtés opposés sont égaux et parallèles et qui est inscrit à un cercle. Ses côtés prolongés forment deux triangles égaux:  $ABC$  et son symétrique  $A_1B_1C_1$  par rapport au centre du cercle circonscrit à l'hexagone, celui-ci coïncidant avec le point de Lemoine de chacun de ces triangles ( $A_1 = (L'_{ab}L'_{ba}, L'_{ac}L'_{ca}) = \text{sym}_L A$ ,  $B_1 = (L'_{bc}L'_{cb}, L'_{ba}L'_{ab}) = \text{sym}_L B$ ,  $C_1 = (L'_{ca}L'_{ac}, L'_{cb}L'_{bc}) = \text{sym}_L C$ ).  
 Le point  $A_1$  étant sur la symédiane  $s_a$ , on a  $\frac{\text{dist}_b A_1}{b} = \frac{\text{dist}_c A_1}{c}$  et des relations analogues pour  $B_1$  et pour  $C_1$ .

## Relations entre les deux hexagones de Lemoine

Pour l'un comme pour l'autre, en raison des définitions, les diagonales principales sont concourantes, avec  $L$  pour point de concours :

$$(L_{ab}L_{ac}, L_{bc}L_{ba}, L_{ca}L_{cb}) = L, \quad (L'_{ab}L'_{ac}, L'_{bc}L'_{ba}, L'_{ca}L'_{cb}) = L.$$

Les côtés opposés du second sont parallèles entre eux et parallèles aux diagonales principales du premier :

$$L'_{bc}L'_{cb} \parallel L_{ca}L'_{ba} \parallel L_{ac}L_{ab} \quad (\text{parallèles à } a),$$

$$L'_{ca}L'_{ac} \parallel L'_{ab}L'_{cb} \parallel L_{ba}L_{bc} \quad (\text{parallèles à } b),$$

$$L'_{ab}L'_{ba} \parallel L'_{bc}L'_{ac} \parallel L_{cb}L_{ca} \quad (\text{parallèles à } c);$$

de même, les diagonales principales du second sont parallèles à un côté sur deux du premier, ceux qui ne sont pas portés par les côtés de  $ABC$  :

$$L'_{ac}L'_{ab} \parallel L_{bc}L_{cb} \quad (\text{antiparallèles à } a),$$

$$L'_{ba}L'_{bc} \parallel L_{ca}L_{ac} \quad (\text{antiparallèles à } b),$$

$$L'_{cb}L'_{ca} \parallel L_{ab}L_{ba} \quad (\text{antiparallèles à } c).$$

Voir aussi des compléments relatifs aux cercles et aux hexagones de Lemoine à la fin du chapitre suivant (notamment les rayons de  $L_1$  et de  $L_2$ ).

Cercle de Brocard, points de Brocard, triangles de Brocard

Cercle de Brocard

Le cercle de Brocard  $B$  est le cercle de diamètre  $OL$  ("diamètre de Brocard"):

$$B = \circ(OL) ;$$

on a donc  $\circ(B) = \frac{1}{2}(O, L) = O_L$ , c.à.d. que le premier cercle de Lemoine (p.79) et le cercle de Brocard sont concentriques;

$$O \in B, \quad L \in B.$$

Prenons  $\text{proj}_{m_a} L \Rightarrow L'_a$ ,  $\text{proj}_{m_b} L \Rightarrow L'_b$ ,  $\text{proj}_{m_c} L \Rightarrow L'_c$ ,

(c.à.d.  $(m_a, l_a) \Rightarrow L'_a$ ,  $(m_b, l_b) \Rightarrow L'_b$ ,  $(m_c, l_c) \Rightarrow L'_c$ ),

on a  $L'_a \in B$ ,  $L'_b \in B$ ,  $L'_c \in B$ , c.à.d. que les points d'intersection de  $B$  avec les médiatrices sont:  $O$  et  $L'_a$  avec  $m_a$ ,  $O$  et  $L'_b$  avec  $m_b$ ,  $O$  et  $L'_c$  avec  $m_c$ .

$LL'_a$ ,  $LL'_b$ ,  $LL'_c$  sont les parallèles de Lemoine (p.79) qui ont conduit au premier cercle de Lemoine:  $LL'_a = l_a \parallel a$ ,  $LL'_b = l_b \parallel b$ ,  $LL'_c = l_c \parallel c$ .

De la propriété fondamentale du point de Lemoine  $L$ , on déduit que

$$\frac{M_a L'_a}{a} = \frac{M_b L'_b}{b} = \frac{M_c L'_c}{c}, \quad \text{puisque}$$

$M_a L'_a = \text{dist}_a L'_a = \text{dist}_a L$ ,  $M_b L'_b = \text{dist}_b L'_b = \text{dist}_b L$ ,  $M_c L'_c = \text{dist}_c L'_c = \text{dist}_c L$ ; les longueurs de ces segments sont les coordonnées normales absolues de  $L$  (p.77) qui peuvent s'écrire respectivement  $LL_a = \frac{a^2 h_a}{a^2 + b^2 + c^2}$ ,  $LL_b = \frac{b^2 h_b}{a^2 + b^2 + c^2}$ ,  $LL_c = \frac{c^2 h_c}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

La droite de Lemoine  $l$  est l'axe radical (p.7) des cercles  $B$  et  $C$ .

Points de Brocard et angle de Brocard

On se  $(L'_a B, L'_b C, L'_c A) \ast$  et

on pose  $(L'_a B, L'_b C, L'_c A) \Rightarrow \Omega_1$ ,

c'est le premier point de Brocard;

on a  $(L'_b C, L'_c A, L'_a B) \ast$  et

on pose  $(L'_b C, L'_c A, L'_a B) \Rightarrow \Omega_2$ ,

c'est le second point de Brocard.

Ces deux points sont sur le cercle de Brocard;

$$\Omega_1 \in B, \quad \Omega_2 \in B.$$

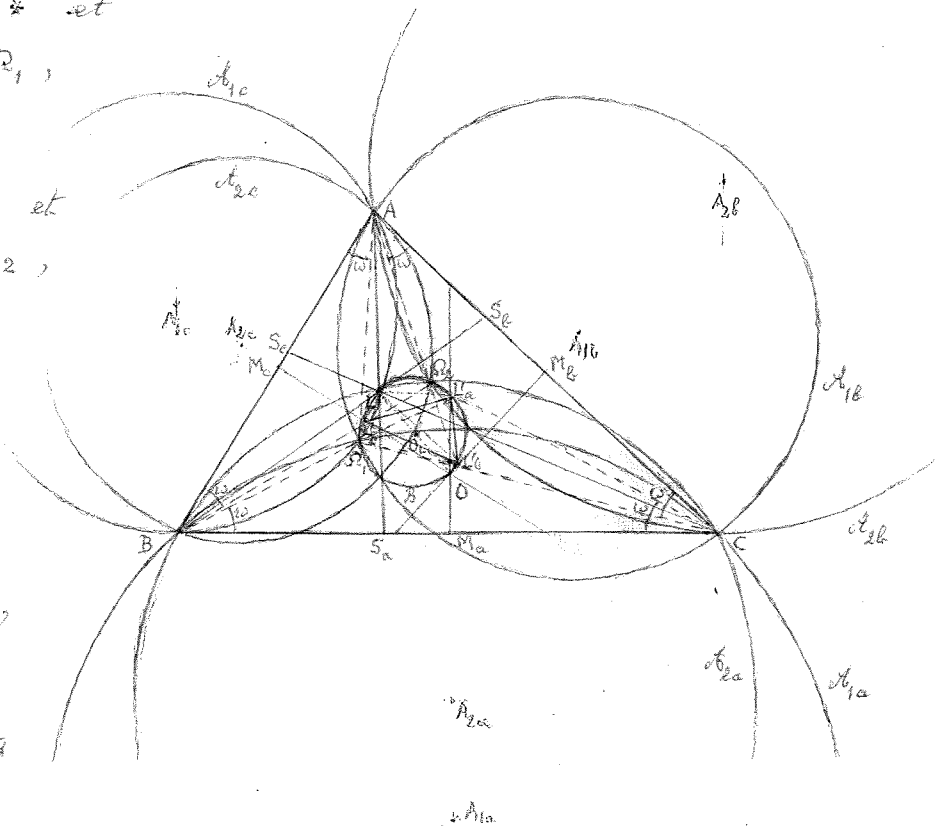
Ils sont tels que

$$\Omega_1 \hat{B}C = \Omega_1 \hat{C}A = \Omega_1 \hat{A}B \Rightarrow \omega$$

$$\text{et } \Omega_2 \hat{C}B = \Omega_2 \hat{A}C = \Omega_2 \hat{B}A \Rightarrow \omega,$$

avec la même valeur de  $\omega$  (angle de Brocard).

Ce sont donc les deux points



tels que les trois droites menées de l'un de ces points aux sommets A, B, C du triangle fassent des angles égaux avec les côtés, soit dans un sens, soit dans l'autre, c.à.d.

respectivement avec c, a, b pour  $\Omega_1$  ( $\text{ang}(c, A\Omega_1) = \text{ang}(a, B\Omega_1) = \text{ang}(b, C\Omega_1) = \omega$ ) ou respectivement avec b, c, a pour  $\Omega_2$  ( $\text{ang}(b, A\Omega_2) = \text{ang}(c, B\Omega_2) = \text{ang}(a, C\Omega_2) = \omega$ ). On a évidemment  $A\Omega_2 = \text{ctg}_{\text{A}} \Omega_2$ ,  $B\Omega_2 = \text{ctg}_{\text{B}} \Omega_2$ ,  $C\Omega_2 = \text{ctg}_{\text{C}} \Omega_2$ , et par suite

$$\Omega_2 = \text{inv } \Omega_1, \quad \text{On a} \quad C\hat{\Omega}_1 A = A\hat{\Omega}_2 B = 2 \text{ dr.} - \hat{A}, \quad A\hat{\Omega}_1 B = B\hat{\Omega}_2 C = 2 \text{ dr.} - \hat{B}, \quad B\hat{\Omega}_1 C = C\hat{\Omega}_2 A = 2 \text{ dr.} - \hat{C}.$$

Signalons que si nous reprenons les notations de la page 21 relatives aux transversales concurrentes parallèles aux côtés, la somme  $\overline{UU_{2a}^2} + \overline{UU_{3b}^2} + \overline{UU_{2c}^2}$  est minimum lorsque  $U = \Omega_1$  et la somme  $\overline{UU_{3a}^2} + \overline{UU_{1b}^2} + \overline{UU_{2c}^2}$  est minimum lorsque  $U = \Omega_2$ .

Valeur de l'angle de Brocard :

$$\text{cotg } \omega = \text{cotg } \hat{A} + \text{cotg } \hat{B} + \text{cotg } \hat{C} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \text{ où } S \text{ est l'aire de } ABC \text{ (p. 89);}$$

$$\text{on a aussi} \quad \sin^3 \omega = \sin(\hat{A} - \omega) \cdot \sin(\hat{B} - \omega) \cdot \sin(\hat{C} - \omega).$$

On a  $\omega \leq \frac{1}{3} \text{ dr.}$ , l'égalité n'ayant lieu que pour le triangle équilatéral, c.à.d. pour  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{2}{3} \text{ dr.}$

L'angle  $\omega$  est égal aux angles à la base de chacun des triangles suivants, qui sont isocèles (bases respectives: a, b, c) et semblables entre eux :

$$L'_a BC \quad (\overline{L'_a B} = \overline{L'_a C}), \quad L'_b CA \quad (\overline{L'_b C} = \overline{L'_b A}), \quad L'_c AB \quad (\overline{L'_c A} = \overline{L'_c B}),$$

$$\text{en effet} \quad C\hat{B}L'_a = L'_a\hat{C}B = A\hat{C}L'_b = L'_b\hat{A}C = B\hat{A}L'_c = L'_c\hat{B}A = \omega.$$

Tous les triangles qui ont même angle de Brocard  $\omega$  que ABC et les mêmes sommets B et C que ce triangle, ont leur troisième sommet sur un cercle passant par A. Un tel cercle est appelé cercle de Neuberg. De même, le lieu du troisième sommet des triangles ayant mêmes sommets C et A que ABC et même angle de Brocard, est un cercle passant par B. De même encore, le lieu du troisième sommet des triangles ayant A et B pour sommets et même angle de Brocard, est un cercle passant par C. Le triangle ABC a donc trois cercles de Neuberg, qui passent respectivement par A, par B, par C. Ils ont pour rayons respectifs  $\frac{a}{2} \sqrt{\text{cotg}^2 \omega - 3}$ ,  $\frac{b}{2} \sqrt{\text{cotg}^2 \omega - 3}$ ,  $\frac{c}{2} \sqrt{\text{cotg}^2 \omega - 3}$  et pour centres respectifs  $(AT, m_a)$ ,  $(BT, m_b)$ ,  $(CT, m_c)$ , où T est la point de Tarry (v. ci-après p. 87).

De  $\Omega_2 = \text{inv } \Omega_1$ , il résulte que

$$\text{proj}_{\text{A}} \Omega_2 \text{ proj}_{\text{B}} \Omega_2 \perp A\Omega_1, \quad \text{proj}_{\text{B}} \Omega_2 \text{ proj}_{\text{C}} \Omega_2 \perp B\Omega_1, \quad \text{proj}_{\text{C}} \Omega_2 \text{ proj}_{\text{A}} \Omega_2 \perp C\Omega_1,$$

et de même en intervertissant 1 et 2.

La corde  $\Omega_1 \Omega_2$  du cercle de Brocard B est perpendiculaire à son diamètre OL :

$$\Omega_1 \Omega_2 \perp OL$$

et elle est vue du point O sous un angle  $2\omega$  :  $\hat{\Omega}_1 O \Omega_2 = 2\omega$ .

Enfin, si nous désignons par  $\Omega_{1a} \Omega_{1b} \Omega_{1c}$  le triangle pédal de  $\Omega_1$  et par  $\Omega_{2a} \Omega_{2b} \Omega_{2c}$  celui de  $\Omega_2$ , on a  $S_a \Omega_{1c} \parallel b$ ,  $S_b \Omega_{1a} \parallel c$ ,  $S_c \Omega_{1b} \parallel a$ ,  $S_a \Omega_{2b} \parallel c$ ,  $S_b \Omega_{2c} \parallel a$ ,  $S_c \Omega_{2a} \parallel b$ .

### Cercles adjoints

On appelle cercles adjoints des cercles passant par deux sommets et tangents à un côté; il y en a 6;

$\Omega_1$  est à l'intersection des cercles adjoints suivants:

passant par B et C et tangent à b en C, soit  $\sigma_{1a}$ ,

passant par C et A et tangent à c en A, soit  $\sigma_{1b}$ ,

passant par A et B et tangent à a en B, soit  $\sigma_{1c}$ ;

$\Omega_2$  est à l'intersection des cercles adjoints suivants:

passant par B et C et tangent à c en B, soit  $\sigma_{2a}$ ,

passant par C et A et tangent à a en C, soit  $\sigma_{2b}$ ,

passant par A et B et tangent à b en A, soit  $\sigma_{2c}$ ;

on a donc  $\Omega_1 \in \sigma_{1a}, \Omega_1 \in \sigma_{1b}, \Omega_1 \in \sigma_{1c}, \Omega_2 \in \sigma_{2a}, \Omega_2 \in \sigma_{2b}, \Omega_2 \in \sigma_{2c}$ .

Si plus généralement on mène à partir de chaque sommet une droite faisant un angle  $\varphi$  donné  $\neq \omega$  avec le côté adjacent pris dans un même sens, les trois droites obtenues déterminent un triangle semblable à ABC, dont les sommets sont sur les trois premiers cercles adjoints ou sur les trois autres selon le sens choisi; ces triangles se réduisent à un point (de Brocard) pour  $\varphi = \omega$ ; voir pp. 103-104.

Soit P tel que  $\widehat{CBP} = \widehat{ACP}$ , alors  $P \in \sigma_{1a}$ ;

soit P tel que  $\widehat{ACP} = \widehat{BAP}$ , alors  $P \in \sigma_{1b}$ ;

soit P tel que  $\widehat{BAP} = \widehat{CBP}$ , alors  $P \in \sigma_{1c}$ ;

soit P tel que  $\widehat{PCB} = \widehat{PBA}$ , alors  $P \in \sigma_{2a}$ ;

soit P tel que  $\widehat{PAC} = \widehat{PCB}$ , alors  $P \in \sigma_{2b}$ ;

soit P tel que  $\widehat{PBA} = \widehat{PAC}$ , alors  $P \in \sigma_{2c}$ .

Pour les centres de ces cercles, posons

$\bullet(\sigma_{1a}) \Rightarrow A_{1a}, \bullet(\sigma_{1b}) \Rightarrow A_{1b}, \bullet(\sigma_{1c}) \Rightarrow A_{1c}, \bullet(\sigma_{2a}) \Rightarrow A_{2a}, \bullet(\sigma_{2b}) \Rightarrow A_{2b}, \bullet(\sigma_{2c}) \Rightarrow A_{2c}$ ;

on a:  $A_{1a} \in m_a, A_{1b} \in m_b, A_{1c} \in m_c, A_{2a} \in m_a, A_{2b} \in m_b, A_{2c} \in m_c$ ;

$A_{1a} \in \perp(b,c), A_{1b} \in \perp(c,a), A_{1c} \in \perp(a,b), A_{2a} \in \perp(c,b), A_{2b} \in \perp(a,c), A_{2c} \in \perp(b,a)$ ;

$A = \text{sym}_{A_{1a}A_{1c}} \Omega_1 = \text{sym}_{A_{1b}A_{1c}} \Omega_2, B = \text{sym}_{A_{1c}A_{1a}} \Omega_1 = \text{sym}_{A_{2c}A_{2a}} \Omega_2, C = \text{sym}_{A_{1a}A_{1b}} \Omega_1 = \text{sym}_{A_{2a}A_{2b}} \Omega_2$ ;

donc:  $A_{1b}A_{1c} \perp \Omega_1 A, A_{1c}A_{1a} \perp \Omega_1 B, A_{1a}A_{1b} \perp \Omega_1 C, A_{2b}A_{2c} \perp \Omega_2 A, A_{2c}A_{2a} \perp \Omega_2 B, A_{2a}A_{2b} \perp \Omega_2 C$ .

Les cercles adjoints  $\sigma_{1a}, \sigma_{1b}, \sigma_{1c}, \sigma_{2a}, \sigma_{2b}, \sigma_{2c}$  ont pour rayons respectifs

$$R_{1a} = \frac{a}{2 \sin C} = \frac{a}{c} R, R_{1b} = \frac{b}{2 \sin A} = \frac{b}{a} R, R_{1c} = \frac{c}{2 \sin B} = \frac{c}{b} R,$$

$$R_{2a} = \frac{a}{2 \sin B} = \frac{a}{b} R, R_{2b} = \frac{b}{2 \sin C} = \frac{b}{c} R, R_{2c} = \frac{c}{2 \sin A} = \frac{c}{a} R.$$

Le triangle antipodaire (p. 14) de  $\Omega_1$  est  $\text{hom}(\Omega_1, 2) A_{1a}A_{1b}A_{1c}$  et le triangle antipodaire (p. 14) de  $\Omega_2$  est  $\text{hom}(\Omega_2, 2) A_{2a}A_{2b}A_{2c}$ . Comme ces triangles antipodaires de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , les triangles  $A_{1b}A_{1c}A_{1a}$  et  $A_{2c}A_{2a}A_{2b}$  sont égaux l'un à l'autre et directement semblables (p. 121) à ABC:

$$A_{1b}A_{1c}A_{1a} \sim ABC, \quad A_{2c}A_{2a}A_{2b} \sim ABC, \quad \text{rapport de similitude: } k = \frac{1}{2 \sin \omega}.$$

Enfin, O est le second point de Brocard du triangle  $A_{1b}A_{1c}A_{1a}$  et le premier point de Brocard du triangle  $A_{2c}A_{2a}A_{2b}$ .

### Triangles de Brocard

Le triangle  $L'_a L'_b L'_c$ , inscrit à  $B$ , est appelé premier triangle de Brocard.  
Il est inversement semblable (v. p. 121) au triangle  $ABC$ :  $L'_a L'_b L'_c \hat{=} ABC$  avec  $L'_a, L'_b$  et  $L'_c$  rencontrés dans cet ordre dans une rotation en sens inverse du sens dans lequel sont rencontrés  $A, B$  et  $C$ ;

rapport de similitude:  $\frac{L'_b L'_c}{a} = \frac{L'_c L'_a}{b} = \frac{L'_a L'_b}{c} = \frac{1}{2} \sqrt{1-3\cos^2 \omega}$ .

Son cercle circonscrit étant  $B$ , on en déduit pour le diamètre de  $B$ :

$$\overline{OL} = R \sqrt{1-3\cos^2 \omega}$$

On a

$\frac{1}{2}(L, L'_a) \in g_a$ ,  $\frac{1}{2}(L, L'_b) \in g_b$ ,  $\frac{1}{2}(L, L'_c) \in g_c$   
et les droites  $AL'_a, BL'_b, CL'_c$  qui joignent les sommets de  $ABC$  et de  $L'_a L'_b L'_c$  sont les rétroennes isotomiques des symédianes, i.e.d. (p. 15) que leurs pieds  $(AL'_a, a) \Rightarrow R_a$ ,  $(BL'_b, b) \Rightarrow R_b$ ,  $(CL'_c, c) \Rightarrow R_c$  sont les points isotomiques de  $S_a, S_b, S_c$ :

$$\overline{R_a M_a} = \overline{M_a S_a}, \quad \overline{R_b M_b} = \overline{M_b S_b}, \quad \overline{R_c M_c} = \overline{M_c S_c}.$$

Les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés du premier triangle de Brocard sur les côtés homologues de  $ABC$  sont concourantes et le point de concours est le centre du cercle des neuf points:

$$\left[ \perp(a, \frac{1}{2}(L'_b, L'_c)), \perp(b, \frac{1}{2}(L'_c, L'_a)), \perp(c, \frac{1}{2}(L'_a, L'_b)) \right] = O_9.$$

Désignons par  $O_a, O_b, O_c$  les intersections respectives, autre que  $L$ , de  $s_a, s_b, s_c$  avec le cercle de Brocard, i.e.d. que les points d'intersection de  $B$  avec les symédianes sont  $L$  et  $O_a$  pour  $s_a$ ,  $L$  et  $O_b$  pour  $s_b$ ,  $L$  et  $O_c$  pour  $s_c$ .

Le triangle  $O_a O_b O_c$ , inscrit lui aussi à  $B$ , est appelé second triangle de Brocard.

$$\text{On a } O_a = \frac{1}{2}(A, \Sigma_a), \quad O_b = \frac{1}{2}(B, \Sigma_b), \quad O_c = \frac{1}{2}(C, \Sigma_c),$$

où, rappelons-le,  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c$  sont les secondes intersections respectives de  $s_a, s_b, s_c$  avec  $B$ ,

$$\text{et } O_a = \text{proj}_{s_a} O, \quad O_b = \text{proj}_{s_b} O, \quad O_c = \text{proj}_{s_c} O,$$

De plus,  $O_a \in A_{18}$  et  $e \in s_c$ ,  $O_b \in A_{12}$  et  $A_{2a}$ ,  $O_c \in A_{1a}$  et  $A_{2b}$ ,

ainsi que  $O_a \in o(B, O, C)$ , d'où  $\widehat{BO_a C} = \widehat{BOC} = 2\hat{A}$  (p. 41), et des relations analogues pour  $O_b$  et pour  $O_c$ .

$$\text{On a aussi } ABO_a \hat{=} CAO_a, \quad BCO_b \hat{=} ABO_b, \quad CAO_c \hat{=} BCO_c,$$

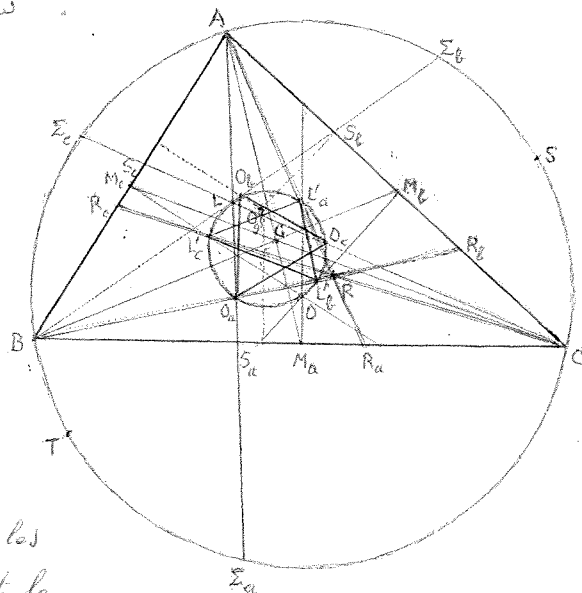
les points doubles de ces similitudes (directes) étant respectivement  $O_a, O_b, O_c$ ,

$$\text{et } \widehat{CO_a A} = \widehat{AO_a B} = 2 \text{dr.} - \hat{A}, \quad \widehat{AO_b B} = \widehat{BO_b C} = 2 \text{dr.} - \hat{B}, \quad \widehat{BO_c C} = \widehat{CO_c A} = 2 \text{dr.} - \hat{C};$$

$$\text{on a donc notamment } \frac{O_a M_b}{b} = \frac{O_a M_c}{c}, \quad \frac{O_b M_c}{c} = \frac{O_b M_a}{a}, \quad \frac{O_c M_a}{a} = \frac{O_c M_b}{b},$$

$$\text{ang}(O_a M_b, b) = \text{ang}(O_a M_c, c), \quad \text{ang}(O_b M_c, c) = \text{ang}(O_b M_a, a), \quad -\text{ang}(O_c M_a, a) = \text{ang}(O_c M_b, b),$$

$$O_a \hat{B}A = O_a \hat{A}C, \quad B \hat{A}O_a = A \hat{C}O_a, \quad \text{etc.}$$



$\overline{O_a A^2} = \overline{O_a B} \cdot \overline{O_a C}$ ,  $\overline{O_b B^2} = \overline{O_b C} \cdot \overline{O_b A}$ ,  $\overline{O_c C^2} = \overline{O_c A} \cdot \overline{O_c B}$ ,  $\frac{\overline{O_a B}}{\overline{O_a C}} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\overline{S_a B}}{\overline{S_a C}}$ ,  $\frac{\overline{O_b C}}{\overline{O_b A}} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{\overline{S_b C}}{\overline{S_b A}}$ ,  $\frac{\overline{O_c A}}{\overline{O_c B}} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{S_c A}}{\overline{S_c B}}$  ;  
 $O_a O_b O_c \} G_a G_b G_c$  ;  $L'_a L'_b L'_c$  et  $O_a O_b O_c$  sont des triangles homologues (n. p. 124) avec pour centre d'homologie  $G$  et pour axe d'homologie  $pol_{23} G$ .

### Autres points

$G$  est le centre de gravité du premier triangle de Brocard  $L'_a L'_b L'_c$  en même temps que du triangle  $ABC$ ; il est le point double de la similitude  $L'_a L'_b L'_c \} ABC$ . On a alors comme droites doubles dans cette similitude les droites suivantes (nécessairement perpendiculaires l'une à l'autre en  $G$ ) appelées axes de Steiner, que nous désignerons respectivement par  $x$  et  $y$  :

$$x = \frac{1}{2}(G M_a, G L'_a) = \frac{1}{2}(G M_b, G L'_b) = \frac{1}{2}(G M_c, G L'_c) ;$$

$$y = \frac{1}{2}(G A, G L'_a) = \frac{1}{2}(G B, G L'_b) = \frac{1}{2}(G C, G L'_c) .$$

Posons  $(x, m_a) \Rightarrow A_x$ ,  $(x, m_b) \Rightarrow B_x$ ,  $(x, m_c) \Rightarrow C_x$  ;

les triangles isocèles  $A_x B C$ ,  $B_x C A$ ,  $C_x A B$ , de bases respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont semblables entre eux et ils ont pour hauteurs respectives

$$\overline{M_a A_x} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \sigma_1, \quad \overline{M_b B_x} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \sigma_1, \quad \overline{M_c C_x} = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \sigma_1,$$

l'angle commun à la base étant  $\sigma_1$ , appelé premier angle de Steiner, donné par

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 + \sqrt{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \omega}} .$$

Posons  $(y, m_a) \Rightarrow A_y$ ,  $(y, m_b) \Rightarrow B_y$ ,  $(y, m_c) \Rightarrow C_y$  ;

les triangles isocèles  $A_y B C$ ,  $B_y C A$ ,  $C_y A B$ , de bases respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont semblables entre eux et ils ont pour hauteurs respectives

$$\overline{M_a A_y} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \sigma_2, \quad \overline{M_b B_y} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \sigma_2, \quad \overline{M_c C_y} = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \sigma_2,$$

l'angle commun à la base étant  $\sigma_2$ , appelé second angle de Steiner, donné par

$$\operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 - \sqrt{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \omega}} .$$

Les parallèles aux côtés du premier triangle de Brocard menées par les sommets homologues de leurs sommets opposés respectifs sont concourantes :

$$[\parallel(L'_b L'_c, A), \parallel(L'_c L'_a, B), \parallel(L'_a L'_b, C)]^* ,$$

leur point de concours s'appelle point de Steiner et nous le désignerons par  $S$  :

$$[\parallel(L'_b L'_c, A), \parallel(L'_c L'_a, B), \parallel(L'_a L'_b, C)] \Rightarrow S .$$

Dans la similitude inverse de  $L'_a L'_b L'_c$  et  $ABC$ , il est pour  $ABC$  l'homologue de ce qu'est  $L$  pour  $L'_a L'_b L'_c$  ; on a  $S \in \mathcal{C}$  (de même que  $L \in \mathcal{B}$ , puisque  $\mathcal{B}$  est le cercle circonscrit à  $L'_a L'_b L'_c$ ) ; ses coordonnées normales (relatives) sont

$\frac{1}{a(b^2 - c^2)}$ ,  $\frac{1}{b(c^2 - a^2)}$ ,  $\frac{1}{c(a^2 - b^2)}$  et sont donc inversement proportionnelles aux distances  $\overline{M_a L_a}$ ,  $\overline{M_b L_b}$ ,  $\overline{M_c L_c}$  :  $\overline{M_a L_a} \cdot \operatorname{dist}_a S = \overline{M_b L_b} \cdot \operatorname{dist}_b S = \overline{M_c L_c} \cdot \operatorname{dist}_c S$ .

Les perpendiculaires abaissées des sommets de  $ABC$  sur les côtés du premier triangle de Brocard homologues de leurs côtés opposés respectifs sont concourantes :

$$[\perp(L'_b L'_c, A), \perp(L'_c L'_a, B), \perp(L'_a L'_b, C)]^* ,$$



leur point de concours s'appelle point de Tarry et nous le désignerons par T:

$$[\perp(L'_a L'_b, A), \perp(L'_b L'_c, B), \perp(L'_c L'_a, C)] \Rightarrow T$$

Dans la similitude inverse de  $L'_a L'_b L'_c$  et ABC, il est pour ABC l'homologue de ce qui est O pour  $L'_a L'_b L'_c$ ; on a  $T \in \mathcal{C}$  (de même que  $O \in \mathcal{B}$ , puisque B est le cercle circonscrit à  $L'_a L'_b L'_c$ ); ses distances à a, b, c, c.à.d. ses coordonnées normales, sont inversement proportionnelles aux distances de O aux sommets du premier triangle de Brocard;

$$\overline{OL'_a} \cdot \text{dist}_a T = \overline{OL'_b} \cdot \text{dist}_b T = \overline{OL'_c} \cdot \text{dist}_c T$$

Les points S et T sont les extrémités d'un même diamètre du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ :

$$(S, O, T) = \frac{1}{2}(T, S) = O$$

Reprenons les droites qui joignent les sommets homologues de ABC et du premier triangle de Brocard, qui sont les droites isotomiques des symédianes, comme indiqué plus haut (p.85); elles sont donc elles-mêmes concurrentes:

$$(AL'_a, BL'_b, CL'_c) * \quad ; \quad \text{posons } (AL'_a, BL'_b, CL'_c) = (AR_a, BR_b, CR_c) \Rightarrow R$$

( $R_a, R_b, R_c$ : points isotomiques des pieds des symédianes  $S_a, S_b, S_c$  (p.85)), ce point de concours, qui est le réciproque (p.16) du point de Lemoine, est sur le diamètre ST de  $\mathcal{C}$ :

$$R = \text{recipr } L \quad , \quad R \in ST$$

c'est le centre d'homologie pour les triangles homologues (v. p.124) ABC et  $L'_a L'_b L'_c$  et l'axe d'homologie est perpendiculaire à cette droite:

$$(BC, L'_b L'_c) (CA, L'_c L'_a) (AB, L'_a L'_b) \perp ST$$

On a aussi  $\text{compl } R = [M_a \frac{1}{2}(L'_b L'_c), M_b \frac{1}{2}(L'_c L'_a), M_c \frac{1}{2}(L'_a L'_b)] = \frac{1}{2}(\Omega_1, \Omega_2)$ ,  
(d'où  $\frac{1}{2}(\Omega_1, \Omega_2) \in RG$ ).

### Compléments sur les hexagones de Lemoine

On a  $\overline{L'_b A} = \overline{L'_c \Omega_1}$ ,  $\overline{L'_c B} = \overline{L'_a \Omega_1}$ ,  $\overline{L'_a C} = \overline{L'_b \Omega_1}$ ,  $\overline{L'_c A} = \overline{L'_b \Omega_2}$ ,  $\overline{L'_a B} = \overline{L'_c \Omega_2}$ ,  $\overline{L'_b C} = \overline{L'_a \Omega_2}$ ;  
par conséquent,  $L'_b, L'_c, L'_a, L'_c, L'_a, L'_b$  sont respectivement sur les médiatrices des segments de droites  $\Omega_1 A, \Omega_1 B, \Omega_1 C, \Omega_2 A, \Omega_2 B, \Omega_2 C$ :

$$\text{proj}_{\Omega_1 A} L'_b = \frac{1}{2}(\Omega_1, A), \quad \text{proj}_{\Omega_1 B} L'_c = \frac{1}{2}(\Omega_1, B), \quad \text{proj}_{\Omega_1 C} L'_a = \frac{1}{2}(\Omega_1, C),$$

$$\text{proj}_{\Omega_2 A} L'_c = \frac{1}{2}(\Omega_2, A), \quad \text{proj}_{\Omega_2 B} L'_a = \frac{1}{2}(\Omega_2, B), \quad \text{proj}_{\Omega_2 C} L'_b = \frac{1}{2}(\Omega_2, C).$$

Supposons que les sommets de chacun des hexagones de Lemoine soient numérotés de 1 à 6 en suivant son contour; les segments de droites ayant pour extrémités les sommets de numéros pairs d'une part et ceux de numéros impairs d'autre part sont les côtés de triangles semblables à ABC:

dans le premier hexagone,  $L'_c L'_a L'_b$  et  $L'_c L'_a L'_b$  sont directement égales (p.119) entre elles et directement semblables (p.121) à ABC:

$$L'_c L'_a L'_b \} ABC \quad \text{et} \quad L'_c L'_a L'_b \} ABC$$

avec pour points doubles respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , le rapport de similitude étant

dans les deux cas  $k = \frac{1}{2 \cos \omega}$  (d'où pour le rayon  $R_1$  de  $L_1$  la valeur  $R_1 = \frac{R}{2 \cos \omega}$ );

dans le second hexagone,  $L'_{ac}L'_{ba}L'_{cb}$  et  $L'_{ab}L'_{bc}L'_{ca}$  sont directement égaux (p. 113) entre eux (et d'ailleurs symétriques l'un de l'autre, car

$L'_{ab} = \text{sym}_L L'_{ac}$ ,  $L'_{bc} = \text{sym}_L L'_{ba}$ ,  $L'_{ca} = \text{sym}_L L'_{cb}$ , c.à.d.  $L'_{ab}L'_{bc}L'_{ca} = \text{hom}(L, -1) L'_{ac}L'_{ba}L'_{cb}$ ) et directement semblables (p. 121) à  $ABC$  :

$$L'_{ac}L'_{ba}L'_{cb} \int ABC \quad \text{et} \quad L'_{ab}L'_{bc}L'_{ca} \int ABC$$

avec pour points doubles respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , le rapport de similitude étant dans les deux cas  $k = \text{tg } \omega$  (d'où pour le rayon  $R_2$  de  $L_2$  la valeur  $R_2 = R \text{tg } \omega$ ).

Ces triangles  $L'_{ac}L'_{ba}L'_{cb}$  et  $L'_{ab}L'_{bc}L'_{ca}$  sont les deux triangles inscrits à  $ABC$  dont les côtés sont perpendiculaires à ceux de  $ABC$ ; ils sont inscrits à un même cercle  $L_2$ .

## Aires

### Notations

Nous désignerons l'aire d'une surface en mettant entre  $\langle \rangle$  la notation qui représente cette surface; par exemple, l'aire du triangle ABC sera désignée par  $\langle ABC \rangle$ . Nous poserons aussi  $\langle ABC \rangle \Rightarrow S$ .

### En fonction des côtés

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(rappel:  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ,  $s-a = \frac{1}{2}(b+c-a)$ ,  $s-b = \frac{1}{2}(c+a-b)$ ,  $s-c = \frac{1}{2}(a+b-c)$ ).

### En fonction des côtés et des angles

$$\begin{aligned} S &= \frac{bc}{2} \sin \hat{A} = \frac{ca}{2} \sin \hat{B} = \frac{ab}{2} \sin \hat{C} = a^2 \frac{\sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}}{2 \sin \hat{A}} = b^2 \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin \hat{A}}{2 \sin \hat{B}} = c^2 \frac{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B}}{2 \sin \hat{C}} \\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{4} \operatorname{tg} \hat{A} \quad (\sin \hat{A} \neq 1 \text{ dr.}) = \frac{c^2+a^2-b^2}{4} \operatorname{tg} \hat{B} \quad (\sin \hat{B} \neq 1 \text{ dr.}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{4} \operatorname{tg} \hat{C} \quad (\sin \hat{C} \neq 1 \text{ dr.}) \\ &= \frac{a^2}{2(\cot \hat{B} + \cot \hat{C})} = \frac{b^2}{2(\cot \hat{C} + \cot \hat{A})} = \frac{c^2}{2(\cot \hat{A} + \cot \hat{B})} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot \hat{A} + \cot \hat{B} + \cot \hat{C})} \\ &= \frac{b^2-c^2}{2(\cot \hat{C} - \cot \hat{B})} = \frac{c^2-a^2}{2(\cot \hat{A} - \cot \hat{C})} = \frac{a^2-b^2}{2(\cot \hat{B} - \cot \hat{A})} \\ &= s^2 \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = (s-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \cot \frac{\hat{B}}{2} \cot \frac{\hat{C}}{2} = (s-b)^2 \cot \frac{\hat{B}}{2} \cot \frac{\hat{C}}{2} \cot \frac{\hat{A}}{2} = (s-c)^2 \cot \frac{\hat{C}}{2} \cot \frac{\hat{A}}{2} \cot \frac{\hat{B}}{2} \\ &= s(s-a) \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = s(s-b) \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = s(s-c) \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = (s-b)(s-c) \cot \frac{\hat{A}}{2} = (s-c)(s-a) \cot \frac{\hat{B}}{2} = (s-a)(s-b) \cot \frac{\hat{C}}{2}. \end{aligned}$$

### En fonction d'autres grandeurs

$$\begin{aligned} S &= \frac{aha}{2} = \frac{bhb}{2} = \frac{chc}{2} = \frac{1}{4}(a \cdot \overline{AH} + b \cdot \overline{BH} + c \cdot \overline{CH}) = \frac{4r_a^2 - a^2}{8} \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{4r_b^2 - b^2}{8} \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{4r_c^2 - c^2}{8} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} \\ &= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C} = r_a^2 \cot \frac{\hat{A}}{2} \cot \frac{\hat{B}}{2} \cot \frac{\hat{C}}{2} \\ &= pr = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c \\ &= r_a^2 \cot \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = r_b^2 \cot \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = r_c^2 \cot \frac{\hat{C}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} \\ &= r_b r_c \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = r_c r_a \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = r_a r_b \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = r_a r_b \cot \frac{\hat{A}}{2} = r_b r_c \cot \frac{\hat{B}}{2} = r_r c \cot \frac{\hat{C}}{2} \\ &= \frac{r_a r_b r_c}{r} = \sqrt{r_a r_b r_c} \end{aligned}$$

De l'expression la plus connue de  $S$ ,  $\frac{1}{2} ah_a$ , il résulte que l'aire d'un triangle reste inchangée si l'on translate le sommet A parallèlement au côté BC, pris pour base (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

Note: on a  $\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$  et  $S = \sqrt{\frac{h_a h_b h_c R}{2}}$ .

### Aires particulières

Triangle orthique:  $\langle H_a H_b H_c \rangle = 2 \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} \cdot S$ ;

Triangle complémentaire:  $\langle M_a M_b M_c \rangle = \frac{S}{4}$

$$= \langle AM_c M_b \rangle = \langle M_c B M_a \rangle = \langle M_b M_a C \rangle ;$$

triangle orthocentrique:  $\langle A'B'C' \rangle = 4S$  ;

$$\langle l_a l_b l_c \rangle = 8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{r^2}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= 2rR = \frac{a r}{\sin A} = \frac{b r}{\sin B} = \frac{c r}{\sin C} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} ;$$

triangle podaire de  $\triangle$ :  $\langle G_a G_b G_c \rangle = \frac{4}{9} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} S^2$  ;

$$\langle GBC \rangle = \langle GCA \rangle = \langle GAB \rangle = \frac{S}{3} ;$$

$$\langle OBC \rangle = \frac{a^2}{4} |\cotg \hat{A}| = \frac{R^2}{2} |\sin 2\hat{A}| = \frac{|\cos \hat{A}|}{2 \sin \hat{B} \sin \hat{C}} S ;$$

$$\langle OCA \rangle = \frac{b^2}{4} |\cotg \hat{B}| = \frac{R^2}{2} |\sin 2\hat{B}| = \frac{|\cos \hat{B}|}{2 \sin \hat{C} \sin \hat{A}} S, \quad \langle OAB \rangle = \frac{c^2}{4} |\cotg \hat{C}| = \frac{R^2}{2} |\sin 2\hat{C}| = \frac{|\cos \hat{C}|}{2 \sin \hat{A} \sin \hat{B}} S ;$$

$$\langle IBC \rangle = \frac{a r}{2} = \frac{a}{2r} S, \quad \langle ICA \rangle = \frac{b r}{2} = \frac{b}{2r} S, \quad \langle IAB \rangle = \frac{c r}{2} = \frac{c}{2r} S ;$$

d'où

$$\frac{\langle IBC \rangle}{a} = \frac{\langle ICA \rangle}{b} = \frac{\langle IAB \rangle}{c} ;$$

$$\langle HBC \rangle = \frac{a^2 |\cos \hat{B} \cos \hat{C}|}{2 \sin \hat{A}} = \frac{S}{|\tg \hat{B} \tg \hat{C}|} ;$$

$$\langle HCA \rangle = \frac{b^2 |\cos \hat{C} \cos \hat{A}|}{2 \sin \hat{B}} = \frac{S}{|\tg \hat{C} \tg \hat{A}|}, \quad \langle HAB \rangle = \frac{c^2 |\cos \hat{A} \cos \hat{B}|}{2 \sin \hat{C}} = \frac{S}{|\tg \hat{A} \tg \hat{B}|} ;$$

$$\langle O_a O_b O_c \rangle = \frac{(g_a^2 + g_b^2 + g_c^2)^3}{2^7 g_a^2 g_b^2 g_c^2} S ;$$

$$\langle LBC \rangle = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} S, \quad \langle LCA \rangle = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} S, \quad \langle LAB \rangle = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} S ;$$

d'où

$$\frac{\langle LBC \rangle}{a^2} = \frac{\langle LCA \rangle}{b^2} = \frac{\langle LAB \rangle}{c^2} ;$$

$$\langle BAD_a \rangle = \frac{bc^2}{b+c} \sin \hat{A}, \quad \langle CAD_a \rangle = \frac{b^2 c}{b+c} \sin \hat{A}, \quad \text{d'où } \frac{\langle BAD_a \rangle}{\langle CAD_a \rangle} = \frac{c}{b}$$

et d'autres formules analogues obtenues par permutation des lettres ;

$$\langle AD_c D_b \rangle = \frac{bc}{(a+b)(c+a)} S, \quad \langle BD_a D_c \rangle = \frac{ca}{(b+c)(a+b)} S, \quad \langle CD_b D_a \rangle = \frac{ab}{(c+a)(b+c)} S ;$$

$$\text{d'où } \frac{\langle BD_a D_c \rangle}{\langle CD_b D_a \rangle} = \frac{c(c+a)}{b(a+b)}, \text{ etc. ;}$$

$$\langle D_a D_b D_c \rangle = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} S$$

Notons que  $S$  est la moyenne harmonique de  $\langle BAD_a \rangle$  et  $\langle CAD_a \rangle$ :  $\frac{1}{S} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\langle BAD_a \rangle} + \frac{1}{\langle CAD_a \rangle} \right)$   
 et que la moitié de  $S$  est la moyenne géométrique de  $\langle AD_a M_a \rangle$  et  $\langle AM_a D_a \rangle$ :  $\frac{S^2}{4} = \langle AD_a M_a \rangle \langle AM_a D_a \rangle$   
 (+ énoncés analogues par permutation des lettres).

$$\text{Posons } \langle J_a J_b J_c \rangle \Rightarrow S_i, \quad \langle J_{aa} J_{bb} J_{cc} \rangle \Rightarrow S_e ;$$

$$\langle J_{aa} J_{ab} J_{ac} \rangle \Rightarrow S_{ea}, \quad \langle J_{bb} J_{ab} J_{bc} \rangle \Rightarrow S_{eb}, \quad \langle J_{cc} J_{cb} J_{cc} \rangle \Rightarrow S_{ec} ;$$

$$\text{on a } S_i = S_e = \frac{r}{2R} S, \quad S_{ea} = \frac{r_a}{2R} S, \quad S_{eb} = \frac{r_b}{2R} S, \quad S_{ec} = \frac{r_c}{2R} S ;$$

$$\text{d'où } \frac{S_i}{2} = \frac{S_e}{2} = \frac{S_{ea}}{r_a} = \frac{S_{eb}}{r_b} = \frac{S_{ec}}{r_c} \quad \text{et} \quad r S_i = r S_e = (r-a) S_{ea} = (r-b) S_{eb} = (r-c) S_{ec} ;$$

$$\langle J_a J_b J_c \rangle = J_{ea}, \quad \langle J_b J_c J_a \rangle = J_{eb}, \quad \langle J_c J_a J_b \rangle = J_{ec}; \quad J_{ea} + J_{eb} + J_{ec} = 2J + J_c.$$

Pour les triangles ayant un centre isogone pour sommet, on a  
 $\frac{\langle YCA \rangle}{\langle YAB \rangle} = \frac{YC}{YB}, \quad \frac{\langle YAB \rangle}{\langle YBC \rangle} = \frac{YA}{YC}, \quad \frac{\langle YBC \rangle}{\langle YCA \rangle} = \frac{YB}{YA}$  et idem avec  $Y'$  au lieu de  $Y$ .

Pour un triangle  $ABC$  donné, l'aire du triangle pédaire d'un point  $P$  ne dépend que de la distance du point au centre  $O$  du cercle circonscrit à  $ABC$ : voir formule au début du chapitre suivant, consacré aux wallaces.

L'aire du triangle métaharmonique au sens étroit (p.129) de  $ABC$  par rapport à un point  $P$  est donnée par  $\langle A_2 B_2 C_2 \rangle = \frac{|R^2 - OP^2|^2}{(PA \cdot PB \cdot PC)^2} J$ .

Si  $P_{a1}$  et  $P_{a2}$ ,  $P_{b1}$  et  $P_{b2}$ ,  $P_{c1}$  et  $P_{c2}$  sont des paires de points isotomiques respectivement sur  $a$ , sur  $b$ , sur  $c$  (p.15), on a  $\langle P_{a1} P_{b1} P_{c1} \rangle = \langle P_{a2} P_{b2} P_{c2} \rangle$ .

Avec les points introduits p.38, on a  $\langle C_3 A_3 B_3 \rangle = \langle B_4 A_4 C_4 \rangle = 7J$ .

Plus généralement, un triangle  $A_\alpha B_\beta C_\gamma$  dont les sommets sont respectivement sur les prolongements de  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , et des distances  $\overline{CA_\alpha} = \alpha \overline{BC}$ ,  $\overline{AB_\beta} = \beta \overline{CA}$ ,  $\overline{BC_\gamma} = \gamma \overline{AB}$  a pour aire

$$\langle A_\alpha B_\beta C_\gamma \rangle = [( \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha ) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1] J.$$

En particulier, si  $\alpha = \beta = \gamma$ ,  $\langle A_\alpha B_\alpha C_\alpha \rangle = (3\alpha^2 + 3\alpha + 1) J$ .

(Note: le triangle  $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$  a le même centre de gravité  $G$  que  $ABC$ ; c'est en particulier le cas pour  $C_3 A_3 B_3$  et  $B_4 A_4 C_4$  (qui correspondent ici à  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -2$  respectivement) avec les notations de la p.38).

Avec les notations de la p.39, les triangles  $V_{ab} V_{bc} V_{ca}$  et  $V_{ac} V_{ba} V_{cb}$  ont pour aire  $\langle V_{ab} V_{bc} V_{ca} \rangle = \langle V_{ac} V_{ba} V_{cb} \rangle = \frac{1}{3} J$  (ils correspondent à  $\alpha = -\frac{2}{3}$  et  $\alpha = -\frac{1}{3}$  dans la formule ci-dessus); ce sont les triangles d'aire maximum parmi les triangles  $U_{3a} U_{1b} U_{2c}$  et  $U_{2a} U_{3b} U_{1c}$  avec les notations de la p.21 (voir fin de la p.40), si on pose pour  $U = G$ . De toute façon, quel que soit  $U$ , on a  $\langle U_{3a} U_{1b} U_{2c} \rangle = \langle U_{2a} U_{3b} U_{1c} \rangle$  pour les triangles dont les sommets sont ces points segmentaires des transversales concourantes parallèles aux côtés.

Avec ces notations de la p.21 (voir fig. de cette page), pour les trois triangles ayant un sommet commun  $U$  intérieur à  $ABC$ , le côté opposé porté par un côté de  $ABC$  et les autres côtés parallèles à ceux de  $ABC$ , on a la relation

$$\sqrt{\langle U U_{3a} U_{2a} \rangle} + \sqrt{\langle U U_{1b} U_{3b} \rangle} + \sqrt{\langle U U_{2c} U_{1c} \rangle} = \sqrt{J}.$$

Pour les triangles déterminés par les droites passant par un point  $P$  de  $g_a$  et éventuellement un côté de son triangle pédal, on a avec les notations de la p.35 (voir fig. de cette page):  $\langle PAB \rangle = \langle PAC \rangle = \frac{h}{1+h} J$ ,  $\langle BCP_b \rangle = \langle BCP_c \rangle = (1-h) J$ ,  $\langle BP_b P_c \rangle = \langle CP_b P_c \rangle = h(1-h) J$ ,  $\langle BPP_c \rangle = \langle CPP_b \rangle = h \frac{1-h}{1+h} J$ ,  $\langle PBC \rangle = \frac{1-h}{1+h} J$ ,  $\langle PP_b P_c \rangle = h \frac{1-h}{1+h} J$ .

Un triangle construit sur  $g_a, g_b, g_c$  par côtés et une aire  $= \frac{3}{4} J$  (et les longueurs des médianes de ce triangle  $= \frac{3}{4} a, \frac{3}{4} b, \frac{3}{4} c$ ; notons que si on désigne par  $R_g$  le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, pour  $R_a$  comme plus haut, celui du cercle circonscrit à  $ABC$  et par  $R_{ga}, R_{gb}, R_{gc}$  les rayons respectifs des cercles  $\circ(B, G, C), \circ(C, G, A), \circ(A, G, B)$ , on a aussi  $R_g^2 = \frac{3}{4} \frac{R_{ga} \cdot R_{gb} \cdot R_{gc}}{R}$ ).

Si  $P$  est un point quelconque du plan de  $ABC$  et que nous désignons par  $H_{aP}, H_{bP}, H_{cP}$

les orthocentres respectifs des triangles  $BCP$ ,  $CAP$ ,  $ABP$ , on a  $\langle H_{BP} H_{CP} H_{AP} \rangle = \langle ABC \rangle$ .

Pour l'hexagone inscrit dans  $\mathcal{C}$  ayant pour sommets  $A, B, C$  et leurs symétriques par rapport à  $O$ , on a  $\langle AC_0 BA_0 CB_0 \rangle = 2S$ .

Aire du segment de disque compris entre le côté  $BC$  et l'arc correspondant du cercle circonscrit:  $(\frac{\pi \hat{A}}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\hat{A}) R^2$  où dans le premier terme,  $\hat{A}$  est exprimé avec l'angle droit pour unité.

### Rapport des aires de deux triangles

Soient les deux triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  avec  $\langle A_1 B_1 C_1 \rangle \Rightarrow S_1$  et  $\langle A_2 B_2 C_2 \rangle \Rightarrow S_2$ ;  
on a  $\{ \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \text{ ou } \hat{A}_2 = 2\text{dr} - \hat{A}_1 \} \sim \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$ , etc.;  $a_2 = a_1 \sim \frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$ , etc.;  
 $h_{a1} = h_{a1} \sim \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$ , etc.;  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_{a1}}{a_2 h_{a2}}$ , etc.

En particulier, les deux triangles sont équivalents, c.à.d. quand on a  $S_1 = S_2$ ;  
si  $\{ b_1 c_1 = b_2 c_2$  (en particulier  $b_1 = b_2$  et  $c_1 = c_2$ ) et  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  ou  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 2\text{dr}$  }  
ou si  $a_1 h_{a1} = a_2 h_{a2}$  (en particulier si  $a_1 = a_2$  et  $h_{a1} = h_{a2}$ ) etc.

Soit enfin  $A_i B_i C_i$  un triangle inscrit dans le triangle  $ABC$  avec  $A_i \in BC$ ,  $B_i \in CA$ ,  $C_i \in AB$ ;  
on a 
$$\frac{\langle A_i B_i C_i \rangle}{S} = \frac{\overline{AC_i} \cdot \overline{BA_i} \cdot \overline{CB_i} + \overline{AB_i} \cdot \overline{CA_i} \cdot \overline{BC_i}}{abc}$$

### Partages

Partage du triangle en deux parties équivalentes, c.à.d. de même aire, par la transversale la plus courte possible: celle-ci doit être placée dans l'angle le plus petit et former un triangle isocèle avec les côtés qu'elle rencontre.

Partage du triangle en trois parties équivalentes pour des droites joignant un point intérieur aux trois sommets: faire coïncider ce point avec  $C_i$  (d'après une relation écrite ci-dessus).

Partage du triangle proportionnellement à  $x, y, \dots$  par des droites issues d'un sommet; partager le côté opposé en longueurs proportionnelles à  $x, y, \dots$  et joindre les points obtenus au sommet opposé.

Partage du triangle proportionnellement à  $x, y, \dots$  par des droites issues d'un point donné  $P$  situé sur un côté, soit  $AB$ : prolonger  $BC$  jusqu'en  $D$  tel que  $\overline{BD} = \frac{\text{dist}_{BC} A}{\text{dist}_{BC} P} BC$ , ce qui rend  $PBD$  équivalent à  $ABC$ ; partager  $PBD$  comme indiqué ci-dessus par le partage de  $BD$  proportionnellement à  $x, y, \dots$ ; joindre à  $P$  les points obtenus entre  $B$  et  $C$ ; par les suivants, entre  $C$  et  $D$ , tracer des parallèles à  $CP$  et joindre à  $P$  leurs intersections avec  $CA$ .

Cette méthode peut être généralisée pour partager le triangle proportionnellement à  $x, y, \dots$  à partir d'un point intérieur donné.

### Aires orientées

On peut convenir d'attribuer le signe  $+$  ou le signe  $-$  à l'aire d'un triangle selon que son contour est parcouru dans le sens positif ou dans le sens négatif; on a alors

$$\langle ACB \rangle = -\langle ABC \rangle.$$

Si  $P$  est un point quelconque du plan, la formule suivante est alors générale, que  $P$  soit intérieure ou extérieure à  $ABC$  :

$$\langle ABC \rangle = \langle PBC \rangle + \langle PCA \rangle + \langle PAB \rangle$$

(si  $P$  est intérieure à  $ABC$ , tous les termes du second membre sont positifs ; si  $P$  est du côté opposé à  $ABC$  par rapport à un des côtés, mais intérieure à l'angle formé par les deux autres côtés, un des termes est négatif ; enfin, si  $P$  est dans un des sommets (p. 10), deux des termes sont négatifs).

## Wallaces

### Théorème fondamental

Appelons  $S_f(P)$  l'aire du triangle podaire (v. p. 14) d'un point quelconque  $P$  pour le triangle  $ABC$ , c.à.d. posons  $\langle P'_a P'_b P'_c \rangle \Rightarrow S_f(P)$  où  $\text{proj}_a P \Rightarrow P'_a$ ,  $\text{proj}_b P \Rightarrow P'_b$ ,  $\text{proj}_c P \Rightarrow P'_c$ .

$$\text{Or on a } S_f(P) = \frac{|\overline{OP}^2 - R^2|}{4R^2} S$$

où  $S = \langle ABC \rangle$  et où  $R$  est le rayon du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ .

Note: on déduit de cette formule que les triangles podaires de  $O$  et de  $H$  par rapport au triangle orthique (dont le centre du cercle circonscrit est  $O_9$ ) ont la même aire, puisque  $\overline{O_9 O} = \overline{O_9 H}$ .

Conséquence: le lieu des points dont les triangles podaires ont une aire  $S_f$  donnée est composé des deux cercles de centre  $O$  et de rayons

$$\overline{OP} = R \sqrt{1 \pm 4 \frac{S_f}{S}}$$

Théorème de Simson:  $\overline{OP} = R$  c.à.d.  $P \in \mathcal{C} \sim (P'_a, P'_b, P'_c) -$  (c.à.d.  $S_f(P) = 0$ ); cette droite est appelée droite de Simson ou droite de Wallace de  $P$  ou simplement wallace de  $P$  ( $\in \mathcal{C}$ ) et nous la désignerons par  $w(P)$ :  $P'_a P'_b P'_c \Rightarrow w(P)$ .

Il faut noter qu'écrire  $w(P)$  implique que  $P \in \mathcal{C}$ .

Si  $P$  est sur l'arc  $BC$  de  $\mathcal{C}$ , il résulte des formules de la p. 15 donnant les angles du triangle podaire, que  $\widehat{P'_b P'_a P'_c} = 2 \text{ dr.}$ , tandis que  $\widehat{P'_c P'_b P'_a} = 0$  et  $\widehat{P'_a P'_c P'_b} = 0$ ; si  $P$  est sur l'arc  $CA$  de  $\mathcal{C}$ , on trouve de même  $\widehat{P'_c P'_b P'_a} = 2 \text{ dr.}$ , et les deux autres angles  $= 0$ ; enfin, si  $P$  est sur l'arc  $AB$  de  $\mathcal{C}$ , on trouve  $\widehat{P'_a P'_c P'_b} = 2 \text{ dr.}$  et  $0$  pour les deux autres angles.

### Cas particuliers

Wallaces des sommets:  $w(A) = h_a$ ,  $w(B) = h_b$ ,  $w(C) = h_c$ .

Concernant les wallaces des secondes intersections  $H'_a, H'_b, H'_c$  des hauteurs avec  $\mathcal{C}$  (v. p. 43, rappelons que ce sont les symétriques de l'orthocentre  $H$  par rapport aux côtés:

$H'_a = \text{sym}_a H$ ,  $H'_b = \text{sym}_b H$ ,  $H'_c = \text{sym}_c H$ ), on a évidemment (puisque  $H_a = \text{proj}_a H'_a$ ,  $H_b = \text{proj}_b H'_b$ ,  $H_c = \text{proj}_c H'_c$ )

$$H_a \in w(H'_a), \quad H_b \in w(H'_b), \quad H_c \in w(H'_c);$$

on a de plus  $w(H'_a) \parallel H_b H_c$ ,  $w(H'_b) \parallel H_c H_a$ ,  $w(H'_c) \parallel H_a H_b$ ;

$w(H'_a)$ ,  $w(H'_b)$ ,  $w(H'_c)$  portent donc les côtés du triangle anticomplémentaire du triangle orthique.

Comme à la fin du paragraphe concernant le cercle circonscrit (p. 44), appelons  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  les points diamétralement opposés aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sur  $\mathcal{C}$ :

$\text{sym}_b A \Rightarrow A_0$  (d'où  $BA_0 \perp AB$ ,  $CA_0 \perp AC$ ),  $\text{sym}_c B \Rightarrow B_0$  (d'où  $CB_0 \perp BC$ ,  $AB_0 \perp BA$ ),  $\text{sym}_a C \Rightarrow C_0$  (d'où  $AC_0 \perp CA$ ,  $BC_0 \perp CB$ );

on a

$$a = w(A_0), \quad b = w(B_0), \quad c = w(C_0).$$

Wallace passant par  $O$ :  $w(P) \ni O \sim (A_0, P'_a, \text{sym}_{w(P)} P) -$ ,  $(B_0, P'_b, \text{sym}_{w(P)} P) -$ ,  $(C_0, P'_c, \text{sym}_{w(P)} P) -$ .



## Théorème de Steiner

$$\frac{1}{2}(H, P) \in w(P)$$

et par suite  $(w(P), HP) \in \mathcal{E}_3$ , puisque  $P \in \mathcal{C} \rightarrow \frac{1}{2}(H, P) \in \mathcal{E}_3$  (p. 49),  
le cercle des neuf points est donc le lieu de l'intersection  $(w(P), HP)$  de la wallace  
de  $P$  avec  $HP$ .

### Note

Si partant toujours d'un point  $P \in \mathcal{C}$ , on prolonge chacun des segments de  
droites  $PP'_A, PP'_B, PP'_C$  d'une longueur égale à sa propre longueur, on obtient des  
points qui sont évidemment aussi sur une droite, parallèle à  $w(P)$ , qui cette fois  
passe par  $H$  au lieu de  $\frac{1}{2}(H, P)$ .

### Angles avec les côtés et des wallaces entre elles

On a  $\text{ang}(a, w(P)) = 1 \text{ dr.} - \frac{1}{2} P\hat{O}A$ ,  $\text{ang}(b, w(P)) = 1 \text{ dr.} - \frac{1}{2} P\hat{O}B$ ,  $\text{ang}(c, w(P)) = 1 \text{ dr.} - \frac{1}{2} P\hat{O}C$ ;  
par exemple, pour la wallace de  $\mathcal{G}_a$  (p. 53), pour laquelle on a évidemment  $w(\mathcal{G}_a) \ni M_a$ , on  
dédit de la première de ces trois relations que  $\text{ang}(a, w(\mathcal{G}_a)) = \frac{1}{2} |\hat{B} - \hat{C}|$ .

On a aussi  $\text{ang}(w(P_1), w(P_2)) = \frac{1}{2} P_1\hat{O}P_2$ ;  
en particulier, si  $P_1$  et  $P_2$  sont diamétralement opposés sur  $\mathcal{C}$ , c.à.d. si  $P_2 = \text{sym}_O P_1$ ,  
on a  $w(P_2) \perp w(P_1)$ ; dans ce cas particulière, on a de plus  $(w(P_1), w(P_2)) \in \mathcal{E}_3$ .

Il résulte aussi de la formule donnant l'angle entre une wallace et un côté que  
si  $P_2 = \text{sym}_{OA} P_1$ ,  $w(P_1)$  et  $w(P_2)$  forment alors un triangle isocèle avec  $BC$  et des énoncés  
analogues si  $P_2 = \text{sym}_{OB} P_1$  ou  $P_2 = \text{sym}_{OC} P_1$ .

### Triangles wallaciens

Si  $P_1, P_2, P_3$  sont trois points de  $\mathcal{C}$ , le triangle  $w(P_1)w(P_2)w(P_3)$  est équiangle  
au triangle  $P_1P_2P_3$ :

$\text{ang}(w(P_1), w(P_2)) = P_1\hat{P}_3P_2$ ,  $\text{ang}(w(P_2), w(P_3)) = P_2\hat{P}_1P_3$ ,  $\text{ang}(w(P_3), w(P_1)) = P_3\hat{P}_2P_1$ ;  
il est appelé triangle wallacien du triangle  $P_1P_2P_3$  (par rapport au triangle  $ABC$ ).  
Nous le désignerons par  $w_{ABC}(P_1P_2P_3)$ , notation qui implique que les triangles  
 $ABC$  et  $P_1P_2P_3$  sont inscrits dans un même cercle  $\mathcal{C}$ .

En particulier, si  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont les trois points obtenus par rotation de  $A, B$  et  $C$   
d'un même angle sur  $\mathcal{C}$  (donc  $P_1P_2P_3 = ABC$ ), le triangle  $w(P_1)w(P_2)w(P_3)$  est  
équiangle à  $P_1P_2P_3$ , donc à  $ABC$ , et réciproquement.

Le triangle wallacien de  $P_1P_2P_3$  par rapport à  $ABC$ , soit  $w_{ABC}(P_1P_2P_3)$ , et le triangle  
wallacien de  $ABC$  par rapport à  $P_1P_2P_3$ , soit  $w_{P_1P_2P_3}(ABC)$ , sont aussi inscrits à un même  
cercle (dont le centre est  $\frac{1}{2}(H_1, H_p)$  si  $H_p$  est l'orthocentre du triangle  $P_1P_2P_3$ ).

C'est en particulier le cas pour les paires suivantes de triangles wallaciens construits  
à partir de points de  $\mathcal{E}_3$ :

$w_{H_1H_2H_3}(E_A E_B E_C)$  et  $w_{E_A E_B E_C}(H_A H_B H_C)$  (wallacien du triangle d'Euler par rapport au

triangle orthique et wallacien du triangle orthique par rapport au triangle d'Euler);  
 $w_{E_a E_b E_c}(M_a M_b M_c)$  et  $w_{M_a M_b M_c}(E_a E_b E_c)$  (wallacien du triangle complémentaire par rapport  
 au triangle d'Euler et wallacien du triangle d'Euler par rapport au triangle complémentaire);  
 effectivement,  $w_{E_a E_b E_c}(M_a M_b M_c) = E_a E_b E_c$  et  $w_{M_a M_b M_c}(E_a E_b E_c) = M_a M_b M_c$ , donc le cercle circonscrit  
 commun est le cercle circonscrit initial  $\mathcal{C}_g$  et son centre vérifie bien  $O_g = \frac{1}{2}(H, O)$  où  $H$   
 est l'orthocentre de  $E_a E_b E_c$  comme de  $ABC$  (puisque  $E_a E_b E_c = \text{hom}(H, \frac{1}{2}) ABC$ ) et  $O$  celui du  
 triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$  (p. 41).

### Autres propriétés

La longueur du segment de  $w(P)$  qui est compris entre deux côtés du triangle  
 est proportionnelle à la distance de  $P$  au sommet commun à ces deux côtés; par exemple,  
 la distance entre les points  $(b, w(P))$  et  $(c, w(P))$  est  $= \frac{a}{2R_0} \overline{AP}$ .

Si  $P_a^*$  est le second point d'intersection de  $PP_a'$  avec  $\mathcal{C}$  (où  $P_a' = \text{proj}_a P$  comme posé  
 plus haut) et semblablement pour  $P_b^*$  et  $P_c^*$ , on a

$$w(P) \parallel AP_a^*, \quad w(P) \parallel BP_b^*, \quad w(P) \parallel CP_c^* .$$

(Indépendamment de la notion de wallace, on a donc pour tout point  $P \in \mathcal{C}$ ,  
 $AP_a^* \parallel BP_b^* \parallel CP_c^*$  .)

On peut vérifier que si  $P \in \mathcal{C}$ , le point  $(a, H_a P)$  est sur la droite  $H \text{ sym}_a P$ , et  
 $w(P) \parallel H \text{ sym}_a P$ , ainsi que des propositions semblables quand on remplace  $a$  par  $b$  ou  $c$ .

Si,  $P$  étant un point quelconque,  $P_1$  et  $P_2$  sont les extrémités du diamètre de  $\mathcal{C}$   
 passant par  $P$ , c.à.d. les intersections de  $OP$  avec  $\mathcal{C}$ , on a

$$(w(P_1), w(P_2)) \in o(P_a', P_b', P_c')$$

c.à.d. que le point d'intersection des wallaces de  $P_1$  et  $P_2$  (qui est  $\in \mathcal{C}_g$  comme indiqué  
 plus haut) est sur le cercle circonscrit au triangle podaire de  $P$ ; si en particulier  
 ce point est le centre  $I$  du cercle inscrit et qu'on appelle donc  $I_1$  et  $I_2$  les intersections  
 de  $OI$  avec  $\mathcal{C}$ , on a  $(w(I_1), w(I_2)) = \Phi$  (point de Feuerbach, p. 67),  
 puisque le cercle inscrit  $\mathcal{C}_i$  est le cercle circonscrit au triangle podaire  $J_a J_b J_c$  de  $I$ .

Enfin, on a  $P_1 P_2 \parallel P_3 P_4 \rightarrow (w(P_1), w(P_2))(w(P_3), w(P_4)) \perp P_1 P_2$  (et donc  $\perp P_3 P_4$ )  
 et cette droite  $(w(P_1), w(P_2))(w(P_3), w(P_4))$  est d'ailleurs la wallace du point  
 $(\perp(w(P_2), P_1), \perp(w(P_1), P_2))$ , qui est  $\in \mathcal{C}$ .

Par tout point d'intersection de deux wallaces  $(w(P_1), w(P_2))$  passe une troisième  
 wallace  $w(P_3)$  et on a  $w(P_3) \perp P_1 P_2$ ,  $w(P_2) \perp P_3 P_1$ ,  $w(P_1) \perp P_2 P_3$ ;  
 le triangle wallacien  $w_{ABC}(P_1, P_2, P_3)$  se réduit au point d'intersection. Il en est de  
 même de  $w_{P_1 P_2 P_3}(ABC)$ , semblablement formé des trois droites  $\perp a$ ,  $\perp b$ , et  $\perp c$  passant  
 par ce point. Le point d'intersection de toutes ces wallaces est à mi-distance entre  
 l'orthocentre de  $ABC$  et celui de  $P_1 P_2 P_3$ .

En particulier, le triangle wallacien  $w_{M_a M_b M_c}(H_a H_b H_c)$  du triangle orthique par rapport  
 au triangle complémentaire et le triangle wallacien  $w_{H_a H_b H_c}(M_a M_b M_c)$  du triangle complémentaire

par rapport au triangle orthique se réduisent à un même point, le centre  $\odot$  du cercle de Taylor (p. 28), qui est bien à mi-distance entre leurs orthocentres respectifs:  
 $\odot = \frac{1}{2}(O, H_0)$ .

### Wallaces généralisées

Au lieu des perpendiculaires  $PP'_a$ ,  $PP'_b$  et  $PP'_c$  abaissées de  $P$  sur les côtés, on considère les isoclinales menées de  $P$  aux côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  du triangle, c.à.d. les droites  $PP_{a,\varphi}$ ,  $PP_{b,\varphi}$  et  $PP_{c,\varphi}$  faisant avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  un même angle  $\varphi$ ; leurs pieds  $P_{a,\varphi}$ ,  $P_{b,\varphi}$  et  $P_{c,\varphi}$  (respectivement  $\in a$ ,  $\in b$  et  $\in c$ ) sont tels que

$$P \in \mathcal{C} \rightsquigarrow (P_{a,\varphi}, P_{b,\varphi}, P_{c,\varphi}) \text{ — } ;$$

nous désignerons cette droite, appelée wallace généralisée, par  $w_\varphi(P)$ .

Angles avec les côtés:

$$\text{ang}(a, w_\varphi(P)) = \varphi - \frac{1}{2} \widehat{POA}, \quad \text{ang}(b, w_\varphi(P)) = \varphi - \frac{1}{2} \widehat{POB}, \quad \text{ang}(c, w_\varphi(P)) = \varphi - \frac{1}{2} \widehat{POC}.$$

Comme pour les wallaces proprement dites, on a

$$\text{ang}(w_\varphi(P_1), w_\varphi(P_2)) = \frac{1}{2} \widehat{P_1 O P_2} ;$$

en particulier,  $P_2 = \text{sym}_O P_1 \rightsquigarrow w_\varphi(P_2) \perp w_\varphi(P_1)$ .

On peut voir que toute droite  $d$  du plan peut être considérée comme wallace généralisée pour un triangle  $ABC$  donné; pour trouver le point  $P$  et l'angle  $\varphi$ , on trace par exemple le cercle passant par  $A$  et les intersections  $(d, b)$  et  $(d, c)$  de  $d$  avec les côtés  $b$  et  $c$ ; le point  $P$  est la seconde intersection de ce cercle avec  $\mathcal{C}$  (la première étant évidemment  $A$ ) et l'angle  $\varphi$  est celui que fait avec  $b$  la droite  $(d, b)P$  ou avec  $c$  la droite  $(d, c)P$  (ces deux angles sont égaux comme inscrits dans un même segment de cercle).

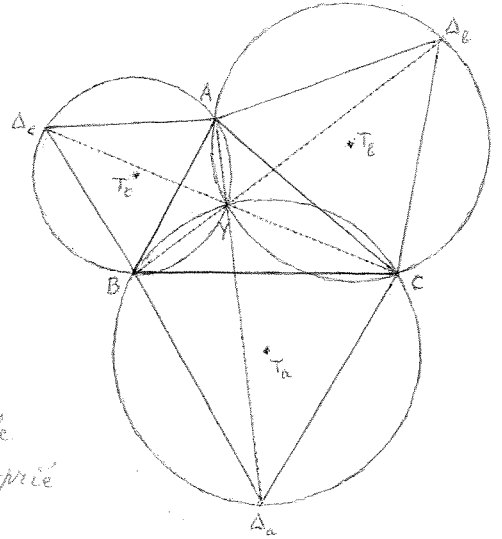
Figures construites sur les côtés

Triangles équilatéraux

Soient les triangles équilatéraux (et donc isogones, chaque angle =  $\frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ )  $BC\Delta_a$ ,  $CA\Delta_b$ ,  $AB\Delta_c$  construits sur les côtés de  $ABC$  à l'extérieur de  $ABC$ , c.à.d. que chaque troisième sommet  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$ ,  $\Delta_c$  est du côté opposé à  $A$ , à  $B$ , à  $C$  par rapport à la droite  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  respectivement. On a évidemment

$\Delta_a \in m_a$ ,  $\Delta_b \in m_b$ ,  $\Delta_c \in m_c$ , puisque  
 $\overline{B\Delta_a} = \overline{C\Delta_a} = a$ ,  $\overline{C\Delta_b} = \overline{A\Delta_b} = b$ ,  $\overline{A\Delta_c} = \overline{B\Delta_c} = c$ .

On a  $\overline{A\Delta_a} = \overline{B\Delta_b} = \overline{C\Delta_c}$ , ainsi que  $(A\Delta_a, B\Delta_b, C\Delta_c)^*$  et nous poserons  $(A\Delta_a, B\Delta_b, C\Delta_c) \Rightarrow Y$ : pour ce premier centre isogone (parfois appelé point de Steiner, appellation à éviter, car elle est utilisée aussi pour un autre point; le point diamétralement opposé au point de Fermat sur le cercle circonscrit (p. 86); il serait de toute façon plus approprié de l'appeler point de Torricelli).



Deux cas sont à distinguer:

1.- tous les angles de  $ABC$  sont  $< \frac{4}{3} dr. = 120^\circ$ , alors  $Y$  est intérieur à  $ABC$  et chaque côté de  $ABC$  est vu du point  $Y$  sous un même angle:

$$\widehat{BYC} = \widehat{CYA} = \widehat{AYB} = \frac{4}{3} dr. = 120^\circ$$

(ceci explique la dénomination "centre isogone": c'est le point duquel les trois côtés sont vus sous un même angle); propriété du centre isogone  $Y$  dans ce cas:

$$\overline{YA} + \overline{YB} + \overline{YC} \text{ min. ;}$$

2.- un des angles de  $ABC$ , soit par exemple  $\hat{A}$ , est  $> \frac{4}{3} dr. = 120^\circ$ , alors  $Y$  est extérieur à  $ABC$ , dans le cône correspondant à ce sommet  $A$ , et on a si  $\hat{A} > \frac{4}{3} dr.$ ,  $\widehat{BYC} = \frac{4}{3} dr. = 120^\circ$ ,  $\widehat{CYA} = \widehat{AYB} = \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ , les côtés  $CA$  et  $AB$  étant vus de l'extérieur au point  $Y$ .

Dans tous les cas, on a  $\overline{A\Delta_a} = \overline{B\Delta_b} = \overline{C\Delta_c}$ ; explicitement:

$$\overline{A\Delta_a}^2 = \overline{B\Delta_b}^2 = \overline{C\Delta_c}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3} S \text{ où } S \text{ est l'aire de } ABC \text{ (p. 89: } S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{bc}{2} \sin \hat{A} = \dots).$$

Les cercles circonscrits aux triangles  $BC\Delta_a$ ,  $CA\Delta_b$ ,  $AB\Delta_c$ , appelés cercles de Torricelli, concourent en ce même point, le centre isogone  $Y$ ; ils ont pour rayons respectifs  $\frac{\sqrt{3}}{3} a$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{3} b$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{3} c$  et leurs centres  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  sont sur les droites  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  à des distances données par

$$\text{dist}_{BC} T_a = \frac{\sqrt{3}}{6} a, \quad \text{dist}_{CA} T_b = \frac{\sqrt{3}}{6} b, \quad \text{dist}_{AB} T_c = \frac{\sqrt{3}}{6} c.$$

On a  $T_b T_c \perp A\Delta_a$ ,  $T_c T_a \perp B\Delta_b$ ,  $T_a T_b \perp C\Delta_c$  et le triangle  $T_a T_b T_c$  est équilatéral:

$$\overline{T_b T_c} = \overline{T_c T_a} = \overline{T_a T_b}.$$

Signalons que le centre de gravité du triangle  $\Delta_a \Delta_b \Delta_c$  coïncide avec le centre de gravité  $G$  de  $ABC$  et que se vérifie d'ailleurs toujours le cas si les triangles  $BC\Delta_a$ ,  $CA\Delta_b$ ,  $AB\Delta_c$  étaient seulement semblables entre eux sans être nécessairement équilatéraux.

Enfin, les perpendiculaires menées de  $A\Delta_a$ , de  $B\Delta_b$ , de  $C\Delta_c$  respectivement par  $A$ , par  $B$ , par  $C$ , soit  $\perp(A\Delta_a, A) \Rightarrow \delta_a$ ,  $\perp(B\Delta_b, B) \Rightarrow \delta_b$ ,  $\perp(C\Delta_c, C) \Rightarrow \delta_c$ , forment un triangle dont les sommets  $(\delta_b, \delta_c) \Rightarrow Y_a$ ,  $(\delta_c, \delta_a) \Rightarrow Y_b$ ,  $(\delta_a, \delta_b) \Rightarrow Y_c$  sont sur les cercles de Toricelli; de plus, ce triangle est équilatéral (en conséquence de l'égalité des angles entre  $A\Delta_a$ ,  $B\Delta_b$ ,  $C\Delta_c$ ) donc équilatéral:  $\overline{Y_b Y_c} = \overline{Y_c Y_a} = \overline{Y_a Y_b}$ .

Considérons de même les triangles équilatéraux  $BC\Delta'_a$ ,  $CA\Delta'_b$ ,  $AB\Delta'_c$  construits sur les côtés de  $ABC$ , mais cette fois du même côté des droites  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  que le triangle  $ABC$ , i.e.d. que le troisième sommet  $\Delta'_a$ ,  $\Delta'_b$ ,  $\Delta'_c$  est chaque fois du même côté que respectivement  $A$ ,  $B$ ,  $C$  par rapport aux droites  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . On a évidemment encore

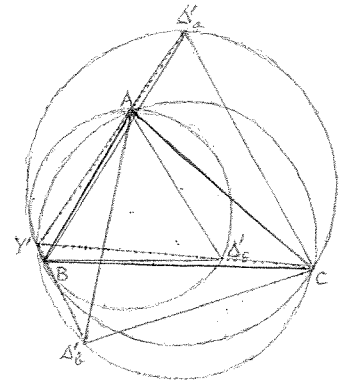
$$\Delta'_a \in m_a, \quad \Delta'_b \in m_b, \quad \Delta'_c \in m_c \quad \text{puisque on a}$$

$$\overline{B\Delta'_a} = \overline{C\Delta'_a} = a, \quad \overline{C\Delta'_b} = \overline{A\Delta'_b} = b, \quad \overline{A\Delta'_c} = \overline{B\Delta'_c} = c.$$

Dans ce cas aussi, on a  $\overline{A\Delta'_a} = \overline{B\Delta'_b} = \overline{C\Delta'_c}$ , ainsi que  $(A\Delta'_a, B\Delta'_b, C\Delta'_c) \neq$  et nous poserons  $(A\Delta'_a, B\Delta'_b, C\Delta'_c) \Rightarrow Y'$  pour ce second centre isogène; il est extérieur au triangle  $ABC$  et situé de l'autre côté que  $ABC$  par rapport au côté qui jouit de la propriété de joindre deux sommets en lesquels les angles de  $ABC$  sont soit tous deux  $< \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ , soit tous deux  $> \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$  (dans le premier cas,  $Y'$  est de l'autre côté que  $ABC$  par rapport à son côté le plus grand, tandis que dans le second cas,  $Y'$  est de l'autre côté que  $ABC$  par rapport à son côté le plus petit; il faut en effet se souvenir qu'à un plus grand — respectivement plus petit — angle est opposé un plus grand — respectivement plus petit — côté et noter que puisque  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 dr.$ , le plus grand angle est  $\geq \frac{2}{3} dr.$  et le plus petit  $\leq \frac{2}{3} dr.$ , tandis que l'angle moyen est  $\geq \frac{2}{3} dr.$  somme le plus grand ou  $\leq \frac{2}{3} dr.$  somme le plus petit; il suffit donc de comparer l'angle moyen à  $\frac{2}{3} dr.$  et mettre le sommet correspondant avec celui qui a le plus petit angle si le moyen est  $\leq \frac{2}{3} dr.$  ou avec celui qui a le plus grand angle si le moyen est  $\geq \frac{2}{3} dr.$ ); par exemple, si  $\hat{B}$  et  $\hat{C} < \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$  (et alors  $\hat{A} > \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ ) ou si  $\hat{B}$  et  $\hat{C} > \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$  (et alors  $\hat{A} < \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ ),  $Y'$  est de l'autre côté de  $BC$  que le sommet  $A$ .

Le côté de  $ABC$  au delà duquel  $Y'$  se trouve est vu de ce point sous un angle de  $\frac{4}{3} dr. = 120^\circ$ . Chacun des deux autres côtés est vu de  $Y'$  sous un angle de  $\frac{2}{3} dr. = 60^\circ$ . Par exemple, sur la figure,  $B\hat{Y}'A = \frac{4}{3} dr. = 120^\circ$  et  $B\hat{Y}'C = C\hat{Y}'A = \frac{2}{3} dr. = 60^\circ$  ( $Y'C$  est donc bissectrice de l'angle  $B\hat{Y}'A$ ).

On a  $\overline{A\Delta'_a}^2 + \overline{A\Delta'_a}^2 = \overline{B\Delta'_b}^2 + \overline{B\Delta'_b}^2 = \overline{C\Delta'_c}^2 + \overline{C\Delta'_c}^2 = a^2 + b^2 + c^2$   
et  $\overline{A\Delta'_a}^2 - \overline{A\Delta'_a}^2 = \overline{B\Delta'_b}^2 - \overline{B\Delta'_b}^2 = \overline{C\Delta'_c}^2 - \overline{C\Delta'_c}^2 = 4\sqrt{3}S$  où  $S$  est l'aire de  $ABC$  (p. 89), d'où



$$\overline{A\Delta'_a}^2 = \overline{B\Delta'_b}^2 = \overline{C\Delta'_c}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}S \quad (\text{cf. les valeurs données plus haut pour } \overline{A\Delta'_a}^2 = \overline{B\Delta'_b}^2 = \overline{C\Delta'_c}^2).$$

Evidemment,  $\Delta_a\Delta'_a \perp BC$ ,  $\Delta_b\Delta'_b \perp CA$ ,  $\Delta_c\Delta'_c \perp AB$  et  $M_a = \frac{1}{2}(\Delta_a, \Delta'_a)$ ,  $M_b = \frac{1}{2}(\Delta_b, \Delta'_b)$ ,  $M_c = \frac{1}{2}(\Delta_c, \Delta'_c)$ .

Les cercles circonscrits aux triangles  $BC\Delta'_a$ ,  $CA\Delta'_b$ ,  $AB\Delta'_c$  (parfois aussi appelés cercles de Torricelli en même temps que les cercles circonscrits à  $BC\Delta_a$ ,  $CA\Delta_b$ ,  $AB\Delta_c$ , considérés plus haut) concourent aussi en  $Y'$ . Ils sont symétriques de ceux qui sont considérés plus haut par rapport aux côtés respectifs de  $ABC$  et ont donc les mêmes rayons respectifs; leurs centres  $T'_a, T'_b, T'_c$  sont aussi sur les médiatrices respectives  $m_a, m_b, m_c$  de  $ABC$ , aux mêmes distances respectives des côtés, d'où  $M_a = \frac{1}{2}(T_a, T'_a)$ ,  $M_b = \frac{1}{2}(T_b, T'_b)$ ,  $M_c = \frac{1}{2}(T_c, T'_c)$ .

Chacun des segments  $\Delta_a\Delta'_a, \Delta_b\Delta'_b, \Delta_c\Delta'_c$ , portés par les médiatrices, est divisé en trois segments égaux par ces points:  $\overline{\Delta_a T_a} = \overline{T_a T'_a} = \overline{T'_a \Delta'_a} = \frac{1}{3} \overline{\Delta_a \Delta'_a}$ ,  $\overline{\Delta_b T_b} = \overline{T_b T'_b} = \overline{T'_b \Delta'_b} = \frac{1}{3} \overline{\Delta_b \Delta'_b}$ ,  $\overline{\Delta_c T_c} = \overline{T_c T'_c} = \overline{T'_c \Delta'_c} = \frac{1}{3} \overline{\Delta_c \Delta'_c}$ . Comme  $T_a T_b T_c, T'_a T'_b T'_c$  est équilatéral:  $\overline{T'_b T'_c} = \overline{T'_c T'_a} = \overline{T'_a T'_b}$ .

Les centres isogones sont les points inverses des centres isodynamiques (p. 69):  
 $Y = \text{inv } W, \quad Y' = \text{inv } W'$ .

### Carrés extérieurs

Soient les carrés  $BA_2A_1C, CB_2B_1A, AC_2C_1B$  construits respectivement sur les côtés  $BC, CA, AB$  du triangle  $ABC$ , extérieurement à celui-ci (les points  $A_2$  et  $A_1$  sont donc tels que  $BA_2$  et  $CA_1 \perp BC$ ,  $A_2A_1 \parallel BC$ ,  $\overline{BA_2} = \overline{CA_1}$ , etc.).

Posons  $(B_1, B_2, C_2, C_1) \Rightarrow \Xi_a, (C_1, C_2, A_2, A_1) \Rightarrow \Xi_b, (A_1, A_2, B_2, B_1) \Rightarrow \Xi_c$ ; le triangle  $\Xi_a\Xi_b\Xi_c$  dont les côtés portent les segments  $A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1$  est homothétique au triangle  $ABC$  puisque  $A_2A_1 \parallel BC, B_2B_1 \parallel CA, C_2C_1 \parallel AB$ . Le centre d'homothétie est le point de Lemoine  $L$ ; on a  $\Xi_a \in s_a, \Xi_b \in s_b, \Xi_c \in s_c$ .

Ce triangle peut être décrit par la notation suivante (q.p.c)  $\Xi_a\Xi_b\Xi_c = \text{hom}(L, \rho)ABC$  où  $\rho = 1 + \frac{a}{LL_a} = 1 + \frac{b}{LL_b} = 1 + \frac{c}{LL_c}$ .

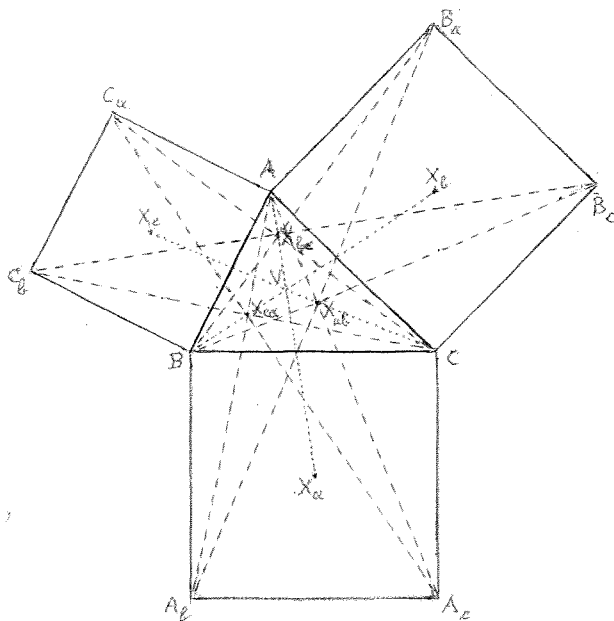
Posons aussi  $[\|(AB_2, C_2), \|(AC_2, B_2)] \Rightarrow Y_a, [\|(BC_2, A_2), \|(BA_2, C_2)] \Rightarrow Y_b, [\|(CA_2, B_2), \|(CB_2, A_2)] \Rightarrow Y_c$ , de manière à obtenir les parallélogrammes  $AB_2Y_aC_2, BC_2Y_bA_2, CA_2Y_cB_2$ ; on a

$Y_a \in h_a, Y_b \in h_b, Y_c \in h_c$  et les triangles  $B_2Y_aA, C_2AY_a, BC_2Y_b, Y_bA_2B, Y_cCA_2, CY_cB_2$  sont directement égaux (p. 119) à  $ABC$ , ce qui entraîne notamment

$$\overline{AY_a} = a, \quad \overline{BY_b} = b, \quad \overline{CY_c} = c. \quad \text{On a aussi}$$

$$\frac{1}{2}(A, Y_a) = \frac{1}{2}(B_2, C_2) \in h_a, \quad \frac{1}{2}(B, Y_b) = \frac{1}{2}(C_2, A_2) \in h_b, \quad \frac{1}{2}(C, Y_c) = \frac{1}{2}(A_2, B_2) \in h_c;$$

$$(BB_2, CC_2) \in h_a, \quad (CC_2, AA_2) \in h_b, \quad (AA_2, BB_2) \in h_c;$$



$$\begin{aligned} \overline{B_a C_a}^2 &= b^2 + c^2 + 2bc \cos \hat{A} = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 4g_a^2, \\ \overline{C_b A_b}^2 &= c^2 + a^2 + 2ca \cos \hat{B} = 2(c^2 + a^2) - b^2 = 4g_b^2, \\ \overline{A_c B_c}^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \hat{C} = 2(a^2 + b^2) - c^2 = 4g_c^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{B_a C_a}^2 + \overline{C_b A_b}^2 + \overline{A_c B_c}^2 &= 3(a^2 + b^2 + c^2); & B_a C_a \perp g_a, & C_b A_b \perp g_b, & A_c B_c \perp g_c; \\ \overline{B_a B_a} &= \overline{C_c C_a}, & \overline{C_c C_b} &= \overline{A_a A_b}, & \overline{A_a A_c} &= \overline{B_b B_c}, \\ & B_b A_a \perp C_c C_a, & C_c C_b \perp A_a A_b, & A_a A_c \perp B_b B_c; \\ & (B_b A_a, C_c C_a, B_c C_b)^* & , & (C_c C_b, A_a A_b, C_a A_c)^* & , & (A_a A_c, B_b B_c, A_b B_a)^* \end{aligned}$$

et nous posons  $(B_b A_a, C_c C_a, B_c C_b) \Rightarrow X_{bc}$ ,  $(C_c C_b, A_a A_b, C_a A_c) \Rightarrow X_{ca}$ ,  $(A_a A_c, B_b B_c, A_b B_a) \Rightarrow X_{ab}$ ;  
on a  $A X_{bc} \perp B_c C_b$ ,  $B X_{ca} \perp C_a A_c$ ,  $C X_{ab} \perp A_b B_a$ .

Appelons  $X_a, X_b, X_c$  les centres respectifs des carrés  $B A_b A_c C$ ,  $C B_c B_a A$ ,  $A C_c C_b B$   
(c.à.d.  $X_a = \frac{1}{2}(B, A_c) = \frac{1}{2}(C, A_b)$ ,  $X_b = \frac{1}{2}(C, B_a) = \frac{1}{2}(A, B_c)$ ,  $X_c = \frac{1}{2}(A, C_b) = \frac{1}{2}(B, C_a)$ ,  
et on a aussi  $X_a = \frac{1}{2}(Y_b, Y_c)$ ,  $X_b = \frac{1}{2}(Y_c, Y_a)$ ,  $X_c = \frac{1}{2}(Y_a, Y_b)$ );

on a  $X_{bc} \in A X_a$ ,  $X_{ca} \in B X_b$ ,  $X_{ab} \in C X_c$ ;  
 $A X_a \perp B_c C_b$ ,  $B X_b \perp C_a A_c$ ,  $C X_c \perp A_b B_a$ ,  
 $X_b X_c \parallel B_c C_b$ ,  $X_c X_a \parallel C_a A_c$ ,  $X_a X_b \parallel A_b B_a$ ,

et par conséquent,  $A X_a \perp X_b X_c$ ,  $B X_b \perp X_c X_a$ ,  $C X_c \perp X_a X_b$ ;  
le centre de gravité du triangle  $X_a X_b X_c$  coïncide avec celui du triangle  $ABC$ , soit  $G$ ;  
il en est de même pour les triangles  $Y_a Y_b Y_c$ ,  $A_b B_c C_a$  et  $A_c B_a C_b$ ;

$$\begin{aligned} \overline{B_c C_b}^2 &= 2(b^2 + c^2) + 4bc \sin \hat{A} = 2(b^2 + c^2) + 8J, & \overline{C_a A_c}^2 &= 2(c^2 + a^2) + 4ca \sin \hat{B} = 2(c^2 + a^2) + 8J, \\ \overline{A_b B_a}^2 &= 2(a^2 + b^2) + 4ab \sin \hat{C} = 2(a^2 + b^2) + 8J, & \text{où } J &\text{ est l'aire du triangle } ABC \text{ (p. 89)}; \\ \overline{X_b X_c} &= \overline{A X_a} = \frac{1}{2} \overline{B_c C_b}, & \overline{X_c X_a} &= \overline{B X_b} = \frac{1}{2} \overline{C_a A_c}, & \overline{X_a X_b} &= \overline{C X_c} = \frac{1}{2} \overline{A_b B_a}; \\ \overline{X_b X_c}^2 + \overline{X_c X_a}^2 + \overline{X_a X_b}^2 &= \overline{A X_a}^2 + \overline{B X_b}^2 + \overline{C X_c}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6J; \\ \langle B C B_a C_a \rangle &= \overline{X_b X_c}^2 = \frac{1}{4} \overline{B_c C_b}^2, & \langle C A C_b A_b \rangle &= \overline{X_c X_a}^2 = \frac{1}{4} \overline{C_a A_c}^2, & \langle A B A_c B_c \rangle &= \overline{X_a X_b}^2 = \frac{1}{4} \overline{A_b B_a}^2; \\ \langle A_c B_c B_a C_a C_b A_b \rangle &= a^2 + b^2 + c^2 + 4J = 2 \overline{X_b X_c}^2 + a^2 = 2 \overline{X_c X_a}^2 + b^2 = 2 \overline{X_a X_b}^2 + c^2; \\ \langle X_a X_b X_c \rangle &= \frac{1}{4} \langle A_c B_c C_a A_b \rangle = \frac{1}{4} \langle B_a C_b A_b B_c \rangle = \frac{1}{4} \langle C_b A_c B_c C_a \rangle. \end{aligned}$$

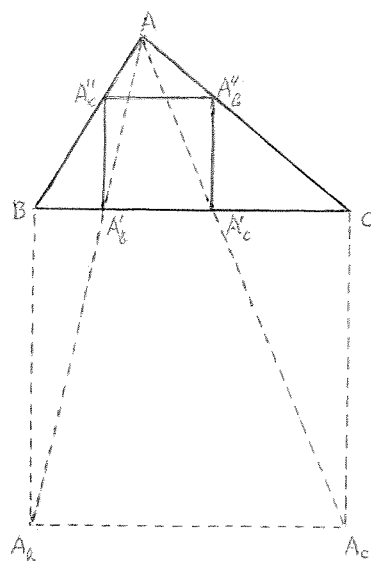
Enfin on a  $(A X_a, B X_b, C X_c)^*$  et on pose  $(A X_a, B X_b, C X_c) \Rightarrow V$ , ce point étant appelé point de Vecten; c'est l'orthocentre du triangle  $X_a X_b X_c$ .

### Carrés inscrits

Soit par exemple le carré dont un côté,  $A_b' A_c'$ , est porté par  $BC$  et dont chacun des deux autres sommets,  $A_b''$  et  $A_c''$  est sur un des deux autres côtés de  $ABC$ :  
 $A_b'' \in CA$  et  $A_c'' \in AB$  (on suppose que  $\hat{B} \leq 1 \text{ dr.}$  et  $\hat{C} \leq 1 \text{ dr.}$ , sinon le carré  $A_b' A_c' A_b'' A_c''$  ne serait pas entièrement inscrit dans  $ABC$  au sens strict, c.à.d. tout entier intérieur à  $ABC$ ; mais à part cela, tout ce qui est exposé ci-dessous resterait vrai).

On a  $A_b' \in A A_b$  et  $A_c' \in A A_c$  où  $A_b$  et  $A_c$  ont la même signification

que ci-avant : sommets du carré construit sur BC du côté opposé à celui où se trouve ABC. Cette propriété permet de construire facilement le carré  $A'_b A'_c A''_b A''_c$  : sur chacune des perpendiculaires en B et en C à BC, on porte du côté opposé à celui où se trouve ABC, une longueur = a, ce qui donne les points  $A_b$  et  $A_c$ , qu'il suffit de joindre à A ; les intersections des deux droites ainsi obtenues avec BC sont les extrémités du côté du carré cherché, joint par BC.



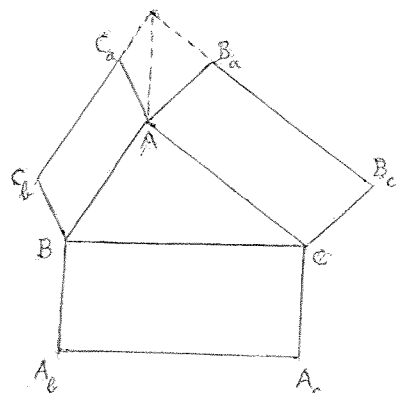
Note : plus généralement, pour inscrire à ABC un rectangle semblable à un rectangle donné, dont un côté soit sur BC, on procède de même en remplaçant simplement le carré  $BCA_b A_c$  par un rectangle semblable au rectangle donné. (N.B. : Le lieu du centre (= intersection des diagonales) de ces rectangles inscrits à ABC et dont un côté est sur BC, est le segment de droite  $M_a Z_a$ .)

Longueur du côté du carré  $A'_b A'_c A''_b A''_c$  :  $x_a = \frac{aha}{a+h_a}$ ,  
 il vaut la moitié de la moyenne harmonique de a et  $h_a$  :  $\frac{1}{x_a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h_a}$ .

Tout ce qui vient d'être exposé peut être transposé pour les deux autres carrés inscrits : celui dont un côté est porté par CA et celui dont un côté est porté par AB ; notamment, on a de même pour leurs côtés respectifs  $\frac{1}{x_b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{h_b}$  et  $\frac{1}{x_c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h_c}$ .

Théorème de Clairaut

Au lieu de considérer comme un peu plus haut les carrés construits sur les côtés de ABC, on prend des parallélogrammes, construits de la manière suivante. Sur deux des côtés, par exemple AB et AC, on place des parallélogrammes quelconques dont un côté soit respectivement AB et AC. Avec des notations analogues à celles que nous avons introduites lorsqu'il s'agissait de carrés, on aura ainsi le parallélogramme  $ABC_c C_a$  tel que  $C_a C_c \parallel AB$ ,  $\overline{C_a C_c} = \overline{AB}$  et le parallélogramme  $ACB_b B_a$  tel que  $B_a B_b \parallel AC$ ,  $\overline{B_a B_b} = \overline{AC}$ . Pour construire le troisième parallélogramme, sur BC, on considère le segment de droite qui joint à A l'intersection  $(B_b B_a, C_c C_a)$  des côtés extérieurs (prolongés) des deux premiers parallélogrammes : pour les côtés adjacents à B et à C du troisième parallélogramme, on prend des segments  $BA_b$  et  $CA_c$  tous deux  $\parallel (B_b B_a, C_c C_a) A$  et tels que  $\overline{BA_b} = \overline{CA_c} = \overline{(B_b B_a, C_c C_a) A}$  (d'où  $A_b A_c \parallel BC$  et  $\overline{A_b A_c} = \overline{BC}$ ).





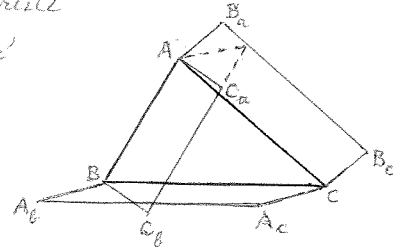
Dans ce cas, on a (en utilisant la notation  $\langle \rangle$  introduite p. 89 pour les aires)

$$\langle BCA_c A_b \rangle = \langle ABC_b C_a \rangle + \langle ACB_c B_a \rangle$$

et ceci constitue le théorème de Clairaut.

Si au lieu de placer les deux premiers parallélogrammes à l'extérieur de ABC, ce qui entraîne que le troisième le soit aussi, on construit l'un des deux, par exemple  $ABC_b C_a$ , du même côté que ABC par rapport au côté sur lequel il est placé, dans ce cas le côté AB, on a

$$\langle BCA_c A_b \rangle = \langle ACB_c B_a \rangle - \langle ABC_b C_a \rangle.$$



Si en particulier, dans ce cas,  $ABC_b C_a$  et  $ACB_c B_a$  ont la même aire, le point  $(B_c B_a, C_b C_a)$  est sur la droite  $\parallel (a, A)$  et  $A_b A_c$  est alors sur la droite BC, c.à.d. que  $\langle BCA_c A_b \rangle = 0$ .

La première égalité peut être considérée comme générale à condition de prendre les aires des parallélogrammes en valeurs algébriques, positive pour un parallélogramme à l'extérieur de ABC et négative dans le cas contraire.

### Triangle circonscrit semblable

La construction proposée ici consiste à mener par chaque sommet du triangle ABC une droite faisant vers l'extérieur un même angle  $\varphi$  avec un des côtés adjacents à ce sommet, le choix entre les deux côtés adjacents étant chaque fois fait en tournant dans le même sens pour les trois sommets. Si, comme

sur la figure, on tourne dans le sens ABC pour le choix du côté à partir de chaque sommet et qu'on désigne par  $a_\varphi, b_\varphi, c_\varphi$  les droites obtenues, on a donc

$\text{ang}(BC, a_\varphi) = \text{ang}(CA, b_\varphi) = \text{ang}(AB, c_\varphi) = \varphi$ .  
 Désignons par  $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$  les sommets du triangle que ces droites forment, en posant  $(b_\varphi, c_\varphi) \Rightarrow A_\varphi, (c_\varphi, a_\varphi) \Rightarrow B_\varphi, (a_\varphi, b_\varphi) \Rightarrow C_\varphi$ ; ceci permet d'écrire les relations précédentes sous la forme  $C\hat{B}C_\varphi = A\hat{C}A_\varphi = B\hat{A}B_\varphi = \varphi$ .

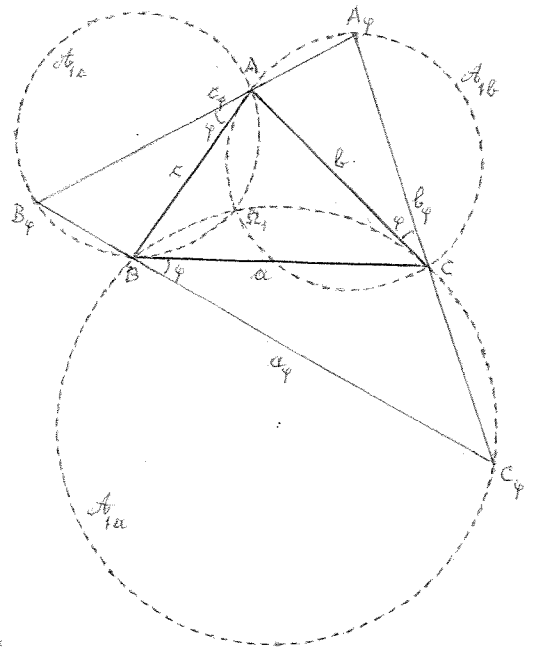
Le triangle obtenu  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  est équiangle au triangle ABC:  $\hat{A}_\varphi = \hat{A}, \hat{B}_\varphi = \hat{B}, \hat{C}_\varphi = \hat{C}$ ; il lui est donc directement semblable (p. 121):

$$A_\varphi B_\varphi C_\varphi \sim ABC$$

Autres angles des triangles extérieurs:

$$C\hat{A}A_\varphi = \hat{B} + \hat{C} - \varphi = 2dr. - \hat{A} - \varphi, \quad A\hat{B}B_\varphi = \hat{C} + \hat{A} - \varphi = 2dr. - \hat{B} - \varphi, \quad B\hat{C}C_\varphi = \hat{A} + \hat{B} - \varphi = 2dr. - \hat{C} - \varphi.$$

Les cercles  $\circ(B, C, C_\varphi), \circ(C, A, A_\varphi), \circ(A, B, B_\varphi)$  sont respectivement les cercles



adjoints (pp. 83-84)  $\sigma_{1a}, \sigma_{1b}, \sigma_{1c}$ , qui concourent au point de Brocard  $\Omega_1$  (p. 82), compte tenu du sens choisi au départ. Ce point est le point double (p. 122) pour la similitude: on a  $A\Omega_1 A_\varphi = B\Omega_1 B_\varphi = C\Omega_1 C_\varphi = \varphi$  et plus généralement, tous les angles de sommet  $\Omega_1$  et dont les côtés portent des points homologues de  $ABC$  et  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  ont pour mesure  $\varphi$ , par exemple  $H\Omega_1 H_\varphi = \varphi$  si  $H_\varphi$  est l'orthocentre de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$ . Le rapport de similitude  $k$  de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  par rapport à  $ABC$  vaut  $\frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin \omega}$ ;

$$\frac{a_\varphi}{a} = \frac{b_\varphi}{b} = \frac{c_\varphi}{c} = \frac{\overline{\Omega_1 A_\varphi}}{\overline{\Omega_1 A}} = \frac{\overline{\Omega_1 B_\varphi}}{\overline{\Omega_1 B}} = \frac{\overline{\Omega_1 C_\varphi}}{\overline{\Omega_1 C}} = \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin \omega}.$$

Ce rapport  $k$  entre les dimensions linéaires de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  et celles de  $ABC$  croît avec  $\varphi$ , à partir de  $k=1$  pour  $\varphi=0$  et jusqu'à un maximum  $k_{\max} = \frac{1}{\sin \omega}$  pour  $\varphi = 180^\circ - \omega$ , puis décroît au-delà. Le second point de Brocard de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  est sur le cercle  $\sigma(0, \overline{O\Omega_1})$ . Le point de Lemoine de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  est sur le cercle  $\sigma(O, L)$ , c.à.d. le cercle de Brocard de  $ABC$ .

Si la droite menée par chaque sommet fait un angle  $\varphi$  vers l'intérieur du triangle  $ABC$  au lieu de l'extérieur, on obtient encore un triangle directement semblable à  $ABC$ , mais d'abord plus petit, jusqu'à se réduire à un point, le point de Brocard, lorsque  $\varphi = \omega$ . Le rapport de similitude devient alors  $\frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}$  si  $\varphi$  est pris en valeur absolue. Il ne redevenit plus grand que  $ABC$  que pour les grandes valeurs absolues de  $\varphi$ .

Tout ce qui vient d'être dit peut être transposé au cas où on tourne dans le sens opposé pour le choix, en chaque sommet, du côté de  $ABC$  avec lequel la droite menée par ce sommet fait un angle  $\varphi$ , c.à.d. lorsqu'on place au sommet  $C$  au lieu de  $B$  l'angle tel que  $\text{ang}(a, a_\varphi) = \varphi$ , etc. Les cercles adjoints sur lesquels se trouvent respectivement  $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$  sont dans ce cas respectivement  $\sigma_{2c}, \sigma_{2a}, \sigma_{2b}$ , qui concourent en  $\Omega_2$ , c.à.d. qu'un lieu de  $A_\varphi \in \sigma_{1b}, B_\varphi \in \sigma_{1c}, C_\varphi \in \sigma_{1a}$  comme ci-dessus, on a cette fois  $A_\varphi \in \sigma_{2c}, B_\varphi \in \sigma_{2a}, C_\varphi \in \sigma_{2b}$ . C'est alors le second point de Brocard  $\Omega_2$  qui est le point double de la similitude de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  avec  $ABC$ . Pour un même angle  $\varphi$ , on passe du triangle  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  considéré en premier lieu à celui-ci par une rotation d'angle  $2\varphi$  autour du point  $O$ .

Une autre manière d'obtenir un triangle circonscrit semblable consiste à mener par chaque sommet de  $ABC$  une droite inclinée d'un même angle  $\varphi$  non pas avec un des deux côtés adjacents à ce sommet, mais avec le côté opposé ou bien avec le côté du triangle anticomplémentaire passant par ce sommet, ce qui revient au même puisque les côtés du triangle anticomplémentaire  $A'B'C'$  sont parallèles aux côtés correspondants de  $ABC$ . (Si on veut que le triangle obtenu  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  soit circonscrit à  $ABC$  au sens strict, donc que les sommets de  $ABC$  soient tous trois sur les côtés de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  et non leurs prolongements, on choisira  $\varphi$  plus petit que chacun des angles de  $ABC$ ). On prend donc

$$\text{ang}(c'B', a_\varphi) = \text{ang}(a'C', b_\varphi) = \text{ang}(b'A', c_\varphi) = \varphi.$$

Cette fois, les sommets du triangle obtenu ne sont plus, par rapport aux côtés de  $ABC$ , du même côté que les sommets homologues de  $ABC$ . On aura encore

$$\hat{A}_\varphi = \hat{A}, \quad \hat{B}_\varphi = \hat{B}, \quad \hat{C}_\varphi = \hat{C} \quad \text{et} \quad A_\varphi B_\varphi C_\varphi \sim ABC.$$

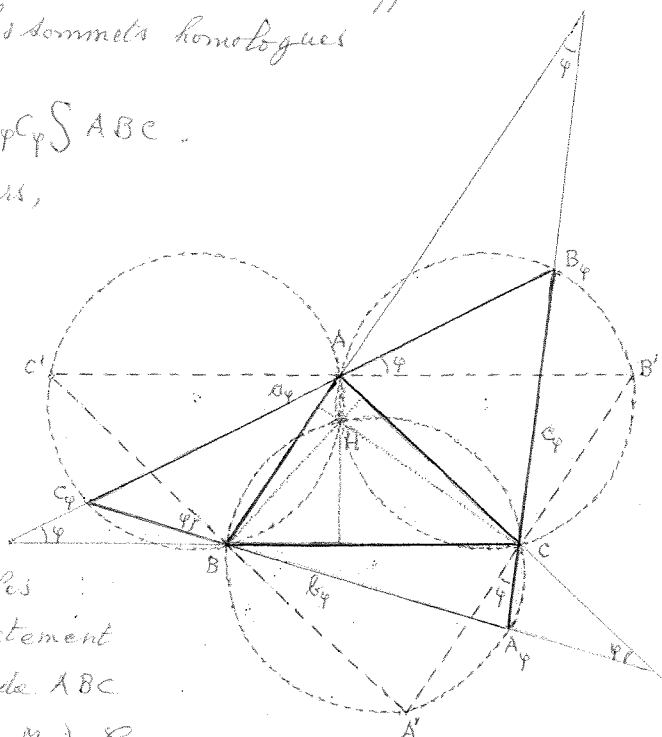
Les autres angles des triangles extérieurs, qui avec  $ABC$  composent le triangle

$$\text{obtenu } A_\varphi B_\varphi C_\varphi, \text{ sont donnés par}$$

$$\hat{B}C A_\varphi = \hat{B} + \varphi, \quad \hat{C}A B_\varphi = \hat{C} + \varphi, \quad \hat{A}B C_\varphi = \hat{A} + \varphi,$$

$$\hat{C}B A_\varphi = \hat{C} - \varphi, \quad \hat{A}C B_\varphi = \hat{A} - \varphi, \quad \hat{B}A C_\varphi = \hat{B} - \varphi.$$

Les cercles circonscrits à ces triangles extérieurs, à savoir  $\circ(B, C, A_\varphi)$ ,  $\circ(C, A, B_\varphi)$ ,  $\circ(A, B, C_\varphi)$ , coïncident ici respectivement avec les cercles circonscrits aux triangles  $A'CB$ ,  $CB'A$ ,  $BAC'$ , qui sont tous trois directement égaux (p. 113) à  $ABC$  (ils sont symétriques de  $ABC$  respectivement par rapport aux points  $M_a, M_b, M_c$ ). Ces trois cercles sont donc égaux entre eux et égaux au cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  de  $ABC$ . Leur rayon est  $R$ . Ces cercles concourent en  $H$ , qui est à la fois l'orthocentre de  $ABC$  et le centre du cercle (de rayon  $2R$ ) circonscrit à  $A'B'C'$  :



$H \in \circ(B, C, A_\varphi) = \circ(HA')$ ,  $H \in \circ(C, A, B_\varphi) = \circ(HB')$ ,  $H \in \circ(A, B, C_\varphi) = \circ(HC')$ ,  $B'$  est aussi le point double (p. 122) de la similitude de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  avec  $A'B'C'$ , ainsi que le centre du cercle circonscrit à  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  (qui a pour rayon  $2R \cos \varphi$ ).

Le rapport de similitude de  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  par rapport à  $ABC$  vaut ici simplement  $2 \cos \varphi$  :

$$\frac{a_\varphi}{a} = \frac{b_\varphi}{b} = \frac{c_\varphi}{c} = 2 \cos \varphi.$$

Donc, dans ce cas-ci, la grandeur du triangle  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  décroît lorsqu'on fait croître  $\varphi$  et on a  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi = ABC$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ dr.} = 60^\circ$ .

On déduit aussi de ces relations que

$$\overline{\text{proj}_\varphi B \text{ proj}_\varphi C} = \frac{1}{2} C_\varphi B_\varphi, \quad \overline{\text{proj}_\varphi C \text{ proj}_\varphi A} = \frac{1}{2} A_\varphi C_\varphi, \quad \overline{\text{proj}_\varphi A \text{ proj}_\varphi B} = \frac{1}{2} B_\varphi A_\varphi.$$

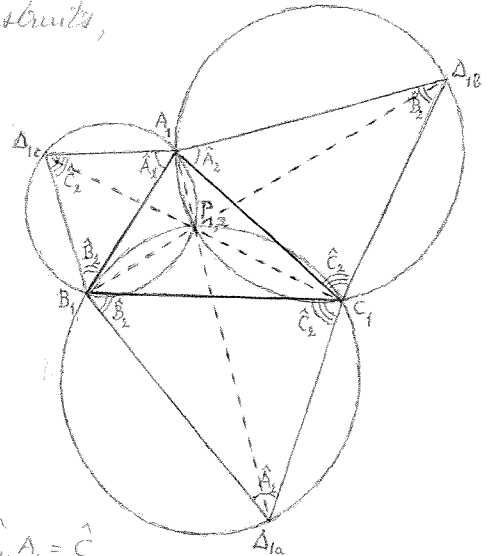
Cas limites: si  $\varphi = 0$ , ce triangle  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  coïncide avec le triangle anticomplémentaire  $A'B'C'$ ; si  $\varphi = 1 \text{ dr.}$  (ce qui empêche la réalisation de la condition indiquée ci-dessus pour que ce triangle soit réellement circonscrit à  $ABC$ , à savoir  $\varphi$  plus petit que chacun des angles de  $ABC$ ),  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$  se réduit à un point, le point  $H$ .

### Mœtarpôles

Cette notion concerne la construction, sur les côtés du triangle  $ABC$ , de triangles semblables à un autre triangle, de telle manière que le côté de chaque triangle semblable à cet autre coïncide avec le côté correspondant de  $ABC$ . Pour distinguer

les triangles, nous désignerons ci-dessous le triangle ABC sur la base duquel la construction doit être faite, par  $A_1B_1C_1$  et l'autre triangle, auquel doivent être semblables les triangles construits, par  $A_2B_2C_2$ .

Considérons d'abord le cas où les triangles semblables à  $A_2B_2C_2$  sont construits sur les côtés du triangle  $A_1B_1C_1$  à l'extérieur de celui-ci. Par analogie avec ce qui a été fait plus haut pour les triangles équilatéraux, nous désignerons les sommets extérieurs par  $\Delta_{1a}, \Delta_{1b}, \Delta_{1c}$ . Dans les triangles construits, ces sommets sont respectivement opposés à  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  et on a



$$C_1 \hat{\Delta}_{1a} B_1 = \hat{A}_2, \quad A_1 \hat{\Delta}_{1b} C_1 = \hat{B}_2, \quad B_1 \hat{\Delta}_{1c} A_1 = \hat{C}_2.$$

On a aussi  $\hat{A}_2 = C_1 \hat{A}_1 \Delta_{1b} = \Delta_{1c} \hat{A}_1 B_1$ ,  $\hat{B}_2 = A_1 \hat{B}_1 \Delta_{1c} = \Delta_{1a} \hat{B}_1 C_1$ ,  $\hat{C}_2 = B_1 \hat{C}_1 \Delta_{1a} = \Delta_{1b} \hat{C}_1 A_1$ .  
 Les conditions de similitude posées s'écrivent (p. 121):

$$A_{1a} B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2, \quad A_1 \Delta_{1b} C_1 \sim A_2 B_2 C_2, \quad A_1 B_1 \Delta_{1c} \sim A_2 B_2 C_2$$

Il s'agit de similitudes inverses, les sens de  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  étant les mêmes, tandis que les sens de  $\Delta_{1b}B_1C_1$ , etc. sont opposés.

Les cercles circonscrits aux trois triangles se coupent en un même point  $P_{1,2}$ . Celui-ci est intérieur à  $A_1B_1C_1$  et est tel que

$$B_1 \hat{P}_{1,2} C_1 = 2dr. - \hat{A}_2, \quad C_1 \hat{P}_{1,2} A_1 = 2dr. - \hat{B}_2, \quad A_1 \hat{P}_{1,2} B_1 = 2dr. - \hat{C}_2$$

si  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 < 2dr.$ ,  $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 < 2dr.$ ,  $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 < 2dr.$ . Dans le cas où au contraire une de ces sommes est  $> 2dr.$ ,  $P_{1,2}$  est dans un des combles. Si par exemple  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 > 2dr.$ ,  $P_{1,2}$  est dans le comble opposé à l'angle  $A_1$  du triangle  $A_1B_1C_1$  et on a alors

$$B_1 \hat{P}_{1,2} C_1 = 2dr. - \hat{A}_2, \quad C_1 \hat{P}_{1,2} A_1 = \hat{B}_2, \quad A_1 \hat{P}_{1,2} C_1 = \hat{C}_2.$$

Ce point  $P_{1,2}$ , intersection des cercles circonscrits aux triangles extérieurs à  $A_1B_1C_1$  et semblables à  $A_2B_2C_2$ , duquel les côtés de  $A_1B_1C_1$  sont vus sous des angles égaux ou supplémentaires à ceux de  $A_2B_2C_2$ , est appelé premier métapôle du triangle  $A_1B_1C_1$  par rapport au triangle  $A_2B_2C_2$ .

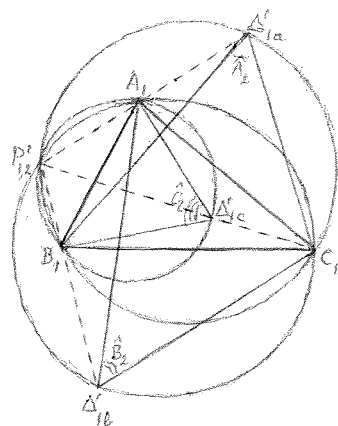
On a  $P_{1,2} \in A_1 \Delta_{1a}$ ,  $P_{1,2} \in B_1 \Delta_{1b}$ ,  $P_{1,2} \in C_1 \Delta_{1c}$ ,  
 c.à d.  $(A_1 \Delta_{1a}, B_1 \Delta_{1b}, C_1 \Delta_{1c})^*$  avec  $(A_1 \Delta_{1a}, B_1 \Delta_{1b}, C_1 \Delta_{1c}) = P_{1,2}$ .

Coordonnées barycentriques et normales relatives de  $P_{1,2}$ :

$$\alpha = \frac{1}{\cotg \hat{A}_1 + \cotg \hat{A}_2}, \quad \beta = \frac{1}{\cotg \hat{B}_1 + \cotg \hat{B}_2}, \quad \gamma = \frac{1}{\cotg \hat{C}_1 + \cotg \hat{C}_2},$$

$$\lambda = \frac{\sin \hat{A}_2}{\sin (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)}, \quad \mu = \frac{\sin \hat{B}_2}{\sin (\hat{B}_1 + \hat{B}_2)}, \quad \nu = \frac{\sin \hat{C}_2}{\sin (\hat{C}_1 + \hat{C}_2)}.$$

Considérons maintenant le cas où les triangles semblables à  $A_2B_2C_2$  sont construits du même côté que  $A_1B_1C_1$  par rapport à chacun des côtés de ce triangle. De nouveau par analogie avec ce qui a été fait pour les triangles équilatéraux, nous désignerons leurs sommets par  $\Delta'_{1a}$ ,  $\Delta'_{1b}$ ,  $\Delta'_{1c}$ . Dans ces triangles, ils sont respectivement opposés à  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$ ,



et on a  $B_1\hat{\Delta}'_{1a}C_1 = \hat{A}_2$ ,  $C_1\hat{\Delta}'_{1b}A_1 = \hat{B}_2$ ,  $A_1\hat{\Delta}'_{1c}B_1 = \hat{C}_2$ ,

ainsi que  $\hat{A}_2 = \Delta'_{1b}\hat{A}_1C_1 = B_1\hat{A}_1\Delta'_{1c}$ ,  $\hat{B}_2 = \Delta'_{1c}\hat{B}_1A_1 = C_1\hat{B}_1\Delta'_{1a}$ ,  $\hat{C}_2 = \Delta'_{1a}\hat{C}_1B_1 = A_1\hat{C}_1\Delta'_{1b}$ .

Similitudes:  $\Delta'_{1a}B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$ ,  $A_1\Delta'_{1b}C_1 \sim A_2B_2C_2$ ,  $A_1B_1\Delta'_{1c} \sim A_2B_2C_2$ ; il s'agit encore de similitudes inverses, les sens de  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  étant cette fois opposés, mais les sens de  $\Delta'_{1a}B_1C_1$ , etc. étant les mêmes que celui de  $A_1B_1C_1$ .

Les cercles circonscrits aux trois triangles se coupent en un même point  $P'_{1,2}$ . Celui-ci est extérieur à  $A_1B_1C_1$ . Il est intérieur à l'angle  $B_1A_1C_1$ , mais du côté opposé à  $A_1$  par rapport à  $B_1C_1$ , si  $\hat{B}_1 - \hat{B}_2$  et  $\hat{C}_1 - \hat{C}_2$  ont le même signe et que c'est donc  $\hat{A}_1 - \hat{A}_2$  qui a le signe opposé (il est intérieur ou extérieur au cercle circonscrit à  $A_1B_1C_1$  suivant que  $\hat{A}_1 - \hat{A}_2$  est  $> 0$  ou  $< 0$ ). On a alors  $B_1\hat{P}'_{1,2}C_1 = 2dr. - \hat{A}_2$ ,  $C_1\hat{P}'_{1,2}A_1 = \hat{B}_2$ ,  $A_1\hat{P}'_{1,2}B_1 = \hat{C}_2$ . Des énoncés analogues sont obtenus par permutation des lettres pour les cas où c'est  $\hat{B}_1 - \hat{B}_2$  ou  $\hat{C}_1 - \hat{C}_2$  qui a un signe différent de celui des deux autres différences (cas de la figure, où  $\hat{A}_1 - \hat{A}_2 > 0$ ,  $\hat{B}_1 - \hat{B}_2 > 0$  et  $\hat{C}_1 - \hat{C}_2 < 0$ :  $B_1\hat{P}'_{1,2}C_1 = \hat{A}_2$ ,  $C_1\hat{P}'_{1,2}A_1 = \hat{B}_2$ ,  $A_1\hat{P}'_{1,2}B_1 = 2dr. - \hat{C}_2$ ). Ce point  $P'_{1,2}$ , intersection des cercles circonscrits aux trois triangles semblables à  $A_2B_2C_2$  construits sur les côtés de  $A_1B_1C_1$  du même côté que les sommets opposés respectifs, et duquel les côtés de  $A_1B_1C_1$  sont vus sous des angles égaux ou supplémentaires à ceux de  $A_2B_2C_2$ , est appelé second métapôle du triangle  $A_1B_1C_1$  par rapport au triangle  $A_2B_2C_2$ .

On a  $P'_{1,2} \in A_1\Delta'_{1a}$ ,  $P'_{1,2} \in B_1\Delta'_{1b}$ ,  $P'_{1,2} \in C_1\Delta'_{1c}$ ,  
c.à.d.  $(A_1\Delta'_{1a}, B_1\Delta'_{1b}, C_1\Delta'_{1c})^*$  avec  $(A_1\Delta'_{1a}, B_1\Delta'_{1c}, C_1\Delta'_{1b}) = P'_{1,2}$ .

Coordonnées barycentriques et normales relatives de  $P'_{1,2}$ :

$$\alpha = \frac{1}{\cotg \hat{A}_1 - \cotg \hat{A}_2}, \quad \beta = \frac{1}{\cotg \hat{B}_1 - \cotg \hat{B}_2}, \quad \gamma = \frac{1}{\cotg \hat{C}_1 - \cotg \hat{C}_2},$$

$$\lambda = \frac{\sin \hat{A}_2}{\sin(\hat{A}_1 - \hat{A}_2)}, \quad \mu = \frac{\sin \hat{B}_2}{\sin(\hat{B}_1 - \hat{B}_2)}, \quad \nu = \frac{\sin \hat{C}_2}{\sin(\hat{C}_1 - \hat{C}_2)}.$$

Les premier et second centres isogones  $Y$  et  $Y'$  de  $ABC$  sont respectivement les premier et second métapôles de  $ABC$  par rapport à un triangle équilatéral.

Triangles isocèles semblables entre eux :

On considère les triangles isocèles (voir p. 113) de sommets  $\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c$ , construits vers l'extérieur de  $ABC$ , ayant pour bases respectives les côtés  $a, b, c$  de  $ABC$  ( $\Psi_a \in m_a, \Psi_b \in m_b, \Psi_c \in m_c$ ) et tous trois semblables entre eux ;

$\Psi_a BC \sim \Psi_b CA \sim \Psi_c AB$ . Une condition nécessaire et suffisante pour cette similitude (p. 121) est que les angles en leurs sommets soient égaux ;

$B\hat{\Psi}_c C = C\hat{\Psi}_b A = A\hat{\Psi}_a B$  ; nous désignerons par  $\psi$  la valeur commune de ces angles.

Une autre condition nécessaire et suffisante est que le rapport de la hauteur à la base soit le même pour chacun de ces triangles ; si  $k$  est ce rapport, on doit donc avoir

$$\frac{M_a \Psi_a}{a} = \frac{M_b \Psi_b}{b} = \frac{M_c \Psi_c}{c} = k. \text{ On peut voir que}$$

$$k = \frac{1}{2} \cotg \frac{\psi}{2}.$$

Cas limites :

soit triangles infiniment plats, lorsque leurs hauteurs tendent vers 0 ;

$$k = 0, \quad \psi = 2 \text{ dr.} ;$$

soit triangles infiniment allongés, lorsque leurs hauteurs tendent vers  $\infty$  ;

$$k = \infty, \quad \psi = 0.$$

On a  $(A\Psi_a, B\Psi_b, C\Psi_c) \neq$  et nous poserons  $(A\Psi_a, B\Psi_b, C\Psi_c) \Rightarrow \Psi$ .

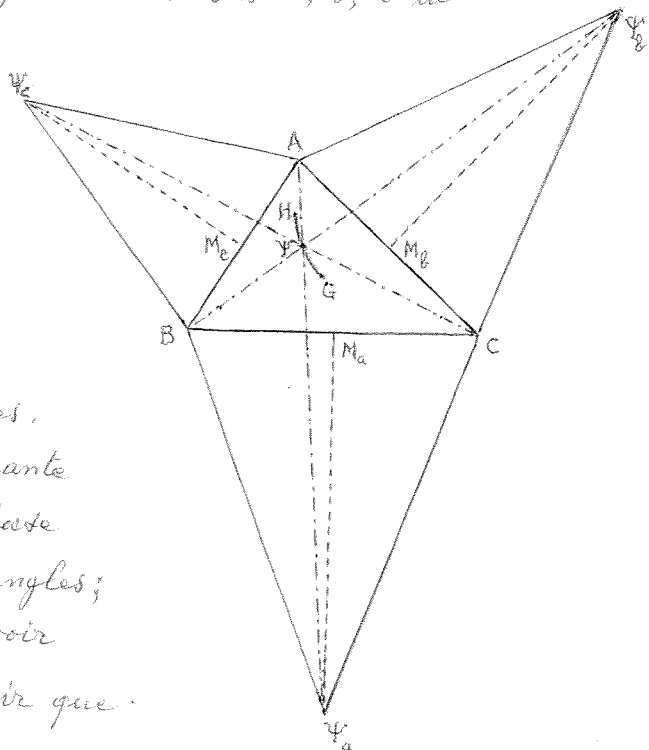
Cas particulières :

pour  $\psi = \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ$  et  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , on a  $\Psi = Y$  (centre isogone ; p. 98) ;

pour  $\psi = 1 \text{ dr.} = 90^\circ$  et  $k = \frac{1}{2}$ , on a  $\Psi = V$  (point de Vecton ; p. 101).

Tous ces points  $\Psi$  sont sur un arc de courbe allant de l'orthocentre  $H$  (cas limite  $\psi = 0, k = \infty$ ) au centre de gravité (cas limite  $\psi = 2 \text{ dr.}, k = 0$ ). Lorsque  $ABC$  est obtusangle et que par suite  $H$  est extérieure au triangle (p. 25), cet arc de courbe passe par le sommet de l'angle obtus : si par exemple  $\hat{A} > 1 \text{ dr.}$ ,  $\Psi = A$  pour  $\psi = 2(\hat{A} - 1 \text{ dr.})$  et  $k = \frac{1}{2} |\tg \hat{A}|$ .

Toutefois cet arc de courbe, lieu des points  $\Psi$ , peut être prolongé au-delà de  $G$  par la considération des triangles isocèles semblables entre eux construits sur les côtés de  $ABC$  du même côté que  $ABC$ , de manière que les points  $\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c$  soient sur les médiatrices du même côté que  $A, B, C$  respectivement par rapport à  $a, b, c$ . On aura alors  $k < 0$ . Le prolongement de l'arc de courbe passe par le second centre isogone  $\Psi'$  (p. 99) pour  $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



Si  $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ , il passe successivement par C (pour  $k = -\frac{1}{2} \lg \hat{C}$ ), par l'infini, par B (pour  $k = -\frac{1}{2} \lg \hat{B}$ ), de nouveau par l'infini, puis par A (pour  $k = -\frac{1}{2} \lg \hat{A}$ ) si  $\hat{A} < 1 \text{ dr.}$ , pour rejoindre H.

D'autre part, on a notamment

$$\Psi_b M_b O_a \S \Psi_c M_c O_a, \quad \Psi_c M_c O_b \S \Psi_a M_a O_b, \quad \Psi_a M_a O_c \S \Psi_b M_b O_c$$

où  $O_a, O_b, O_c$  sont les sommets du second triangle de Brocard (p. 85), c.à.d. les projections de O sur les symédianes, d'où, entre autres,

$$\text{ang}(\Psi_b M_b, M_b O_a) = \text{ang}(\Psi_c M_c, M_c O_a),$$

$$\text{ang}(\Psi_c M_c, M_c O_b) = \text{ang}(\Psi_a M_a, M_a O_b),$$

$$\text{ang}(\Psi_a M_a, M_a O_c) = \text{ang}(\Psi_b M_b, M_b O_c).$$

En fait, les sommets du second triangle de Brocard sont les points doubles (p. 122) des similitudes entre les trois triangles isocèles pris deux à deux :

$$O_a \text{ est le point double de la similitude } \Psi_b CA \S \Psi_c AB,$$

$$O_b \text{ est le point double de la similitude } \Psi_c AB \S \Psi_a BC,$$

$$O_c \text{ est le point double de la similitude } \Psi_a BC \S \Psi_b CA.$$

Il en irait d'ailleurs de même pour toutes figures directement semblables entre elles construites sur les côtés de ABC et ayant donc leurs dimensions linéaires respectivement proportionnelles aux longueurs  $a, b, c$  ;  $O_a$  point double pour la similitude des figures construites sur CA et sur AB,  $O_b$  point double pour la similitude des figures construites sur AB et sur BC,  $O_c$  point double pour la similitude des figures construites sur BC et sur CA.

## Cas particuliers

### Triangle rectangle

Définition: c'est un triangle dont un angle est droit.  
Si c'est l'angle  $\hat{A}$  qui est droit, le triangle est dit rectangle en A. C'est ce que nous supposons ci-dessous.

Angles:  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} + \hat{C} = 1 \text{ dr.} = 90^\circ$ ,

d'où  $\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1$ ,  $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$ ,  $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ ,

Côtés, théorème de Pythagore:  $a^2 = b^2 + c^2$ ;

le côté opposé au sommet de l'angle droit, ici  $a$ , s'appelle l'hypoténuse et les côtés adjacents à ce sommet, ici  $b$  et  $c$ , s'appellent les cathètes. La relation de Pythagore entraîne  $a > b$  et  $a > c$ ;

$$p(p-a) = (p-b)(p-c) = \frac{bc}{2}; \quad (a+b)(a+c) = 2p^2, \quad (a-b)(a-c) = 2(p-a)^2.$$

Côtés et angles:  $b = a \sin \hat{B} = a \cos \hat{C} = c \operatorname{tg} \hat{B}$ ,  $c = a \sin \hat{C} = a \cos \hat{B} = b \operatorname{tg} \hat{C}$ ,  
 $\frac{b}{c} = \frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} (= \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}})$  comme pour tout triangle, d'après la relation aux sinus);

$$b^2 - c^2 = a^2 \sin(\hat{B} - \hat{C}) = -a^2 \cos 2\hat{B} = a^2 \cos 2\hat{C};$$

$$\sin^2 \frac{\hat{B}}{2} = \frac{a-c}{2a}, \quad \sin^2 \frac{\hat{C}}{2} = \frac{a-b}{2a}, \quad \cos^2 \frac{\hat{B}}{2} = \frac{a+c}{2a}, \quad \cos^2 \frac{\hat{C}}{2} = \frac{a+b}{2a},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{b}{a+c} = \frac{a-c}{b} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{c}{a+b} = \frac{a-b}{c} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \frac{b-c}{b+c}. \quad (**)$$

Hauteurs:  $A = H = H_b = H_c$ ,  $h_b = c$ ,  $h_c = b$ ,

$$a h_a = bc, \quad \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad h_a = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} = b \cos \hat{B} = b \sin \hat{C} = c \cos \hat{C} = c \sin \hat{B};$$

$$\overline{BH_a} = \frac{c^2}{a} = c \cos \hat{B} = c \sin \hat{C} = \frac{c h_a}{b}, \quad \overline{CH_a} = \frac{b^2}{a} = b \cos \hat{C} = b \sin \hat{B} = \frac{b h_a}{c}, \quad \frac{\overline{BH_a}}{\overline{CH_a}} = \frac{c^2}{b^2};$$

$\overline{BH_a} \cdot \overline{CH_a} = h_a^2$  (condition nécessaire et suffisante pour que  $\hat{A} = 1 \text{ dr.}$ );

$$\widehat{B\hat{A}H_a} = \hat{C}, \quad \widehat{C\hat{A}H_a} = \hat{B}.$$

Propriété particulière au triangle rectangle: une droite menée par un sommet perpendiculairement au côté opposé le partage en deux triangles semblables au triangle donné (c'est la droite portant  $h_a$ , menée par A perpendiculairement à  $a$ ):

$$H_a B A \sim A B C, \quad H_a A C \sim A B C \quad (\text{et donc } H_a B A \sim H_a A C).$$

Avec les notations introduites au paragraphe concernant le cercle de Taylor (p. 27),  $\operatorname{proj}_b H_a \Rightarrow H_{ab}$ ,  $\operatorname{proj}_c H_a \Rightarrow H_{ac}$ , etc., on se  $H_{bc} = H_{cb} = A$ ,  $H_{ca} = H_{ac} = H_a$ ,  $\overline{H_{ab}H_{ac}} = h_a$ , le cercle de Taylor est le cercle circonscrit au rectangle  $AH_{ab}H_aH_{ac}$ .

Médianes:  $g_a = \frac{a}{2}$  (condition nécessaire et suffisante pour que  $\hat{A} = 1 \text{ dr.}$ ),

(\*) A noter le cas très particulier suivant:  $\hat{B} = 2\hat{C}$  ( $B = 60^\circ$  et  $C = 30^\circ$ )  $\Leftrightarrow a = 2c$ .



$$g_b^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 = \frac{a^2 + 3c^2}{4}, \quad g_c^2 = \frac{c^2}{4} + b^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{4}, \quad g_b^2 + g_c^2 = 5g_a^2;$$

$$\widehat{B\hat{A}M_a} = \hat{B}, \quad \widehat{M_a\hat{A}C} = \hat{C}, \quad \text{ang}(h_a, g_a) = |\hat{B} - \hat{C}|, \quad \text{ang}(i_a, j_a) = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}, \quad g_a = \text{cosog}_A h_a.$$

Centre de gravité:  $G = (g_a, g_b, g_c) = (\frac{1}{3}A, \frac{2}{3}M_a)$  - comme pour tout triangle.

Cercle circonscrit:  $\mathcal{C} = \circ(BC)$ ,  $O = M_a$ , donc  $O \in a$ ; réciproquement, si  $O$  est sur un côté d'un triangle (nécessairement au milieu de ce côté, évidemment), ce triangle est rectangle, l'angle au sommet opposé à ce côté étant = 1 dr.;  $R = \frac{a}{2} = g_a = 3M_aG$ .

Étant donné que  $O = M_a$ , la formule du haut de la p. 43 donne, avec les notations de cette page,

$$m_a', m_a'' = R^2 = \frac{a^2}{4}.$$

On a  $t_b \perp a$  et  $t_c \perp a$ ,  $A_L$  est à l'infini dans la direction perpendiculaire à  $a$ ,  $(h_a, m_a) = \frac{1}{2}(M_{ab}, M_{ac}) = \frac{1}{2}(M_a', M_a'')$  où  $M_{ab} = (m_a, b)$  et  $M_{ac} = (m_a, c)$  et où  $M_a'$  et  $M_a''$  sont les notations de la p. 43.

Notons qu'on a ici  $M_b = Z_c$ ,  $M_c = Z_b$  et  $\Theta = Z_a$ .

Le cercle des neuf points  $\mathcal{C}_9$  est tangent intérieurement à  $\mathcal{C}$  au sommet  $A$  de l'angle droit:  $\mathcal{C}_9$  tang  $\mathcal{C}$  avec  $(\mathcal{C}_9, \mathcal{C}) = A$ .

Bissectrices intérieures:

$$i_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \quad (\text{d'où } \frac{\sqrt{2}}{i_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}), \quad i_a = \frac{1}{2}(h_a, g_a),$$

$$i_b^2 = \frac{2ac^2}{a+c}, \quad i_c^2 = \frac{2ab^2}{a+b}, \quad i_b = \frac{c}{\cos \frac{B}{2}}, \quad i_c = \frac{b}{\cos \frac{C}{2}},$$

$$i_b \perp \frac{1}{2}(b, h_a), \quad i_c \perp \frac{1}{2}(c, h_a); \quad \overline{AD_b} = \frac{(a-c)c}{b}, \quad \overline{AD_c} = \frac{(a-b)b}{c}, \quad \overline{CD_b} = \frac{(a-c)a}{b}, \quad \overline{BD_c} = \frac{(a-b)a}{c}.$$

$$\overline{BI} \cdot \overline{CI} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} = \frac{1}{2} i_b i_c, \quad \overline{AI} = \sqrt{2}(\rho - a).$$

Si nous désignons par  $D_{ia}^b$  et  $D_{ia}^c$  les intersections de la perpendiculaire élevée à  $BC$  en  $D_a$ ,  $\perp(a, D_a)$ , respectivement avec  $b$  et avec  $c$ , on a  $\overline{BD_{ia}^c} = \overline{CD_{ia}^b}$ , ainsi que  $\overline{D_a B} = \overline{D_a D_{ia}^b}$  et  $\overline{D_a C} = \overline{D_a D_{ia}^c}$ ; on a aussi  $(A, B, D_a, D_{ia}^b) \circ$  et  $(A, D_a, C, D_{ia}^c) \circ$  d'où  $\widehat{ABD_{ia}^b} = \widehat{ACD_{ia}^c} = \text{ang}(i_a, \perp(a, D_a))$ .

Bissectrices extérieures:

$$e_a = \frac{\sqrt{2}bc}{|b-c|}, \quad e_b = c \sqrt{\frac{2a}{a-c}}, \quad e_c = b \sqrt{\frac{2a}{a-b}};$$

$$\overline{I_a A} = \sqrt{2}a, \quad \overline{I_b I_c} = \sqrt{2}a, \quad \overline{I_a I_b} = \frac{c}{b} e_c = \sqrt{2a(a+b)}, \quad \overline{I_a I_c} = \frac{b}{c} e_b = \sqrt{2a(a+c)}.$$

Cercles inscrit et exinscrits:

$$r = \rho - a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{bc}{2\rho} \quad (\text{d'où } 2R + 2r = b+c)$$

et pour le point de contact  $J_a$  de  $\mathcal{C}_i$  avec l'hypoténuse,

$$\frac{1}{\overline{BJ_a}} - \frac{1}{\overline{CJ_a}} = 2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right), \quad \overline{BJ_a} \cdot \overline{CJ_a} = \frac{bc}{2}, \quad \overline{CJ_a} - \overline{BJ_a} = b - c;$$

si on pose  $\text{proj}_{J_b, J_c} J_b \Rightarrow P_j$  et  $\text{proj}_{J_b, J_c} J_c \Rightarrow Q_j$ , on a  $(P_j, I, C) -$  et  $(Q_j, I, B) -$ , c.à.d.  $P_j \in i_c$  et  $Q_j \in i_b$ ,  $\widehat{AP_j C} = 1 \text{ dr.}$  et  $\widehat{AQ_j B} = 1 \text{ dr.}$ , c.à.d.  $P_j = \text{proj}_{i_c} A$  et  $Q_j = \text{proj}_{i_b} A$ ,

$$(A, J_b, Q_j, I, P_j, J_c) \circ \quad \text{avec } \circ(A, J_b, Q_j, I, P_j, J_c) = \circ(AI);$$

$$r_a = \rho = a + r = 2R + r, \quad r_b = \rho - c, \quad r_c = \rho - b,$$

$$r + r_a + r_b + r_c = 2p, \quad r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 2a^2;$$

si  $r_b$  et  $r_c$  sont les rayons des cercles inscrits respectivement dans les triangles rectangles  $ABH_a$  et  $ACH_a$ , on a  $r_b = \frac{c}{a}r$ ,  $r_c = \frac{b}{a}r$  et  $r_b^2 + r_c^2 = r^2$ , tandis que la distance entre les centres de ces cercles vaut  $\sqrt{2}r$ .

Un cercle dont le centre est sur  $i_a$  à une distance  $2r = b + c - a = 2(p - a)$  de  $AB$  et de  $AC$  (donc à une distance  $2\overline{AI} = 2\sqrt{2}(p - a)$  de  $A$ ) et ayant cette longueur  $2r = 2(p - a)$  pour rayon, donc tangent à ses côtés, est tangent intérieurement à  $\mathcal{C}$  (point de contact sur  $A\Phi$  à une distance  $2\overline{A\Phi}$  de  $A$ ).

Puisque  $i_a = \frac{1}{2}(h_a, g_a)$ , on a  $S_a = h_a$ , d'où  $L \in h_a$ .

$$\begin{aligned} \text{Aire: } S &= \frac{1}{2}bc = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{a^2}{4} \sin 2\hat{B} = \frac{a^2}{4} \sin 2\hat{C} = \frac{a^2}{4} \cos(\hat{B} - \hat{C}) \\ &= \frac{b^2}{2} \cot \hat{B} = \frac{c^2}{2} \cot \hat{C} = \frac{b^2 - c^2}{4} \tan 2\hat{C} = \frac{b^2 - c^2}{4} \tan 2\hat{B} = \frac{b^2 - c^2}{4} \cot(\hat{B} - \hat{C}) \\ &= p(p - a) = (p - b)(p - c) = r(a + r) = 2r_a = r_b r_c = \overline{B J_a} \cdot \overline{C J_a}. \end{aligned}$$

Parmi les triangles ayant deux côtés de longueurs données  $b$  et  $c$ , celui qui a l'aire maximale est celui qui est rectangle en  $A$  (conséquence de la formule générale  $S = \frac{bc}{2} \sin \hat{A}$ ).

$$\text{On a aussi } \langle \text{BC} \rangle = \frac{abc}{4p} = \frac{1}{2} \langle \text{BCD}_b \text{D}_c \rangle.$$

Soit un point  $P \in AC$  et posons  $\text{proj}_{BC} P \Rightarrow P'_a$ , on a  $\frac{\overline{CP'_a}}{\overline{CP}} = \frac{b}{a}$ .

Soit un point  $P \in BC$  et posons  $\text{proj}_{AC} P \Rightarrow P'_b$  et  $\text{proj}_{AB} P \Rightarrow P'_c$ , on a  $\overline{BP} \cdot \overline{CP} = \overline{CP'_b} \cdot \overline{AP'_b} + \overline{BP'_c} \cdot \overline{AP'_c}$ ,  $a \cdot \overline{BP} = b \cdot \overline{PP'_c} + c \cdot \overline{BP'_c}$  et  $a \cdot \overline{CP} = b \cdot \overline{CP'_b} + c \cdot \overline{PP'_b}$ .

Soit encore  $P \in BC$  et soit  $\perp(BC, P) \Rightarrow p$ , on a  $\frac{\overline{B(p, AB)}}{\overline{C(p, AC)}} = \frac{b}{c} \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$ ;

si en particulier  $P = D_a$ ,  $\overline{B(p, AB)} = \overline{C(p, AC)}$ .

Si on construit des polygones semblables sur les trois côtés du triangle rectangle, par exemple des triangles équilatéraux, leurs aires respectives  $S_a, S_b, S_c$  sont telles que  $S_b + S_c = S_a$ .

Si  $X_a, X_b, X_c$  sont les centres des carrés construits sur les côtés (cf. p. 101), on a  $\overline{X_b X_c}^2 = \overline{AX_a}^2 = \frac{(b+c)^2}{2}$ ,  $\overline{X_a X_c}^2 = \overline{BX_b}^2 = \frac{(b+c)^2 + c^2}{2}$ ,  $\overline{X_a X_b}^2 = \overline{CX_c}^2 = \frac{(b+c)^2 + b^2}{2}$ , d'où

$$\overline{X_b X_c}^2 + \overline{X_c X_a}^2 + \overline{X_a X_b}^2 = 2a^2 + 3bc,$$

et on a aussi  $\langle X_a X_b X_c \rangle = \langle BX_c X_b C \rangle = \langle ABX_a C \rangle = \frac{\overline{AX_a}^2}{2} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$  (aire d'un carré dont le côté a pour longueur la moyenne arithmétique de celles des cathètes de  $ABC$ ); avec les notations des pp. 100-101, on a aussi  $\frac{1}{2}(A, B_c) \in b$ ,  $\frac{1}{2}(A_b, C) \in c$ ,

$X_{bc} = A$ ,  $(B_c, X_b, A, X_c, C_b) \sim$ ,  $\overline{B_a C_a} = a$ ,  $\overline{A_c B_a}^2 = a^2 + 3b^2$ ,  $\overline{A_b C_b}^2 = a^2 + 3c^2$ ,

$$\overline{AV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c\sqrt{(b+c)^2 + c^2}}{b+c}, \quad \overline{CV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{(b+c)^2 + b^2}}{b+c}, \quad \text{dist}_b V = \text{dist}_c V = \frac{bc}{2(b+c)}.$$

On a recherché des ternes de nombres entiers  $\{b, c, a\}$  qui satisfont à la relation de Pythagore  $b^2 + c^2 = a^2$  et qui sont donc tels qu'un triangle dont les côtés ont des

longueurs proportionnelles à ces nombres soit rectangle. Un exemple bien connu parce qu'il est constitué de petits nombres est  $\{3, 4, 5\}$ ; on a en effet  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Il y en a une infinité; par exemple  $\{5, 12, 13\}$ ,  $\{8, 15, 17\}$ , ... C'est un problème arithmétique plus que géométrique.

Triangle isocèle

Définition: c'est un triangle dont deux côtés sont égaux; nous supposons ci-dessous que ce sont les côtés  $b$  et  $c$ :  $b = c$ .

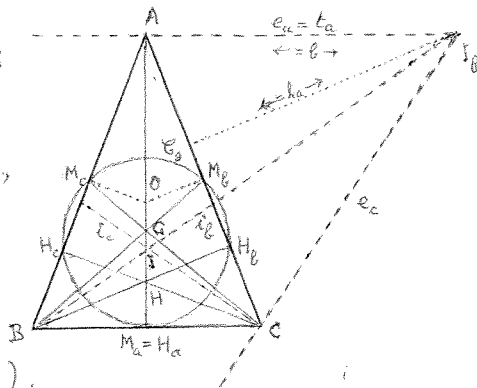
Condition nécessaire et suffisante: égalité des angles opposés à ces côtés:  $\hat{B} = \hat{C}$ .

Le sommet  $A$  tel que  $\hat{A} \neq \hat{B} = \hat{C}$  est plus spécifiquement appelé sommet et le côté  $a \neq b = c$ , opposé à ce sommet, est appelé la base. Les côtés égaux  $b$  et  $c$  sont parfois appelés les jambes du triangle isocèle.

Angles:  $\hat{B} = \hat{C} = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ , d'où  $\sin \hat{B} = \sin \hat{C} = \cos \frac{\hat{A}}{2}$  et  $\cos \hat{B} = \cos \hat{C} = \sin \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $\text{tg} \hat{B} = \text{tg} \hat{C} = \cot \frac{\hat{A}}{2}$ ;  $\sin 2\hat{B} = \sin \hat{A}$ ,  $\cos 2\hat{B} = -\cos \hat{A}$ ,  $\text{tg} 2\hat{B} = -\text{tg} \hat{A}$ .

Côtés et angles:  $a = 2b \cos \hat{B} = 2b \cos \hat{C} = 2b \sin \frac{\hat{A}}{2}$ ;  $b < a, = a$  ou  $> a$  selon que  $\hat{A} >, =$  ou  $< \frac{2}{3} 180^\circ = 60^\circ$  (ou que  $\hat{B} <, =$  ou  $> \frac{2}{3} 180^\circ = 60^\circ$ );  $p = \frac{a}{2} + b = 2b \cos^2 \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $p - a = b - \frac{a}{2}$ ,  $p - b = p - c = \frac{a}{2}$ .

Points et droites remarquables:  $g_a \perp a$ ,  $i_a \perp a$ ;  $h_a = g_a = i_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b \sin \hat{B} = \frac{a}{2} \cot \frac{\hat{A}}{2} = \frac{a}{2} \text{tg} \hat{B} = b \cos \frac{\hat{A}}{2}$  (réciproquement,  $h_a = g_a$  ou  $h_a = i_a$  ou  $g_a = i_a \sim b = c$ ),  $M_a = H_a = D_a = J_a = J_{aa} = \Phi$ ; la hauteur  $h_a$ , qui coïncide avec  $g_a$  et  $i_a$ , est plus spécifiquement appelée la hauteur du triangle isocèle (on déduit de son expression et de celle de  $p$  que  $a = \frac{p^2 - h_a^2}{p}$  et  $b = c = \frac{p^2 + h_a^2}{2p}$ ).



$M_b M_c \parallel H_b H_c \parallel D_b D_c \parallel l_b l_c \parallel D'_b D'_c \parallel F_b F_c \parallel a$ ;  
 $h_b = h_c = a \cos \frac{\hat{A}}{2} = a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A} = a \cos \frac{\hat{A}}{2}$ ,  $\overline{CH}_b = \overline{BH}_c = a \cos \hat{B} = a \sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{a^2}{2b}$ ,  $\widehat{CBH}_b = \widehat{BCH}_c = \frac{\hat{A}}{2}$ ;  
 $g_b = g_c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}}$ ,  $\text{tg} \widehat{CBM}_b = \text{tg} \widehat{BCM}_c = \frac{1}{3} \text{tg} \hat{B}$ ;  $\overline{M_b O} = \overline{M_c O} = \frac{b}{2} \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{b}{2} \cot \hat{B}$ ;  
 $i_b = i_c = b \frac{\sin \hat{A}}{\cos \frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}} = a \frac{\cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}} = a \frac{\sin \hat{B}}{\cos \frac{\hat{B} - \hat{A}}{2}}$ ,  $\overline{CD}_b = \overline{BD}_c = \overline{D'_b D'_c} = \frac{ab}{a+b}$ ,  $\overline{AD}_b = \overline{AD}_c = \frac{b^2}{a+b}$ ,  $r = \frac{a}{2} \text{tg} \frac{\hat{A}}{2}$ ;  
 $Q_a = A_0$ ,  $\overline{AI}_a = \frac{1}{\sin \hat{B}} = \frac{1}{\cos \frac{\hat{A}}{2}}$ ,  $\overline{BI}_a = \overline{CI}_a = \frac{a}{2 \sin \frac{\hat{B}}{2}}$ ,  $\overline{BI}_b = \overline{CI}_c = 2b \cos \frac{\hat{B}}{2}$ ,  $\overline{AI}_b = \overline{AI}_c = b$ ,  
 $\overline{CI}_b = \overline{BI}_c = \sqrt{2b(p-a)}$ ,  $\overline{l_b l_c} = 2b$ ,  $\overline{l_a l_b} = \overline{l_a l_c} = \frac{b}{\sin \frac{\hat{B}}{2}}$ ,  $\overline{CJ}_b = \overline{BJ}_c = \overline{AJ}_{bb} = \overline{AJ}_{cc} = \overline{CJ}_{ab} = \overline{BJ}_{ac} = \frac{a}{2}$ ,  
 $\text{dist}_b I_b = \text{dist}_c I_c = h_a$ ;  $e_a \parallel a$  ( $e_a = t_a$ ),  $e_a = \infty$ ,  $e_b = e_c = b \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2})}$ ,  
 $r_b = r_c = h_a$ ,  $r_a = \frac{a}{2} \cot \frac{\hat{B}}{2} = p \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} = p \cot \hat{B}$ ;  
 $R_{aa} = \infty$ ,  $R_{bb} = R_{cc} = \frac{1}{2} \overline{D_b D'_b} = \frac{1}{2} \overline{D_c D'_c} = b \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\frac{\hat{B} - \hat{A}}{2})}$ ,  $\overline{F_b F_c} = R_b = R_c$ , d'où  $F_b \in D_c$  et  $F_c \in D_b$ .  
 On a  $L'_a = L$  et le premier triangle de Brocard  $L'_a L'_b L'_c$  est homothétique à  $ABC$  avec

G pour centre d'homothétie, d'où  $L'_b L'_c \parallel a$ ,  $LL'_b \parallel b$ ,  $LL'_c \parallel c$ . On a aussi  $\omega_1, \omega_2 \parallel a$  ;  
 $\omega_1 = (s_b, y_c) = \text{proj}_{s_b} O = O_b$  et  $\omega_2 = (s_b, y_c) = \text{proj}_{s_c} O = O_c$  ;  $\omega_1 \hat{O}L = L \hat{O} \omega_2 = \omega$  ;  $O\omega_1 \perp s_b$ ,  $O\omega_2 \perp s_c$ ,  
 l'angle de Bricard est donné par  $\cotg \omega = \cotg \hat{A} + 2 \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \cotg \frac{\hat{A}}{2} + \frac{3}{2} \text{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \text{tg} \hat{B} + \frac{3}{2} \cotg \hat{B}$ .  
 On a  $S = A$ ,  $T = Q_a = A_0$ .

Aire :  $S = \frac{a^2}{4} \cotg \frac{\hat{A}}{2} = \frac{a^2}{4} \text{tg} \hat{B}$  ; c'est l'aire maximale pour un triangle de base a et de périmètre p donnés. Parmi les triangles ayant un côté donné et un angle opposé donné, le triangle isocèle est celui qui a le périmètre maximal et l'aire maximale (les côtés égaux étant les deux autres côtés et les angles égaux, les deux autres angles).

Point sur un côté :

$$P \in a \rightsquigarrow \frac{\text{dist}_b P}{\text{dist}_c P} = \frac{PC}{PB} ;$$

$P \in a$  entre B et C  $\rightsquigarrow \text{dist}_b P + \text{dist}_c P = a \cos \frac{\hat{A}}{2}$ , donc indépendant de la position de P sur BC,

$P \in a$  au-delà de C  $\rightsquigarrow \text{dist}_c P - \text{dist}_b P = a \cos \frac{\hat{A}}{2}$ , donc indépendant de la position de P sur le prolongement de BC ;

l'indépendance vis-à-vis de la position de P reste vraie pour des longueurs prises sur des droites faisant des angles égaux quelconques avec b et c plutôt que sur les perpendiculaires comme le sont  $\text{dist}_b P$  et  $\text{dist}_c P$  ; c'est vrai en particulier pour des parallèles aux côtés ;

$P \in a$  entre B et C  $\rightsquigarrow (\overline{|| (b, P), c}) P + (\overline{|| (c, P), b}) P = b$ ,  $P \in a$  au-delà de C  $\rightsquigarrow (\overline{|| (b, P), c}) P - (\overline{|| (c, P), b}) P = b$  ;

$P \in a$  entre B et C  $\rightsquigarrow AP^2 = b^2 - \overline{BP} \cdot \overline{PC}$ ,  $P \in a$  sur le prolongement de BC  $\rightsquigarrow AP^2 = b^2 + \overline{BP} \cdot \overline{PC}$ ,

$P \in b \rightsquigarrow \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 + \frac{a^2}{2} \overline{AP}$ ,  $P \in c \rightsquigarrow \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \frac{a^2}{2} \overline{AP}$  ;

$P \in a$  entre B et C  $\rightsquigarrow \overline{AP}, \overline{AQ} = b^2$  où Q est l'intersection de AP avec c.

Soit encore  $P \in b$  (éventuellement prolongé) tel que  $\overline{BP} = b$  avec  $P \neq A$  (on suppose  $\hat{A} \neq 1 \text{dr.}$ ) ;

si  $\hat{A} > \frac{2}{3} \text{dr.} = 60^\circ$ , c.à d. P entre A et C (si  $\frac{2}{3} \text{dr.} < \hat{A} < 1 \text{dr.}$ ) ou P au-delà de A (si  $\hat{A} > 1 \text{dr.}$ ) ; on a  $\widehat{CBP} = \frac{3}{2} \hat{A} - 1 \text{dr.} = 2 \text{dr.} - 3 \hat{B}$  (donc l'angle entre BP et le prolongement de CB est  $= 3 \hat{B}$ ) ;

si  $\hat{A} < \frac{2}{3} \text{dr.} = 60^\circ$ , c.à d. P au-delà de C, on a  $\widehat{PBC} = 1 \text{dr.} - \frac{3}{2} \hat{A} = 3 \hat{B} - 2 \text{dr.}$  (BP fait encore un angle  $= 3 \hat{B}$  avec le prolongement de CB).

La droite d'Euler est un axe de symétrie pour ABC. Elle porte  $h_a, g_a, m_a, c_a, s_a$  et si on la parcourt dans le sens  $AH_a$ , on y trouve les points suivants dans l'ordre indiqué :

- si  $\hat{A} < \frac{2}{3} \text{dr.} = 60^\circ$  :  $A E_a O G_a I L H M_a = H_a Q_a A_e$  ,

- si  $\frac{2}{3} \text{dr.} < \hat{A} < 1 \text{dr.} = 90^\circ$  :  $A E_a H L O_g I G O M_a = H_a Q_a A_e$  ,

- si  $1 \text{dr.} < \hat{A} < \frac{4}{3} \text{dr.} = 120^\circ$  :  $A_e H E_a A O_g L I G M_a = H_a O Q_a$  ,

- si  $\frac{4}{3} \text{dr.} < \hat{A} < 1 \text{dr.} + \text{arc} \sin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 128^\circ 10' 22''$  :  $H A_e E_a O_g A L I G M_a = H_a O Q_a$  ,

- si  $1 \text{dr.} + \text{arc} \sin \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \hat{A} < 1 \text{dr.} + \text{arc} \sin \frac{\sqrt{17}-1}{4}$  :  $H E_a A_e O_g A L I G M_a = H_a O Q_a$  ,

- si  $\hat{A} > 1 \text{dr.} + \text{arc} \sin \frac{\sqrt{17}-1}{4} \approx 141^\circ 19' 54''$  :  $H E_a O_g A_e A L I G M_a = H_a O Q_a$  .

Quant au centre  $\odot$  du cercle de Taylor (p. 28), qui est évidemment aussi sur l'axe de symétrie, il est intérieur ou extérieur au triangle, donc entre A et  $H_a$  ou au-delà de  $H_a$ , selon que  $\hat{A} <$  ou  $> \frac{4}{3} \text{dr.} = 120^\circ$ .

### Triangle rectangle isocèle

Soit  $A$  le sommet de l'angle droit et par suite  $b$  et  $c$  les côtés égaux.

Angles:  $\hat{A} = 1 \text{ dr.} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{1}{2} \text{ dr.} = 45^\circ$ .

Côtés:  $a = \sqrt{2} b = \sqrt{2} c$ ,

$$p = \frac{1+\sqrt{2}}{2} a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) b, \quad p-a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) b,$$

$$p-b = p-c = \frac{a}{2}, \quad p(p-a) = (p-b)(p-c) = \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{2}.$$

Points remarquables:

$$A = H = E_a = H_b = H_c, \quad M_a = H_a = D_a = J_a = J_{aa} = O, \quad L = O_g = Z_a.$$

Comme pour tous les triangles rectangles en  $A$ , la point  $H_c$  est à l'infini dans la direction perpendiculaire à  $a$ . Les points  $B, C, B_c, C_c$  sont les sommets d'un rectangle dont la longueur des grands côtés est  $a$  ( $\overline{BC} = \overline{B_c C_c} = a$ ) et celle des petits côtés,  $\frac{a}{2}$  ( $\overline{BC_c} = \overline{CB_c} = \frac{a}{2}$ ). Le centre de ce rectangle, à l'intersection des diagonales  $BB_c$  et  $CC_c$ , est  $L = O_g = Z_a$ ; les points suivants sont à une distance  $\frac{a}{4}$  de ce centre:  $A = H = E_a = H_b = H_c$ ,  $M_a = H_a = D_a = J_a = J_{aa} = O$ ,  $M_b = Z_c = E_c$ ,  $M_c = Z_b = E_b$ .

Longueurs des sévientes remarquables:  $h_a = g_a = l_a = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} b$ ,

$$g_b^2 = g_c^2 = \frac{5}{8} a^2 = \frac{5}{4} b^2, \quad l_b^2 = l_c^2 = \frac{2a^2}{2+\sqrt{2}} = \frac{4b^2}{2+\sqrt{2}}.$$

Autres grandeurs:  $R_b = \frac{a}{2}$ ;  $\overline{AD_b} = \overline{AD_c} = (\sqrt{2}-1)b$ ,  $\widehat{CB_1} = \widehat{BA} = \widehat{AC_1} = \widehat{CB} = \frac{1}{4} \text{ dr.} = 22^\circ 30'$ ;

$$r = \overline{M_a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) b, \quad r_a = \frac{1+\sqrt{2}}{2} a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) b, \quad r_b = r_c = \frac{a}{2}.$$

Comme pour tous les triangles isocèles,  $R_a = \infty$ , tandis que les deux autres cercles d'Apollonios,  $D_b$  et  $D_c$ , ont pour rayon  $R_b = R_c = a$ ; leurs centres  $F_b$  et  $F_c$  sont, avec  $B$  et  $C$ , les sommets d'un carré dont le côté  $a$  pour longueur  $a$  (de centre  $A$ ).

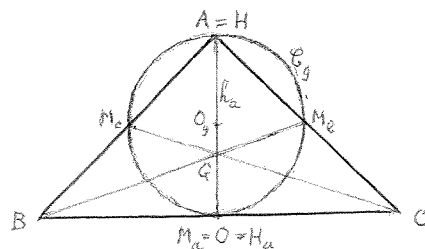
Le centre  $O_1$  du cercle de Brocard (et du premier cercle de Lemoine) est le centre d'un carré  $LL'_c M_a L'_b$  (avec  $L'_c \in g_b$  et  $L'_b \in g_c$ ), évidemment inscrit au cercle de Brocard  $B = o(O_1)$  (dont le rayon est  $= \frac{a}{8}$ ), dont les côtés ont pour longueur  $\frac{b}{4}$  et sont parallèles à  $AB$  et à  $AC$  et donc aux côtés du carré  $AM_c M_a M_b$  qui eux ont évidemment pour longueur  $\frac{b}{2}$ . L'angle de Brocard est donné par  $\tan \omega = \frac{1}{2}$  et les points de Brocard sont tels que  $\overline{A\Omega_1} = \overline{A\Omega_2} = \frac{1}{2} \overline{B\Omega_2} = \frac{1}{2} \overline{C\Omega_1}$ , avec  $A\Omega_1 \perp C\Omega_1$  et  $A\Omega_2 \perp B\Omega_2$ .

$$\text{Aire: } J = \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{2}.$$

### Triangle pseudo-isocèle

Définition: c'est un triangle dont deux bissectrices extérieures ont même longueur sans que ce soit le cas pour les côtés correspondants; soit par exemple  $e_b = e_c$  (c.à.d.  $\overline{BD'_b} = \overline{CD'_c}$ ) avec  $b \neq c$ .

Angles:  $\hat{A} < \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ$ ,  $\{\hat{B} > \hat{A} \text{ et } \hat{C} < \hat{A}\}$  ou  $\{\hat{B} < \hat{A} \text{ et } \hat{C} > \hat{A}\}$ ,



$$\sin^2 \frac{\hat{A}}{2} = \sin \frac{\hat{B}}{2} \cdot \sin \frac{\hat{C}}{2} \quad (< \frac{1}{4}),$$

$$\cos \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2} = \sin \frac{\hat{A}}{2} (1 + 2 \sin \frac{\hat{A}}{2}).$$

Côtés:  $\frac{p-b}{p-c} = \frac{c(b-a)^2}{b(a-c)^2}$ ,

$$a^2(p-b)(p-c) = bc(p-a)^2,$$

$$bc = \frac{p-a}{a}(a^2+bc), \text{ d'où } bc = \frac{(p-a)a^2}{a-(p-a)},$$

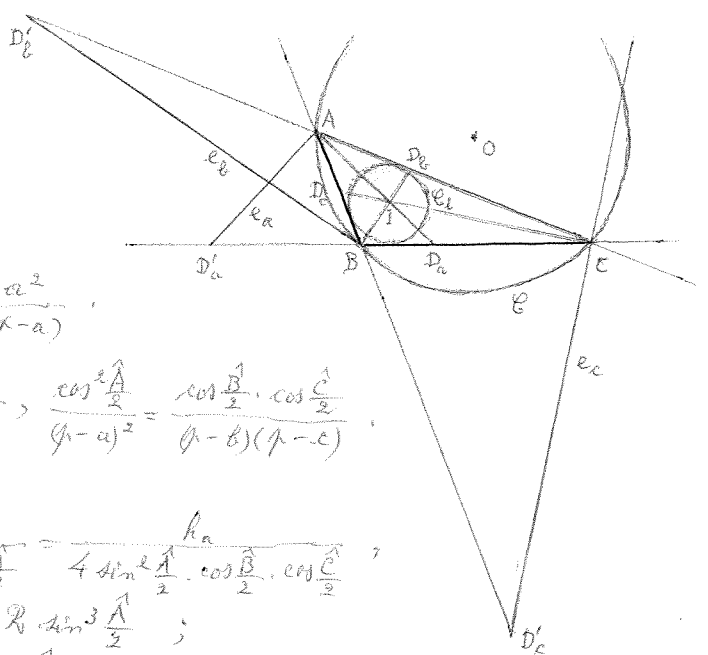
Angles et côtés:  $\frac{\sin \frac{\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{C}}{2}} = \frac{b|a-c|}{c|b-a|}, \frac{\cos^2 \frac{\hat{A}}{2}}{(p-a)^2} = \frac{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}}{(p-b)(p-c)}$

Autres grandeurs:

$$2R = \frac{p-a}{\sin \hat{A} \cdot \sin \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{p-a}{2 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{h_a}{4 \sin^2 \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}}$$

$$IA^2 = IB \cdot IC, \quad r = 4R \sin^3 \frac{\hat{A}}{2};$$

$$e_b = e_c = \frac{2a \sqrt{bc} \sin \frac{\hat{A}}{2}}{\sqrt{|b-a||a-c|}} = \frac{\sqrt{bc} \sin \hat{A}}{\sqrt{\sin \frac{|\hat{B}-\hat{A}|}{2} \cdot \sin \frac{|\hat{A}-\hat{C}|}{2}}}$$



### Triangle équilatéral

Définition: c'est un triangle dont les trois côtés sont égaux (et dont les trois angles sont égaux: condition nécessaire et suffisante; un triangle équilatéral est équilatéral et réciproquement).

Côtés:  $a = b = c$  par définition,

$$p = \frac{3}{2} a, \quad p-a = p-b = p-c = \frac{a}{2}.$$

Angles:  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ;$

$$\sin \hat{A} = \sin \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \hat{A} = \cos \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{1}{2}.$$

Centres:  $G = H = O = I = O_g = L.$

Pour les sévénnes remarquables, pieds:

$$M_a = H_a = J_a = J_{aa} = D_a, \quad M_b = H_b = J_b = J_{bb} = D_b, \quad M_c = H_c = J_c = J_{cc} = D_c,$$

$D'_a, D'_b, D'_c$ : point à l'infini respectivement sur BC, CA, AB;

longueurs:  $g_a = g_b = g_c = h_a = h_b = h_c = l_a = l_b = l_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad e_a = e_b = e_c = \infty;$

angles:  $\hat{B}OC = \hat{C}OA = \hat{A}OB = \frac{1}{3} \text{ dr.} = 120^\circ, \quad \hat{B}OM_a = \hat{M}_aOC = \hat{COM}_b = \hat{M}_bOA = \hat{A}OM_c = \hat{M}_cOB = \frac{2}{3} \text{ dr.} = 60^\circ;$

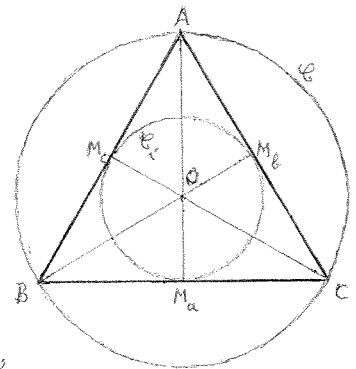
$$\hat{B}AM_a = \hat{M}_aAC = \hat{C}BM_b = \hat{M}_bBA = \hat{A}CM_c = \hat{M}_cCB = \frac{1}{3} \text{ dr.} = 30^\circ;$$

angle de Brocard:  $\omega = \frac{1}{3} \text{ dr.} = 30^\circ$  avec  $\omega_1 = \omega_2 = L = O$  (le rayon du cercle de Brocard =  $\omega$ ).

Autres longueurs:  $R = OA = OB = OC = \frac{\sqrt{3}}{3} a,$

$$r = M_aO = M_bO = M_cO = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{R}{2}, \quad r_a = r_b = r_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{2} R = 3r.$$

Le triangle complémentaire  $M_aM_bM_c$  ( $=H_aH_bH_c = D_aD_bD_c = J_aJ_bJ_c$ ) est le triangle équilatéral inscrit à  $C_i$ , de côté  $\frac{a}{2}$ . Le triangle anticomplémentaire  $A''B''C''$  ( $=A_bB_cC_a$ ) est le



triangle équilatéral circonscrit à  $\mathcal{C}$ , de côté  $2a$ . On a de plus  $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_i$ . Enfin:  
 $A_0 = Q_a = H'_a = \Sigma_a = A_{1a} = A_{2a} = \text{sym}_a O$ ,  $B_0 = Q_b = H'_b = \Sigma_b = A_{1b} = A_{2b} = \text{sym}_b O$ ,  $C_0 = Q_c = H'_c = \Sigma_c = A_{1c} = A_{2c} = \text{sym}_c O$ .  
 Aire:  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ; c'est l'aire maximale pour un triangle de périmètre  $2p$  donné.

Le segment de disque compris entre  $\mathcal{C}$  et un des côtés du triangle a pour aire  $(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \frac{a^2}{3}$ .

Si  $P$  est un point de  $\mathcal{C}$  sur l'arc  $BC$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$  et  $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + 4R \cdot \text{dist}_a P$  et des énoncés analogues par permutation des lettres.

Si  $P$  (intérieur ou extérieur à  $ABC$ ) est sur une parallèle à  $BC$  menée par  $O$ ,  $PE \parallel (BC, O)$ , on a  $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2 \overline{PA}^2$  (et des énoncés analogues par permutation des lettres); en particulier, si  $P$  est à l'intersection avec  $AB$  de la parallèle à  $BC$  menée par  $O$ , c.à.d. sur  $AB$  avec  $\overline{AP} = \frac{2}{3} a$ , on a  $\overline{PC} = \frac{\sqrt{7}}{3} a \approx 0,882 a$ .

Si  $P$  est un point intérieur au triangle, on a  $\text{dist}_a P + \text{dist}_b P + \text{dist}_c P = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ , somme indépendante de la position de  $P$  à l'intérieur du triangle. Si  $P$  est extérieur au triangle, il faut changer le signe d'un des termes ou de deux des termes: par exemple, si  $P$  est intérieur à l'angle  $A$ , mais de l'autre côté de  $BC$  que  $A$ , on a  $\text{dist}_b P + \text{dist}_c P - \text{dist}_a P = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ; si  $P$  est dans le comble adjacent à  $A$ , c.à.d. à l'intérieur de l'angle opposé à l'angle  $A$  de triangle, on a  $-\text{dist}_a P - \text{dist}_b P - \text{dist}_c P = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ . La première formule peut être considérée comme générale si les distances aux côtés sont prises en valeurs algébriques, avec le signe  $+$  quand  $P$  est, par rapport au côté considéré, du même côté que le sommet opposé et avec le signe  $-$  dans le cas contraire.

Les sommets  $P'_a, P'_b, P'_c$  du triangle podaire (p. 14) d'un point quelconque  $P$  satisfait à la relation  $\overline{BP'_c} + \overline{CP'_b} + \overline{AP'_c} = \overline{P'_a C} + \overline{P'_b A} + \overline{P'_c B}$ .

Il est évident que si en ajoutant une même longueur sur les prolongements des côtés en tournant dans un sens donné, on obtient les sommets d'un triangle  $A_2 B_2 C_2$  qui est lui aussi équilatéral.

Notons pour terminer que pour obtenir un triangle équilatéral à partir d'une inversion d'un triangle quelconque, il suffit de prendre pour pôle d'inversion un des deux centres isodynamiques (p. 69) de ce triangle.

### Autres cas particuliers

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \text{dr.} = 45^\circ \rightarrow \overline{AH} = a, \quad \overline{OM}_a = \frac{a}{2},$$

$$OB \perp OC, \quad H_a H_b \perp H_a H_c, \quad M_a H_b \perp M_a H_c, \quad O_3 M_b \perp O_3 M_c, \quad O_3 = \frac{1}{2} (H_b, H_c).$$

$$\hat{A} = \frac{2}{3} \text{dr.} = 60^\circ \rightarrow \overline{OM}_a = \frac{R}{2}, \quad R = \overline{AH} = \overline{AO}, \quad AO_3 \perp OH, \quad O_3 \in i_a.$$

$$\hat{A} = 2\hat{B} \rightarrow a^2 = b(b+c).$$

$$\hat{A} = 1 \text{dr.} + \hat{B} \rightarrow E_c = H_c, \quad E_c \in c, \quad h_c \tan \mathcal{C}_g, \quad h_c = \frac{c}{2} \tan 2\hat{B}, \quad \overline{H_a H} = a \cos \hat{C}, \quad R = \frac{a^2 - b^2}{2c}.$$

$$a = \frac{b+c}{2} \quad (\text{un côté} = \text{la moyenne arithmétique des deux autres})$$

$$\rightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad \text{ou} \quad h_a = \frac{2h_b h_c}{h_b + h_c} \quad (\text{la hauteur perpendiculaire à ce côté} =$$

la moyenne harmonique des deux autres hauteurs) et réciproquement (et  $h_a = \frac{3a}{4} \tan \frac{A}{2}$ ),

$\rightarrow \overline{AI} = 2 \overline{ID}_a$  (c.à.d.  $i_a = 3 \overline{ID}_a = \frac{3}{2} \overline{AI}$ ) et réciproquement,

$\rightarrow \frac{2}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$  ou  $r_a = \frac{2b+c}{r_b+r_c}$  (le rayon du cercle eschérien correspondant

à ce côté = la moyenne harmonique des deux autres) et réciproquement (et  $r_a = 3r = h_a$ ),

$\rightarrow$  aussi:  $\overline{BD}_a = \frac{c}{2}$ ,  $\overline{CD}_a = \frac{b}{2}$ ,  $\overline{M_a D_a} = \frac{b-c}{4} = \frac{1}{2} M_{a,b,c}$ ,  $GI \parallel BC$ ,

$\overline{AQ_a} = 2 \overline{IQ_a} = 2 \overline{AI} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2}$ ,  $\overline{AI}^2 = \overline{ID}_a^2 = \frac{bc}{3}$ ,  $i_a^2 = \frac{3bc}{4}$ ,  $r = \frac{a}{2} \tan \frac{A}{2}$ ,  $\overline{AJ_b} = \overline{AJ_c} = \frac{a}{2}$ ,

$r_a = \frac{3a}{2} \tan \frac{A}{2} = 3r$ ,  $r_b = \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2}$ ,  $r_c = \frac{a}{2} \cot \frac{B}{2}$ ,  $\overline{BJ_{ca}} = \overline{CJ_{ba}} = \frac{a}{2}$ ,  $\overline{M_a J_{ba}} = \overline{M_a J_{ca}} = a$ .

$h_a = \frac{b+c}{2}$  (une hauteur = la moyenne arithmétique des deux autres)

$\rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  ou  $a = \frac{2bc}{b+c}$  (le côté auquel elle est perpendiculaire = la moyenne harmonique des deux autres) et réciproquement.

$a = \sqrt{bc}$  (un côté = la moyenne géométrique des deux autres)

$\rightarrow \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$ ,  $h_a = a \sin A$ ,  $\overline{B[\perp(OB, C), C]} = b$ ,  $\overline{C[\perp(OB, B), B]} = c$ ,

$\overline{Q_a D_a} = \frac{r_a}{4 \cos \frac{A}{2}}$ ,  $\frac{\overline{CS_b}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AS_c}}{\overline{SB}} = \frac{b}{c}$ ,  $(g_b, s_c)$  et  $(g_c, s_b) \in i_a$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2 \in i_a$ ,  $\Omega_1 = L'_b$  et  $\Omega_2 = L'_c$ ,

$C\Omega_1 = \tan \Omega_1 B$  (c.à.d.  $C\Omega_1 \perp O_1 \Omega_1$ ) et  $B\Omega_2 = \tan \Omega_2 B$  (c.à.d.  $B\Omega_2 \perp O_2 \Omega_2$ ).

La moitié d'un côté, soit  $\frac{a}{2}$  par exemple, ne peut pas être égale à la moyenne arithmétique des deux autres côtés, car cela impliquerait que  $a = b+c$ , ce qui est juste en contradiction avec la relation du triangle  $a < b+c$  (7.8); mais elle peut être égale à la moyenne géométrique des deux autres, soit  $\frac{a}{2} = \sqrt{bc}$ , car  $\sqrt{bc} < \frac{b+c}{2}$  si  $b \neq c$ ; cela a lieu lorsque  $D_a \hat{A} M_a = \hat{A} M_a D_a$  et alors on a aussi  $|b-c| = \sqrt{2} g_a$ .

$a^2 = \frac{b^2+c^2}{2}$  (le carré d'un côté = la moyenne arithmétique des carrés des deux autres)

$\rightarrow \overline{AH}^2 = \frac{1}{2} (\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2)$ ,  $(B, C, G, H) \circ$ ,  $g_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ,  $(A, M_b, M_c, G) \circ$ ,

$\overline{G_a G_b} = \overline{G_a G_c}$  (où  $G_a G_b G_c =$  triangle podaire de  $G$ ; p.34),  $G \in D_a$  (où  $D_a = \circ(D_a D_a)$ ; p.69),

$G \in A_{1,c}$  et  $A_{2,b}$  (où  $a_{1,c}$  et  $a_{2,b} =$  cercles adjoints tangents à  $BC$ ; p.84),  $\overline{M_a S_a} = \frac{1}{2} \overline{M_a H_a}$ ,

$\overline{BS_a} = \frac{c^2}{2a}$ ,  $\overline{CS_a} = \frac{b^2}{2a}$ ,  $GL \parallel BC$ ,  $L_a L_b L_c \subset \Delta ACB$  (où  $L_a L_b L_c =$  triangle podaire de  $L$ ; p.78),  $AL \perp LO$ .

$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  (ou  $a^2 = \frac{2b^2 c^2}{b^2+c^2}$ ) (le carré d'un côté = la moyenne harmonique des carrés des deux autres)

$\rightarrow \Omega_1, \Omega_2 \parallel AM_a$ .

$g_a = \frac{3}{2} a \sim \left. \begin{aligned} g_a^2 &= g_b^2 + g_c^2 \\ g_b \perp g_c &\sim g_b^2 + g_c^2 = g_a^2 \end{aligned} \right\}$  et réciproquement (et alors  $S = \frac{2}{3} g_b g_c$ ).

$b=c$  et  $\hat{A} = \frac{2}{3} dr$ . ( $\rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{1}{3} dr = 2\hat{A}$ )  $\rightarrow i_b = i_c = a = \overline{AD_b} = \overline{AD_c}$

et  $(CD, B) = BCD_b \subset \Delta ABC$ ,



## Relations possibles entre triangles

### Égalité

Les triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont dits égaux et on écrit  $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$  si et seulement si  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ .

Conditions suffisantes (trois conditions suffisent):

$$\text{soit } \{a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2\},$$

$$\text{soit } \{a_1 = a_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2\} \text{ (ou un tel ensemble de relations obtenues par permutation des lettres),}$$

$$\text{soit } \{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2\} \text{ (idem);}$$

(note:  $\{b_1 = b_2, c_1 = c_2, \hat{A}_1 > \hat{A}_2\} \rightarrow a_1 > a_2$  et  $\{b_1 = b_2, c_1 = c_2, a_1 > a_2\} \rightarrow \hat{A}_1 > \hat{A}_2$ ).

Il faut noter que l'égalité de deux côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux, par exemple  $\{a_1 = a_2, b_1 = b_2, \hat{A}_1 = \hat{A}_2\}$ , n'entraîne pas nécessairement l'égalité des triangles (conséquence de l'ambiguïté qui apparaît en effet dans la détermination d'un triangle lorsqu'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; p. 11, cas d).

Dans le cas de triangles rectangles en  $A_1$  et en  $A_2$ , conditions suffisantes:

$$\text{soit } \{a_1 = a_2 \text{ et } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (ou } \hat{C}_1 = \hat{C}_2)\}, \text{ soit } \{a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2 \text{ (ou } c_1 = c_2)\}.$$

Autres ensembles de conditions suffisantes d'égalité de deux triangles quelconques:

$$\{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, a_1 = a_2, b_1 + c_1 = b_2 + c_2\}, \{a_1 = a_2, h_{b1} = h_{b2}, h_{c1} = h_{c2}\}, \{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, h_{b1} = h_{b2}, h_{c1} = h_{c2}\},$$

$$\{\rho_1 = \rho_2, h_{a1} = h_{a2}, \hat{B}_1 = \hat{B}_2\}, \{\rho_1 = \rho_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2\}, \{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, h_{a1} = h_{a2}, \hat{C}_1 = \hat{C}_2\},$$

$$\{m_{a1} = m_{a2}, b_1 = b_2, c_1 = c_2\}, \{m_{a1} = m_{a2}, a_1 = a_2, b_1 = b_2\}, \{a_1 = a_2, m_{b1} = m_{b2}, m_{c1} = m_{c2}\},$$

$$\{a_1 = a_2, m_{a1} = m_{a2}, m_{b1} = m_{b2}\}, \{m_{a1} = m_{a2}, m_{b1} = m_{b2}, m_{c1} = m_{c2}\}, \dots$$

La relation d'égalité de figures géométriques, en particulier de triangles, est comme dans le cas d'égalité de nombres notamment, toujours symétrique, c.à.d.  $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2 \rightarrow A_2B_2C_2 = A_1B_1C_1$ , et toujours transitive, c.à.d.

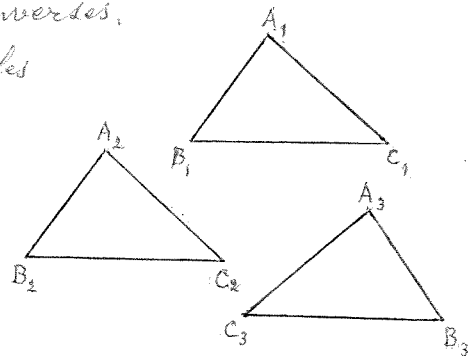
$$A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2 \text{ et } A_2B_2C_2 = A_3B_3C_3 \rightarrow A_1B_1C_1 = A_3B_3C_3.$$

Les éléments de deux triangles égaux sont égaux:  $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2 \rightarrow h_{a1} = h_{a2}, \dots, m_{a1} = m_{a2}, \dots, i_{a1} = i_{a2}, \dots, R_1 = R_2, r_1 = r_2, \dots, S_1 = S_2$ , etc.

On peut distinguer les égalités directes et inverses.

Les triangles sont dits directement égaux si les éléments égaux, côtés ou angles, sont rencontrés dans le même ordre lorsqu'on les parcourt dans un même sens; ils sont dits inversement égaux quand au contraire on doit accomplir les parcours en sens opposés pour rencontrer les éléments égaux.

Sur la figure ci-jointe, le triangle  $A_2B_2C_2$  est directement égal au triangle  $A_1B_1C_1$ , tandis



que le triangle  $A_2 B_2 C_2$  leur est inversement égal. Si un triangle  $A_2 B_2 C_2$  est inversement égal à un triangle  $A_1 B_1 C_1$  qui est lui-même inversement égal à un triangle  $A_3 B_3 C_3$  est directement égal à  $A_1 B_1 C_1$ .

Tout ce qui est dit ici pour l'égalité des triangles n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de ce qu'on peut dire pour l'égalité de deux figures quelconques  $F_1$  et  $F_2$  du plan, dont l'égalité se définit par la possibilité d'amener l'une des deux en coïncidence avec l'autre par un déplacement dans le plan, plus un éventuel retournement.

Dans le cas d'une égalité directe entre les triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ , on peut amener l'une des deux en coïncidence avec l'autre par une rotation dans le plan ou, lorsque les côtés respectifs de  $A_1 B_1 C_1$  et de  $A_2 B_2 C_2$  sont parallèles, par une translation (qui peut être considérée comme la limite d'une rotation dont le centre est à l'infini dans la direction perpendiculaire au vecteur de translation). Le centre  $C$  de la rotation, qui est tel que  $A_1 \hat{C} A_2 = B_1 \hat{C} B_2 = C_1 \hat{C} C_2$ , se trouve à l'intersection des médiatrices des segments  $A_1 A_2$ ,  $B_1 B_2$ ,  $C_1 C_2$ . C'est un point double pour l'égalité considérée, c.à.d. qu'il occupe la même position relative dans les figures égales  $F_1$  et  $F_2$ , c.à.d. par rapport à chacun des deux triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ .

Étant donné un point  $P$  quelconque, on a  $\{A_2 = \text{sym}_P A_1, B_2 = \text{sym}_P B_1, C_2 = \text{sym}_P C_1\} \rightarrow A_1 B_1 C_1 = A_2 B_2 C_2$  et cette égalité est directe, c.à.d. que si deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point  $P$ , on passe de l'une à l'autre par une rotation de  $2\text{dr.} = 180^\circ$  autour de  $P$ .

Dans le cas d'une égalité inverse, on ne peut passer d'une figure à l'autre qu'en ajoutant à l'éventuelle rotation ou translation, un retournement, qui correspond à une symétrie par rapport à une droite  $d$  du plan. Considérons d'abord le cas où on peut passer d'un triangle à l'autre par un simple retournement, c.à.d. où  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à une droite  $d$ , axe de la symétrie; cela signifie qu'on a  $\text{proj}_d A_1 = \text{proj}_d A_2 = \frac{1}{2}(A_1, A_2)$ ,  $\text{proj}_d B_1 = \text{proj}_d B_2 = \frac{1}{2}(B_1, B_2)$ ,  $\text{proj}_d C_1 = \text{proj}_d C_2 = \frac{1}{2}(C_1, C_2)$  (on a donc  $A_1 A_2 \perp d$ ,  $B_1 B_2 \perp d$ ,  $C_1 C_2 \perp d$  et  $\text{dist}_d A_1 = \text{dist}_d A_2$ ,  $\text{dist}_d B_1 = \text{dist}_d B_2$ ,  $\text{dist}_d C_1 = \text{dist}_d C_2$ ). Tous les points de  $d$  sont des points doubles (voir ci-dessus) pour cette égalité. L'axe  $d$  et toutes les droites qui lui sont perpendiculaires sont des droites doubles, ce qui signifie qu'à chaque point d'une de ces droites correspond, dans l'égalité inverse considérée, un point de la même droite. Théorème: dans ce cas où  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont symétriques par rapport à un axe  $d$ , on a  $[(\|(d, A_2), B_1 C_1), (\|(d, B_2), C_1 A_1), (\|(d, C_2), A_1 B_1)]$  — et un énoncé semblable si on intervertit 1 et 2. À noter: une rotation + une symétrie par rapport à un axe passant par le centre de cette rotation = une simple symétrie par rapport à un autre axe, passant par le même point. Dans une égalité inverse générale, ne pouvant pas se ramener à une simple symétrie, il n'y a aucun point double. Dans ce cas général, on peut notamment passer d'un triangle à l'autre par une symétrie d'axe  $d$  plus une translation parallèle à  $d$  à condition de prendre

pour d la droite passant par les points  $\frac{1}{2}(A_1, A_2)$ ,  $\frac{1}{2}(B_1, B_2)$ ,  $\frac{1}{2}(C_1, C_2)$  (points qui dans ce cas général, sont respectivement  $\neq \text{proj}_d A_1$  et  $\neq \text{proj}_d A_2$ , etc.).

### Note

Si deux triangles sont inséparables tout en ayant un côté commun, soient  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ , avec  $A_1$  et  $A_2$  du même côté du côté commun  $B_1 C_1$ , les côtés  $A_1 B_1$  et  $A_2 C_2$  se croisent, mais pas  $A_1 C_1$  et  $A_2 B_2$ , et alors  $A_1 B_1 + A_2 C_2 > A_1 C_1 + A_2 B_2$ , ou  $A_1 C_1$  et  $A_2 B_2$  se croisent, mais pas  $A_1 B_1$  et  $A_2 C_2$ , et alors  $A_1 C_1 + A_2 B_2 > A_1 B_1 + A_2 C_2$ .

### Similitude

Les triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont dits semblables et on écrit  $A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2$  si et seulement si  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ,  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ,  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ,  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ , où  $k$  est appelé rapport de similitude du premier triangle par rapport au second.

Deux sommets tels que  $A_1$  et  $A_2$  en lesquels les angles sont égaux sont dits être des sommets homologues. La même qualification est donnée aux côtés qui leur sont respectivement opposés, ainsi qu'aux hauteurs, médianes, bissectrices, ... issues de tels sommets; elle est aussi utilisée pour d'autres points ou droites remarquables.

Conditions suffisantes de similitude de  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ :

soit  $\{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2\}$ , soit  $\{\hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2\}$ , soit  $\{\hat{C}_1 = \hat{C}_2, \hat{A}_1 = \hat{A}_2\}$ ,  
(deux triangles équilatéraux sont donc nécessairement semblables),  
soit  $\{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\}$ , soit  $\{\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\}$  (ou relations analogues obtenues par permutation des lettres),  
soit  $\{a_1 \parallel a_2, b_1 \parallel b_2, c_1 \parallel c_2\}$  (dans ce cas, les triangles sont homothétiques; voir ci-après),  
soit  $\{a_1 \perp a_2, b_1 \perp b_2, c_1 \perp c_2\}$ , soit plus généralement  $\{\text{ang}(a_1, a_2) = \text{ang}(b_1, b_2) = \text{ang}(c_1, c_2)\}$   
les angles étant pris avec leurs signes.

La relation de similitude est symétrique (c.à.d.  $A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2 \sim A_2 B_2 C_2 \sim A_1 B_1 C_1$ ) et transitive (c.à.d.  $A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2$  et  $A_2 B_2 C_2 \sim A_3 B_3 C_3 \sim A_1 B_1 C_1 \sim A_3 B_3 C_3$ ).

La similitude entre triangles (comme entre deux figures quelconques  $F_1$  et  $F_2$ ) peut être directe ou inverse comme l'égalité (voir ci-avant) et ces triangles sont alors respectivement dits être directement semblables ou inversement semblables.

L'égalité peut évidemment être considérée comme cas particulier de similitude avec  $k = 1$ .

Tous les éléments linéaires homologues des deux triangles sont dans le même rapport  $k$ :  $\frac{h_{a1}}{h_{a2}} = \dots = \frac{m_{a1}}{m_{a2}} = \dots = \frac{l_{a1}}{l_{a2}} = \dots = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \dots = k$ . Rapport des aires:  $\frac{S_1}{S_2} = k^2$ .

Cas de triangles rectangles: si  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^\circ$ ,  $A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2 \sim a_1 a_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2$   
(et  $\frac{1}{h_{a1} h_{a2}} = \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{c_1 c_2}$ ).

Autres ensembles d'ensembles de conditions suffisantes de similitude de deux

triangles quelconques :  $\left\{ \frac{a_1}{a_2} = \frac{hb_1}{hb_2} = \frac{hc_1}{hc_2} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{h_{a1}}{h_{a2}} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \right\}$ ,  $\left\{ \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} \right\}$ ,  
 $\left\{ \hat{A} = \hat{A}_2, \frac{b_1+c_1}{b_2+c_2} = \frac{a_1}{a_2} \right\}$ ,  $\left\{ \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_1}{r_2} \right\}$ ,  $\left\{ \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} \right\}$ , ... ;

si les triangles sont isocèles ( $b_1 = c_1$  et  $b_2 = c_2$ ) :  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_{a1}}{h_{a2}}$ , etc.

Note : dans le cas d'une similitude directe (ou en particulier d'une égalité directe), si  $A_2 = A_1$ , par exemple, le point  $(B_1, B_2, C_1, C_2)$  coïncide avec le second ( $\neq A_1 = A_2$ ) point d'intersection des cercles circonscrits à  $A_1 B_1 C_1$  et à  $A_2 B_2 C_2$ .

Théorème :  $\{ A_1 B_1 C_1 \} \{ A_2 B_2 C_2 \}$  et  $A_2 \in a_1, B_2 \in b_1, C_2 \in c_1$  ;

$\rightarrow \text{ang}(B_1 C_1, B_2 C_1) = \text{ang}(C_1 A_1, C_2 A_2) = \text{ang}(A_1 B_1, A_2 B_2)$ .

Dans le cas d'une similitude directe entre les triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  (ou entre deux figures quelconques  $F_1$  et  $F_2$ ), il existe un point  $C$  tel qu'on passe de l'une à l'autre en combinant une rotation autour de ce point et une homothétie (v. ci-après) ayant ce même point  $C$  pour centre. Celui-ci est un point double pour la similitude, c.à.d. qu'il occupe une position relative semblable dans les deux figures : on a par exemple  $\{ A_1 B_1 \} \{ A_2 B_2 \}$ , etc.; tous les angles ayant ce point pour sommet et dont les côtés passent par des points homologues, par exemple  $A_1 \hat{C} A_2, B_1 \hat{C} B_2$ , etc., sont égaux. On peut obtenir ce point de la manière suivante; on considère par exemple les cercles  $\circ[(B_1 C_1, B_2 C_2), B_1, B_2]$  et  $\circ[(B_1 C_1, B_2 C_2), C_1, C_2]$ ; le point d'intersection de ces deux cercles autre que  $(B_1 C_1, B_2 C_2)$  est le point double  $C$  cherché (on a  $B_1 \hat{C} B_2 = C_1 \hat{C} C_2$  et de même pour toute autre paire de points homologues).

Si on combine un retournement et une homothétie ayant pour centre un point de l'axe de symétrie de ce retournement, on obtient une similitude inverse dont ce point est un point double. L'axe de symétrie du retournement et la perpendiculaire à cet axe menée par le centre de l'homothétie sont des droites doubles pour cette similitude, ce qui signifie qu'un point d'une de ces droites a pour homologue un point de la même droite. Par exemple, le premier triangle de Brocard  $L'_a L'_b L'_c$  est inversement semblable au triangle  $ABC$  (p. 85) et cette similitude peut être considérée comme la combinaison d'une homothétie de centre  $G$  et d'un retournement ayant pour axe de symétrie l'axe de Steiner  $\gamma$  (p. 86);  $G$  est un point double pour cette similitude inverse et les axes de Steiner  $x$  et  $\gamma$  en sont des droites doubles. Dans le cas d'une similitude inverse générale, il n'y a par contre aucun point double.

Exemples de similitudes directes avec  $ABC$ : toute droite  $d$  parallèle à  $a$  forme avec  $b$  et  $c$  un triangle directement semblable à  $ABC$ :  $d \parallel a \rightarrow A(d, c)(d, b) \{ ABC$  (et ce triangle est même homothétique (v. ci-après) à  $ABC$ :  $d \parallel a \rightarrow A(d, c)(d, b) = \text{hom}(A, \frac{\text{dist}(d, A)}{h_a}) ABC$ ), + énoncés analogues par permutation des lettres; c'est notamment le cas des triangles

suivants:  $AM_eM_f = \text{hom}(A, \frac{1}{2})ABC$ ,  $BM_fM_c = \text{hom}(B, \frac{1}{2})BCA$ ,  $CM_eM_a = \text{hom}(C, \frac{1}{2})CAB$ .

Exemples de similitudes inverses avec  $ABC$ : toute droite  $d$  antiparallèle à  $a$  par rapport aux côtés de l'angle  $BAC$  (donc  $d \perp OA$ ) forme avec  $b$  et  $c$  un triangle inversement semblable à  $ABC$ :  $d \perp BAC \text{ à } \rightarrow A(d, B)(d, C) \sim ABC$ , + énoncés analogues pour permutation des lettres. Notamment les triangles  $AH_bH_c$ ,  $BH_cH_a$ ,  $CH_aH_b$  sont inversement semblables à  $ABC$ :  $AH_bH_c \sim ABC$ ,  $BH_cH_a \sim BCA$ ,  $CH_aH_b \sim CAB$ , avec des rapports de similitude respectivement égaux à  $|\cos \hat{A}|$ ,  $|\cos \hat{B}|$ ,  $|\cos \hat{C}|$ .

C'est en particulier le cas lorsque  $d$  est l'antiparallèle à  $a$  menée par  $B$  ou  $C$ :  $d = \perp(OA, B) \rightarrow AB(d, b) \sim ACB$ , d'où alors  $b \cdot \overline{A(d, B)} = c^2$ , etc.

Note: par analogie avec les triangles semblables, considérons des triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  pour lesquels au lieu d'avoir la condition nécessaire et suffisante de similitude  $\{\hat{A}_2 = \hat{A}_1, \hat{B}_2 = \hat{B}_1\}$  (deux angles égaux), on ait  $\{\hat{A}_2 = \hat{A}_1, \hat{B}_2 = 2dn - \hat{B}_1\}$  (un angle égal et un angle supplémentaire); on se alors  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  comme pour les triangles semblables et de plus  $b_1b_2 = a_1a_2 + c_1c_2$ .

### Homothétie

L'homothétie entre triangles est un cas particulier d'homothétie entre figures quelconques du plan, notion qui a été rappelée vers la fin du préambule, p. 6 (tout comme l'égalité et la similitude entre triangles sont des cas particuliers de ces notions respectives pour des figures quelconques du plan; il en est d'ailleurs de même pour la symétrie par rapport à un point, qui entraîne une égalité directe, ou la symétrie par rapport à un axe, qui entraîne une égalité inverse).

Le triangle  $A_2B_2C_2$  est homothétique du triangle  $A_1B_1C_1$ , et on écrit  $A_2B_2C_2 = \text{hom}(C, \rho)A_1B_1C_1$ ,  $C$  étant le centre d'homothétie et  $\rho$  le rapport d'homothétie, lorsque  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) \parallel$  et  $\frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{CB_2}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{CC_2}}{\overline{CC_1}} = \rho$  où on a posé  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) \rightarrow C$  et où les rapports égaux sont pris en valeurs algébriques. On a donc

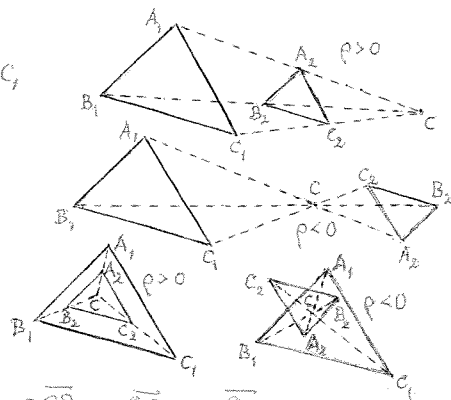
$(C, A_1, A_2) \sim$ ,  $(C, B_1, B_2) \sim$ ,  $(C, C_1, C_2) \sim$  avec  $\overline{CA_2} = \rho \overline{CA_1}$ ,  $\overline{CB_2} = \rho \overline{CB_1}$ ,  $\overline{CC_2} = \rho \overline{CC_1}$  ( $\rho > 0$  ou  $< 0$ ).

Notons que  $A_2B_2C_2 = \text{hom}(C, \rho)A_1B_1C_1 \rightarrow A_1B_1C_1 = \text{hom}(C, \frac{1}{\rho})A_2B_2C_2$ .

Si  $\rho > 0$ , les points homologues sont d'un même côté de  $C$ : homothétie directe; si  $\rho < 0$ , ils sont de part et d'autre de  $C$ : homothétie inverse.

Dans un cas comme dans l'autre, les triangles peuvent être extérieurs l'un à l'autre (première paire de figures) ou non (deuxième paire de figures) suivant la position de  $C$ .

L'homothétie de  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  entraîne  $a_1 \parallel a_2$ ,  $b_1 \parallel b_2$ ,  $c_1 \parallel c_2$  et donc la similitude (toujours directe, que l'homothétie soit directe ou inverse):



bien faire attention à cette différence de sens des mots directe et inverse suivant qu'ils sont appliqués à une similitude ou à une homothétie) des deux triangles, avec un rapport de similitude de  $A_2B_2C_2$  par rapport à  $A_1B_1C_1 = |\rho|$  (donc de  $A_1B_1C_1$  par rapport à  $A_2B_2C_2 = \frac{1}{|\rho|}$ ).

Réciproquement,  $\{a_2 \parallel a_1, b_2 \parallel b_1, c_2 \parallel c_1\} \rightsquigarrow A_2B_2C_2 = \text{hom } A_1B_1C_1$ , on a notamment  $\{a_2 \parallel a_1, b_2 \parallel b_1, c_2 \parallel c_1\} \rightsquigarrow (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) *$ , ce point  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2)$  étant le centre  $C$  de l'homothétie, et  $\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{CB_2}{CB_1} = \frac{CC_2}{CC_1}$ , ce rapport constant étant, en valeur algébrique (signe + si les points homologues sont d'un même côté de  $C$ , signe - s'ils sont de côtés opposés de  $C$ ), le rapport  $\rho$  de l'homothétie.

Exemples d'homothéties directes avec  $ABC$ : voir notamment les exemples de similitudes directes,  $AM_1M_2$  etc, donnés plus haut.

Exemples d'homothéties inverses (similitudes directes! voir ci-dessus) avec  $ABC$ :

triangle complémentaire  $M_aM_bM_c = \text{hom}(G, -\frac{1}{2})ABC$ ,

triangle anticomplémentaire  $A^*B^*C^* = \text{hom}(G, -2)ABC$ ;

quel que soit le point  $P$ , on a  $\text{sym}_P A \text{ sym}_P B \text{ sym}_P C = \text{hom}(P, -1)ABC$ .

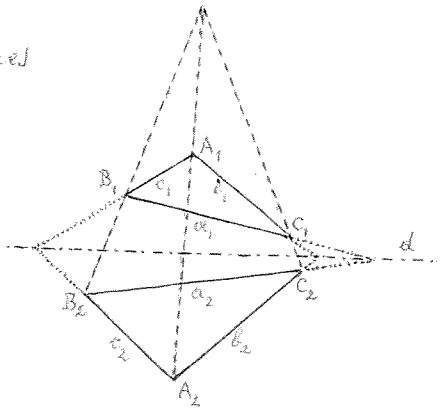
Triangles homologues

Deux triangles  $A_1B_1C_1$  de côtés  $a_1, b_1, c_1$ , et  $A_2B_2C_2$  de côtés  $a_2, b_2, c_2$ , sont dits homologues si  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) *$ .

Condition nécessaire et suffisante (théorème de Desargues et réciproque):  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)] =$ .

Cette droite  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$  est appelée axe d'homologie des deux triangles; nous la désignerons ci-dessous par  $d$ :

$[(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)] \Rightarrow d$ . Le point  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2)$  est appelé centre d'homologie des deux triangles.



Autres propriétés:

$P$  étant un point quelconque du plan, si nous posons  $(PA_1, d) \Rightarrow A_d, (PB_1, d) \Rightarrow B_d, (PC_1, d) \Rightarrow C_d$ , on a  $(A_2A_d, B_2B_d, C_2C_d) *$ .

Soient  $(B_1C_2, C_1B_2) \Rightarrow A_3, (C_1A_2, A_1C_2) \Rightarrow B_3, (A_1B_2, B_1A_2) \Rightarrow C_3$ ; le triangle  $A_3B_3C_3$  est homologue avec  $A_1B_1C_1$  d'une part et avec  $A_2B_2C_2$  d'autre part, avec le même axe d'homologie.

Si trois triangles  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$  sont tels que  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) = (A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3) = (A_3A_1, B_3B_1, C_3C_1)$ , c.à.d. s'ils sont deux à deux homologues avec chaque fois le même centre d'homologie, les trois axes d'homologie sont concourants (ou il est le même). Si les côtés de trois triangles passent par les mêmes trois points d'une droite et qu'ils sont donc deux à deux homologues avec cette même droite pour axe d'homologie, les trois centres d'homologie sont en ligne droite (ou confondus).

Cas particulier: le triangle  $ABC$  et le triangle pédal (p. 14)  $V_a V_b V_c$  d'un point quelconque  $V$  sont homologues puisque les droites  $v_a = AV_a$ ,  $v_b = BV_b$ ,  $v_c = CV_c$  sont telles que  $(AV_a, BV_b, CV_c) \in \mathcal{K}$ ; le centre d'homologie est  $V$  et les points  $(a, V_b V_c)$ ,  $(b, V_c V_a)$ ,  $(c, V_a V_b)$  sont alors en ligne droite, d'après le théorème de Desargues, et définissent l'axe d'homologie de  $V_a V_b V_c$  avec  $ABC$ . Par exemple, le triangle orthique  $H_a H_b H_c$  est homologue avec  $ABC$ ; le centre et l'axe d'homologie sont respectivement l'orthocentre  $H$  et l'axe orthique  $h$ . Plus généralement, on peut dresser le tableau suivant des principales de ces triangles qui sont homologues avec le triangle  $ABC$  en ayant leurs sommets sur ses côtés:

triangle	centre d'homologie	axe d'homologie
$H_a H_b H_c$	$H$	$h = K_a' K_b' K_c'$
$M_a M_b M_c$	$G$	droite de l'infini
$D_a D_b D_c$	$I$	$d = D_a' D_b' D_c'$
$S_a S_b S_c$	$L$	$l = F_a F_b F_c$

Dans de tels cas, l'axe d'homologie et le centre d'homologie sont respectivement la polaire trilinéaire et le pôle trilinéaire l'un de l'autre (p. 16). À la figure de la p. 16 donnée pour illustrer la définition de ces notions, les triangles  $ABC$ ,  $P_a P_b P_c$ ,  $P_a'' P_b'' P_c''$  sont homologues deux à deux, avec le même axe d'homologie  $p$  et le même centre d'homologie  $P$ . Nous en avons un exemple avec les triangles  $ABC$ ,  $S_a S_b S_c$ ,  $A_1 B_1 C_1$  (fig. p. 75), la droite de Lemoine (p. 79) étant leur axe d'homologie, défini par les points  $F_a, F_b, F_c$  jouant le rôle des points  $P_a'', P_b'', P_c''$  de la figure de la p. 16, avec  $L$  pour centre d'homologie.

Autre cas particulier: si  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  ont le même cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  (c.à.d.  $A_2, B_2, C_2 =$  points d'intersection avec  $\mathcal{C}$  des droites joignant le centre d'homologie respectivement à  $A_1, B_1, C_1$ ), l'axe d'homologie est la polaire du centre d'homologie:  $A = \text{pol}_{\mathcal{C}}(A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2)$  (voir p. 123, triangles métaharmoniques au sens étroit).

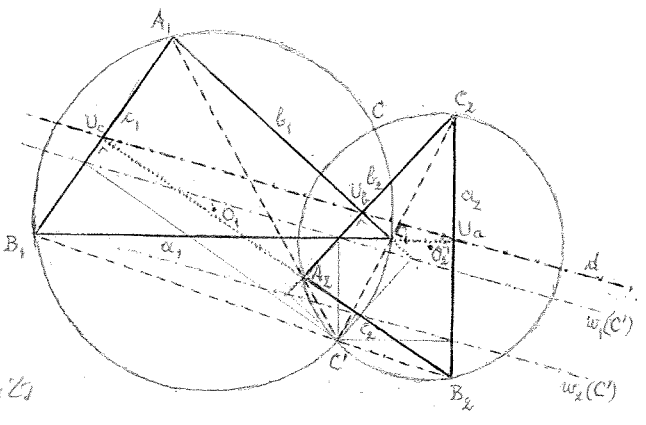
Il résulte du théorème de Desargues que si les trois sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes passant par un point fixe, tandis que deux des côtés passent par deux points fixes, le troisième côté passe par un point fixe sur la droite déterminée par ces deux points fixes. Il résulte de sa réciproque que si deux des sommets glissent sur deux droites fixes, tandis que les trois côtés passent par trois points fixes en ligne droite, le troisième sommet décrit une droite passant par l'intersection des deux premières droites fixes.

En particulier, deux triangles homothétiques sont homologues, le centre d'homologie étant le centre d'homothétie. L'axe d'homologie est alors la droite de l'infini puisque les côtés homologues sont parallèles. C'est notamment le cas, cité ci-dessus, pour  $ABC$  et son triangle complémentaire  $M_a M_b M_c$ .

Principaux triangles homologues avec  $ABC$  (entre parenthèses, le centre d'homologie):  $A'B'C'$  ( $G$ ),  $A_g B_g C_g$  ( $G$ ),  $A_m B_m C_m$  ( $G$ ),  $A_0 B_0 C_0$  ( $O$ ),  $A_L B_L C_L$  ( $L$ ),  $A_w B_w C_w$  ( $w$ ),  $A_w' B_w' C_w'$  ( $w'$ ),  $A_\theta B_\theta C_\theta$  ( $\theta$ ),  $D_a D_b D_c$  ( $I$ ),  $E_a E_b E_c$  ( $H$ ),  $G_a' G_b' G_c'$  ( $H$ ),  $G_{ma} G_{mb} G_{mc}$  ( $G$ ),  $H_a H_b H_c$  ( $H$ ),  $H_a' H_b' H_c'$  ( $H$ ),  $I_a I_b I_c$  ( $I$ ),  $I_{ak} I_{bk} I_{ck}$  ( $K_k$ ),

$J_a J_b J_c (\Gamma), J_{aa} J_{bb} J_{cc} (N), J_{aa} J_{ab} J_{ac} (\Gamma_a), J_{ba} J_{bb} J_{bc} (\Gamma_b), J_{ca} J_{cb} J_{cc} (\Gamma_c), J_a J_{ab} J_{bc} (N_a), J_{ca} J_b J_{ac} (N_b),$   
 $J_{ba} J_{ab} J_c (N_c), K_a K_b K_c (L), L'_a L'_b L'_c (K), M_a M_b M_c (G), N_a N_b N_c (\Gamma), O_a O_b O_c (L), Q_a Q_b Q_c (\Gamma),$   
 $Q_a Q'_b Q'_c (I_a), Q'_a Q_b Q'_c (I_b), Q'_a Q'_b Q_c (I_c), R_a R_b R_c (R), S_a S_b S_c (L), X_a X_b X_c (V), Z_a Z_b Z_c (H),$   
 $Z'_a Z'_b Z'_c (H_a), \Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c (N), \Delta_a \Delta_b \Delta_c (Y), \Delta'_a \Delta'_b \Delta'_c (Y'), \Theta_a \Theta_b \Theta_c (G), \Lambda_a \Lambda_b \Lambda_c (G), \Xi_a \Xi_b \Xi_c (L),$   
 $\Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c (L), \Upsilon_a \Upsilon_b \Upsilon_c (H), \Psi_a \Psi_b \Psi_c (\Psi).$  Quelques-uns de ces triangles sont même homothétiques à  $ABC$ , avec pour centre d'homothétie le centre d'homologie indiqué, notamment  $A'B'C', A_m B_m C_m, A_0 B_0 C_0, E_a E_b E_c, G_m G_n G_{m'}, \Theta_a \Theta_b \Theta_c$ , avec pour rapports d'homothétie respectifs  $-2, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ . Certains des triangles homologiques avec  $ABC$  ont leurs sommets sur le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  et sont donc orthoharmoniques au sens étroit (p. 129) avec  $ABC$ :  $A_g B_g C_g, A'_0 B'_0 C'_0, A_w B_w C_w, H'_a H'_b H'_c, Q_a Q_b Q_c, Q_a Q'_b Q'_c, Q'_a Q_b Q'_c, Q'_a Q'_b Q_c, \Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c$ ; ceci signifie que par exemple,  $\overline{J_a A}, \overline{J_a Q_a} = \overline{J_b B}, \overline{J_b Q'_b} = \overline{J_c C}, \overline{J_c Q'_c} (= \mathcal{P}_b(J_a))$ .

Cas où les côtés des triangles homologiques  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont respectivement perpendiculaires:  $a_1 \perp a_2, b_1 \perp b_2, c_1 \perp c_2$ ; les deux triangles sont alors semblables (p. 121):  $A_1 B_1 C_1 \sim A_2 B_2 C_2$ . Dans ce cas des côtés respectifs perpendiculaires, l'un des points d'intersection des cercles circonscrits à  $A_1 B_1 C_1$  et à  $A_2 B_2 C_2$  est le point double  $C$  de la similitude (p. 122) avec ici  $CE \circ (A_1 A_2), CE \circ (B_1 B_2), CE \circ (C_1 C_2)$  et l'autre point d'intersection des cercles circonscrits est le centre d'homologie des deux triangles, soit  $C'$



avec  $C' \in A_1 A_2, C' \in B_1 B_2, C' \in C_1 C_2$ . Ces cercles circonscrits  $\circ(A_1, B_1, C_1)$  et  $\circ(A_2, B_2, C_2)$  sont dans ce cas orthogonaux; si  $O_1 = \circ(A_1, B_1, C_1)$  et  $O_2 = \circ(A_2, B_2, C_2)$  sont leurs centres respectifs, on a  $O_1 \hat{C} O_2 = O_1 \hat{C}' O_2 = 1 \text{ dr.}$  (d'où  $C \hat{O}_1 C' + C \hat{O}_2 C' = 2 \text{ dr.}$ ):

On a  $(\text{proj}_1 C', \text{proj}_1 C', \text{proj}_1 C') -$ ; c'est en effet la wallace (p. 94) de  $C'$  par rapport à  $A_1 B_1 C_1$ , soit  $w_1(C')$ , puisque  $C' \in \circ(A_1, B_1, C_1)$ . De même,  $(\text{proj}_2 C', \text{proj}_2 C', \text{proj}_2 C') -$ , qui est la wallace de  $C'$  par rapport à  $A_2 B_2 C_2$ , soit  $w_2(C')$ , puisque  $C' \in \circ(A_2, B_2, C_2)$ . On a  $w_1(C') \parallel w_2(C') \parallel d$ . On a aussi  $(\text{proj}_1 C, \text{proj}_1 C, \text{proj}_1 C) -$  et  $(\text{proj}_2 C, \text{proj}_2 C, \text{proj}_2 C) -$ , puisque  $C \in \circ(A_1, B_1, C_1)$  et  $C \in \circ(A_2, B_2, C_2)$ : ce sont les wallaces respectives de  $C$  par rapport à  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ , soit  $w_1(C)$  et  $w_2(C)$ , avec cette fois  $w_1(C) \perp w_2(C)$  puisque  $C$  est le point double de la similitude de ces deux triangles dont les côtés homologiques sont perpendiculaires.

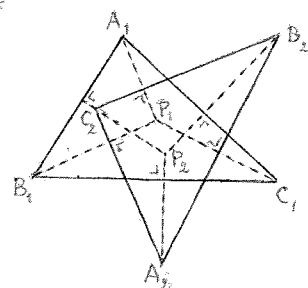
Cette situation est celle qu'on obtient lorsqu'en les points segmentaires  $U_a, U_b, U_c$  (p. 19) d'une transversale  $u$  par rapport à un triangle  $A_1 B_1 C_1$ , on élève les perpendiculaires aux côtés de ce triangle: les intersections de ces perpendiculaires deux à deux sont les sommets d'un second triangle, soit  $A_2 = [\perp(b_1 U_b), \perp(c_1 U_c)], B_2 = [\perp(c_1 U_c), \perp(a_1 U_a)]$ ,



$C_2 = [\perp(a_1, U_a), \perp(b_1, U_b)]$ , qui est semblable à  $A_1B_1C_1$ , puisque, par construction, ses côtés sont perpendiculaires à ceux de  $A_1B_1C_1$ . On a alors  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2)^*$ , ce qui signifie que les deux triangles sont homologues avec pour centre d'homologie ce point  $(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2) \Rightarrow C'$ ; l'axe d'homologie est  $d = u$ ; en effet, par construction, on a  $(a_1, a_2) = U_a$ ,  $(b_1, b_2) = U_b$ ,  $(c_1, c_2) = U_c$  avec  $(U_a, U_b, U_c) = u$  puisque  $U_a \in u$ ,  $U_b \in u$ ,  $U_c \in u$ .

### Triangles orthologiques

Soient deux triangles  $A_1B_1C_1$ , de côtés  $a_1, b_1, c_1$ , et  $A_2B_2C_2$ , de côtés  $a_2, b_2, c_2$ , tels que  $[\perp(a_2, A_1) \perp(b_2, B_1), \perp(c_2, C_1)]^*$ , on a aussi  $[\perp(a_1, A_2), \perp(b_1, B_2), \perp(c_1, C_2)]^*$  et réciproquement. Deux tels triangles sont dits orthologiques. Les points  $[\perp(a_2, A_1), \perp(b_2, B_1), \perp(c_2, C_1)] \Rightarrow P_1$  et  $[\perp(a_1, A_2), \perp(b_1, B_2), \perp(c_1, C_2)] \Rightarrow P_2$  sont appelés les orthopôles de ces triangles.



C'est en particulier le cas du triangle  $ABC$  et du triangle podaire, par rapport à  $ABC$ , d'un point  $P$  quelconque du plan, soit, avec les notations de la p. 14, le triangle  $P'_aP'_bP'_c$ . En effet les droites  $PP'_a, PP'_b, PP'_c$  menées par les sommets  $P'_a, P'_b, P'_c$  de ce triangle, qui sont par définition  $\perp a, \perp b, \perp c$  respectivement, concourent en un même point  $P$ . D'après un énoncé de la p. 74, les droites  $A_1invP, B_1invP, C_1invP$  sont perpendiculaires respectivement à  $P'_bP'_c, P'_cP'_a, P'_aP'_b$  et elles concourent effectivement en un point, le point  $invP$ . Les orthopôles de  $ABC$  et  $P'_aP'_bP'_c$  sont donc  $P$  et  $invP$ .

Plus particulièrement encore, c'est le cas des triangles  $ABC$  et  $J_aJ_bJ_c$ , qui est le triangle podaire de  $I$ : on a à la fois  $(J_a, J_b, J_c) = I$ , c.à.d.  $[\perp(J_bJ_c, A), \perp(J_cJ_a, B), \perp(J_aJ_b, C)] = I$ , et aussi  $(IJ_a, IJ_b, IJ_c) = I$ , c.à.d.  $[\perp(a, J_a), \perp(b, J_b), \perp(c, J_c)] = I$ , ceci en accord avec  $inv I = I$  (p. 73).

Autres exemples :

Étant donné un triangle  $A_1B_1C_1$  et un point  $P$  quelconque du plan, le triangle ayant pour sommets  $\circ[P, B_1, C_1] \Rightarrow A_2, \circ[P, C_1, A_1] \Rightarrow B_2, \circ[P, A_1, B_1] \Rightarrow C_2$  est orthologique avec  $A_1B_1C_1$ ; les orthopôles sont  $P$  et le centre  $O_1 = \circ[A_1, B_1, C_1]$  du cercle circonscrit à  $A_1B_1C_1$ , qui est le point de concours des médiatrices de ce triangle, sur lesquelles se trouvent respectivement  $A_2, B_2, C_2$ .

Étant donné un triangle  $A_1B_1C_1$  et un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $P$  et rayon  $r$  quelconques, le triangle  $A_2B_2C_2$  dont les côtés sont  $a_2 = \text{pol}_{\mathcal{C}} A_1, b_2 = \text{pol}_{\mathcal{C}} B_1, c_2 = \text{pol}_{\mathcal{C}} C_1$  (ce qui entraîne  $a_1 = \text{pol}_{\mathcal{C}} A_2, b_1 = \text{pol}_{\mathcal{C}} B_2, c_1 = \text{pol}_{\mathcal{C}} C_2$ ) est orthologique avec  $A_1B_1C_1$ ; on a  $\overline{PA_1} \cdot \overline{P \text{proj}_{a_2} P} + \overline{PB_1} \cdot \overline{P \text{proj}_{b_2} P} + \overline{PC_1} \cdot \overline{P \text{proj}_{c_2} P} = r^2$  et  $\overline{PA_2} \cdot \overline{P \text{proj}_{a_1} P} + \overline{PB_2} \cdot \overline{P \text{proj}_{b_1} P} + \overline{PC_2} \cdot \overline{P \text{proj}_{c_1} P} = r^2$ . Si le cercle choisi est le cercle  $\mathcal{C}_1$  inscrit au premier triangle, on retrouve le cas particulier considéré ci-dessus des triangles  $ABC$  et  $J_aJ_bJ_c$ , avec  $P \equiv I$ .

Si deux triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont homothétiques, les perpendiculaires abaissées de  $A_1, B_1, C_1$  respectivement sur  $a_2, b_2, c_2$  sont aussi perpendiculaires à  $a_1, b_1, c_1$  (puisque

$\alpha_1 \parallel a_2, b_1 \parallel b_2, c_1 \parallel c_2$ ) et sont donc les droites qui portent les hauteurs de  $A_1B_1C_1$ ; elles concourent en  $H_1$ , orthocentre de  $A_1B_1C_1$ . De même, les perpendiculaires abaissées de  $A_2, B_2, C_2$  respectivement sur  $a_1, b_1, c_1$  concourent en  $H_2$ , orthocentre de  $A_2B_2C_2$ . Des triangles homothétiques sont donc non seulement directement semblables, mais aussi orthologiques, les orthopôles étant leurs orthocentres.

### Triangles isologiques

Cette notion constitue une simple généralisation de celle de triangles orthologiques; l'angle droit que font les perpendiculaires aux côtés d'un des deux triangles, menées par les sommets de l'autre, et qui sont concourantes, est remplacé par un angle  $\alpha$  quelconque. Le théorème suivant généralise celui qui est à la base de la définition des triangles orthologiques. Si deux triangles  $A_1B_1C_1$ , de côtés  $a_1, b_1, c_1$ , et  $A_2B_2C_2$ , de côtés  $a_2, b_2, c_2$ , sont tels que des droites menées par  $A_1, B_1, C_1$ , et faisant un même angle  $\alpha$  avec  $a_2, b_2, c_2$  sont concourantes, c.à.d. s'il y a un point  $P_1$  tel que  $\text{ang}(B_2C_2, A_1P_1) = \text{ang}(C_2A_2, B_1P_1) = \text{ang}(A_2B_2, C_1P_1) = \alpha$ , les angles étant pris algébriquement, avec leurs signes, les droites menées par  $A_2, B_2, C_2$  faisant ce même angle  $\alpha$ , avec même sens de rotation, avec  $a_1, b_1, c_1$  sont aussi concourantes, c.à.d. qu'il y a alors un point  $P_2$  tel que  $\text{ang}(B_1C_1, A_2P_2) = \text{ang}(C_1A_1, B_2P_2) = \text{ang}(A_1B_1, C_2P_2) = \alpha$ , ces angles étant aussi pris avec leurs signes. De tels triangles sont dits isologiques et les points  $P_1$  et  $P_2$  sont appelés les isopôles de ces triangles.

### Triangles métaparallèles

Si deux triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont tels qu'il y ait un point  $P_1$  tel que

$(A_1P_1, B_1P_1, C_1P_1) \#$  (droites concourantes en  $P_1$ )

avec  $A_1P_1 \parallel B_2C_2, B_1P_1 \parallel C_2A_2, C_1P_1 \parallel A_2B_2$ ,

il y a aussi un point  $P_2$  tel que

$(A_2P_2, B_2P_2, C_2P_2) \#$  (droites concourantes en  $P_2$ )

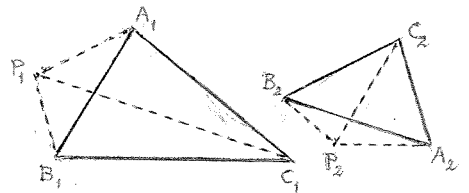
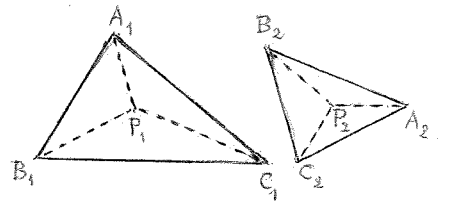
avec  $A_2P_2 \parallel B_1C_1, B_2P_2 \parallel C_1A_1, C_2P_2 \parallel A_1B_1$ .

Deux tels triangles sont dits métaparallèles

et les points  $P_1$  et  $P_2$  sont les premier ou second

métapôle de chacun de ces triangles par rapport à l'autre (voir pp. 106 et 107), premier ou second suivant la position de  $P_1$  par rapport au triangle  $A_1B_1C_1$ , et par suite celle de  $P_2$  par rapport à  $A_2B_2C_2$  (dans la figure supérieure, ce sont les premiers métapôles, tandis que dans la figure inférieure, ce sont les seconds métapôles).

De  $C_1P_1 \parallel A_2B_2$  et  $B_1P_1 \parallel C_2A_2$ , on déduit que  $\hat{A}_2 = 2\text{dr.} - \hat{B}_1\hat{P}_1C_1$  (angle supplémentaire pour que les côtés de l'angle  $B_2A_2C_2$  aient tous deux le sommet  $A_2$  pour origine); on trouve de même  $\hat{B}_2 = 2\text{dr.} - \hat{C}_1\hat{P}_1A_1$  et  $\hat{C}_2 = 2\text{dr.} - \hat{A}_1\hat{P}_1C_1$ . De même, on a  $\hat{A}_1 = 2\text{dr.} - \hat{B}_2\hat{P}_2C_2$ ,  $\hat{B}_1 = 2\text{dr.} - \hat{C}_2\hat{P}_2A_2$ ,  $\hat{C}_1 = 2\text{dr.} - \hat{A}_2\hat{P}_2B_2$ . Ces relations expriment que les angles d'un des deux



triangles sont les suppléments des angles sous lesquels les côtés de l'autre sont vus du métapôle, sont vraies s'il s'agit des premières métapôles, intérieures aux triangles (fig. supérieure). Dans le cas contraire, certains des angles sont simplement égaux et pas égaux aux suppléments: dans le cas de la figure inférieure, où  $P_1$  est intérieur seulement à l'angle  $C_1$  et  $P_2$  intérieur seulement à l'angle  $C_2$ , on a  $\hat{A}_2 = \hat{B}_1 \hat{P}_1 C_1$ ,  $\hat{B}_2 = \hat{C}_1 \hat{P}_1 A_1$ ,  $\hat{C}_2 = 2dr. - \hat{B}_1 \hat{P}_1 A_1$ ,  $\hat{A}_1 = \hat{C}_2 \hat{P}_2 B_2$ ,  $\hat{B}_1 = \hat{A}_2 \hat{P}_2 C_2$ ,  $\hat{C}_1 = 2dr. - \hat{A}_2 \hat{P}_2 B_2$ .

### Triangles métaharmoniques

Deux triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont dits métaharmoniques l'un de l'autre par rapport à un point  $P$  lorsque  $(A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2) = P$  et que  $\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} = \overline{PC_1} \cdot \overline{PC_2}$ .

Étant donné le triangle  $A_1 B_1 C_1$  et le point  $P$ , un moyen simple d'obtenir un triangle métaharmonique de ce triangle par rapport à ce point est de prendre pour ses sommets  $A_2, B_2, C_2$  les secondes intersections respectivement de  $PA_1, PB_1, PC_1$  avec le cercle circonscrit à  $A_1 B_1 C_1$ , soit  $\mathcal{C} = \circ(A_1, B_1, C_1)$ , puisqu'alors les produits  $\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}, \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2}, \overline{PC_1} \cdot \overline{PC_2}$  sont tous trois égaux à la puissance  $P_{\mathcal{C}}(P)$  de  $P$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  (p. 7). Les deux triangles ont alors le même cercle circonscrit  $\mathcal{C} = \circ(A_1, B_1, C_1) = \circ(A_2, B_2, C_2)$ . On dit dans ce cas que  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  sont métaharmoniques au sens étroit par rapport à  $P$ . Le rapport de leurs

aires est  $\frac{\langle A_2 B_2 C_2 \rangle}{\langle A_1 B_1 C_1 \rangle} = \frac{|R^2 - OP^2|^3}{(\overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} \cdot \overline{PC_1})^2}$  où  $R$  est le rayon de  $\mathcal{C}$  (p. 42). Le numérateur est  $|P_{\mathcal{C}}(P)|^3 = \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} \cdot \overline{PC_1} \cdot \overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2} \cdot \overline{PC_2}$ ; on peut donc aussi écrire  $\frac{\langle A_1 B_1 C_1 \rangle}{\langle A_2 B_2 C_2 \rangle} = \frac{\overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} \cdot \overline{PC_1}}{\overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2} \cdot \overline{PC_2}}$ .

Étant donné que  $(A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2) \neq$ , les triangles métaharmoniques sont homologues (p. 124), le centre d'homologie étant  $P$ . Ils sont métaharmoniques au sens étroit, l'axe d'homologie est polo  $P$ .

Soit  $P'_a P'_b P'_c$  le triangle podaire (p. 14) de  $P$  par rapport au triangle  $A_1 B_1 C_1$ , c.à.d.  $P'_a = \text{proj}_{A_1 C_1} P$ ,  $P'_b = \text{proj}_{A_1 B_1} P$ ,  $P'_c = \text{proj}_{A_1 A_1} P$ ; on a  $A_2 B_2 C_2 \sim P'_a P'_b P'_c$  et cette similitude est directe. Évidemment, le triangle podaire de  $P$  par rapport au triangle  $A_2 B_2 C_2$  et le triangle  $A_1 B_1 C_1$  sont aussi directement semblables l'un à l'autre.

Par exemple, le triangle  $\Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c$  étant métaharmonique de  $ABC$  par rapport à  $L$  et  $Q_a Q_b Q_c$  étant métaharmonique de  $ABC$  par rapport à  $I$ , on a  $L_a L_b L_c \sim \Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c$  et  $J_a J_b J_c \sim Q_a Q_b Q_c$ .

Relations entre les angles: à condition de prendre les angles en grandeur et en signe, on a  $B_1 \hat{A}_1 C_1 + B_2 \hat{A}_2 C_2 = B_1 \hat{P}_1 C_1 = B_2 \hat{P}_2 C_2$ ,  $C_1 \hat{B}_1 A_1 + C_2 \hat{B}_2 A_2 = C_1 \hat{P}_1 A_1 = C_2 \hat{P}_2 A_2$ ,  $A_1 \hat{C}_1 B_1 + A_2 \hat{C}_2 B_2 = A_1 \hat{P}_1 B_1 = A_2 \hat{P}_2 B_2$ .

On appelle centre métaharmonique de deux triangles  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$  un point  $P$  tel que le triangle métaharmonique de  $A_1 B_1 C_1$  par rapport à  $P$  soit semblable à  $A_2 B_2 C_2$ . Il y en a deux: le premier à l'intérieur de  $\mathcal{C} = \circ(A_1, B_1, C_1)$  et le second à l'extérieur de  $\mathcal{C}$ ; la droite qui les joint passe par  $O = \circ(\mathcal{C})$  et ils sont conjugués l'un de l'autre par rapport au diamètre de  $\mathcal{C}$  porté par cette droite.

### Addendum

Relation particulière d'un triangle et d'un cercle: triangle conjugué à un cercle.

Un triangle  $ABC$  est dit conjugué à un cercle  $\mathcal{C}_H$  lorsque

$$a = \text{pol}_{\mathcal{C}_H} A, \quad b = \text{pol}_{\mathcal{C}_H} B, \quad c = \text{pol}_{\mathcal{C}_H} C.$$

(Deux de ces relations suffisent puisque deux d'entre elles entraînent la troisième.)

Centre du cercle:  $\circ(\mathcal{C}_H) = H$

où  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ ; donc tous les triangles conjugués à un cercle donné ont leur orthocentre au centre de ce cercle.

Relation du rayon  $r_H$  de ce cercle avec les éléments du triangle:

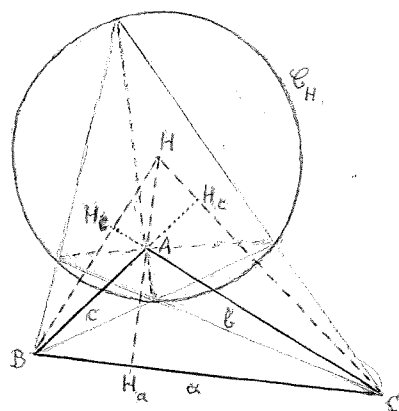
$$r_H^2 = \overline{HA} \cdot \overline{H_aH} = \overline{HB} \cdot \overline{H_bH} = \overline{HC} \cdot \overline{H_cH}$$

$$= 4R^2 |\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}| = \left| \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2 \right|;$$

$r_H^2$  est aussi égal à la moitié de la puissance (en valeur absolue) de  $H$  par rapport au cercle circonscrit  $\mathcal{C}$

du triangle, donc  $r_H^2 = \frac{1}{2} |\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(H)| = \frac{1}{2} |R^2 - \overline{OH}^2|$ .

Un des sommets, soit  $A$  par exemple (cas de la figure), est intérieur à  $\mathcal{C}_H$  et les deux autres sommets sont extérieurs; on a dans ce cas  $\hat{A} > 90^\circ$  ( $ABC$  obtusangle en  $A$ ). Etant donné un cercle  $\mathcal{C}_H$  et un triangle  $ABC$  conjugué à ce cercle, il y a une infinité de quadrilatères inscrits à  $\mathcal{C}_H$  dont les diagonales se croisent au sommet de  $ABC$  intérieure à  $\mathcal{C}_H$  et dont les côtés opposés concourent en les sommets de  $ABC$  extérieurs à  $\mathcal{C}_H$ . Tout quadrilatère inscrit à un cercle conduit de cette manière à un triangle conjugué à ce cercle.



## Données relatives à des points remarquables

### Points jouissant de propriétés remarquables pour leurs distances aux côtés ou aux sommets

- Point dont les distances aux côtés sont égales : I (dist<sub>a</sub>I = dist<sub>b</sub>I = dist<sub>c</sub>I) ;
- points dont les distances à un côté et aux prolongements des deux autres sont égales : I<sub>a</sub>, I<sub>b</sub>, I<sub>c</sub> ;
- point dont les distances aux côtés sont proportionnelles à leurs longueurs : L (  $\frac{dist_a L}{a} = \frac{dist_b L}{b} = \frac{dist_c L}{c}$  ) ;
- point dont les distances aux côtés sont inversement proportionnelles à leurs longueurs : G ( a · dist<sub>a</sub>G = b · dist<sub>b</sub>G = c · dist<sub>c</sub>G ) ;
- point dont la somme des carrés des distances aux côtés est minimale : L (  $\overline{LI_a}^2 + \overline{LI_b}^2 + \overline{LI_c}^2$  min. où L<sub>a</sub> = proj<sub>a</sub>L, L<sub>b</sub> = proj<sub>b</sub>L, L<sub>c</sub> = proj<sub>c</sub>L ) ;
- Point dont les distances aux sommets sont égales : O (OA = OB = OC) ;
- points dont les distances aux sommets sont inversement proportionnelles aux longueurs des côtés opposés : W et W' ( a · WA = b · WB = c · WC et a · W'A = b · W'B = c · W'C ) ;
- point dont la somme des distances aux sommets est minimale : Y (YA + YB + YC min.)  
 At: Â, B̂ et Ĉ < 120° (si un des angles est > 120°, c'est au contraire le sommet de cet angle).

### Triangles relatifs à quelques points remarquables

Pour chaque point indiqué, nous donnons successivement son triangle pédal (p.14), son triangle podaire (p.14) et le triangle métaharmonique au sens étroit (p.129) de ABC par rapport au point.

G	H	O	I	I <sub>a</sub>	I <sub>b</sub>	I <sub>c</sub>	L	A <sub>t</sub>	B <sub>t</sub>	C <sub>t</sub>	W	W'
M <sub>a</sub> M <sub>b</sub> M <sub>c</sub>	H <sub>a</sub> H <sub>b</sub> H <sub>c</sub>		D <sub>a</sub> D <sub>b</sub> D <sub>c</sub>	D <sub>a</sub> D <sub>b</sub> D <sub>c</sub>	D <sub>a</sub> D <sub>b</sub> D <sub>c</sub>	D <sub>a</sub> D <sub>b</sub> D <sub>c</sub>	S <sub>a</sub> S <sub>b</sub> S <sub>c</sub>	S <sub>a</sub> F <sub>b</sub> F <sub>c</sub>	F <sub>a</sub> S <sub>b</sub> F <sub>c</sub>	F <sub>a</sub> F <sub>b</sub> S <sub>c</sub>		
G <sub>a</sub> G <sub>b</sub> G <sub>c</sub>	H <sub>a</sub> H <sub>b</sub> H <sub>c</sub>	M <sub>a</sub> M <sub>b</sub> M <sub>c</sub>	J <sub>a</sub> J <sub>b</sub> J <sub>c</sub>	J <sub>a</sub> J <sub>b</sub> J <sub>c</sub>	J <sub>a</sub> J <sub>b</sub> J <sub>c</sub>	J <sub>a</sub> J <sub>b</sub> J <sub>c</sub>	L <sub>a</sub> L <sub>b</sub> L <sub>c</sub>				W <sub>a</sub> W <sub>b</sub> W <sub>c</sub>	W' <sub>a</sub> W' <sub>b</sub> W' <sub>c</sub>
A <sub>y</sub> B <sub>y</sub> C <sub>y</sub>	H <sub>a</sub> H <sub>b</sub> H <sub>c</sub>	A <sub>o</sub> B <sub>o</sub> C <sub>o</sub>	Q <sub>a</sub> Q <sub>b</sub> Q <sub>c</sub>	Q <sub>a</sub> Q <sub>b</sub> Q <sub>c</sub>	Q <sub>a</sub> Q <sub>b</sub> Q <sub>c</sub>	Q <sub>a</sub> Q <sub>b</sub> Q <sub>c</sub>	Σ <sub>a</sub> Σ <sub>b</sub> Σ <sub>c</sub>	Σ <sub>a</sub> BC	AΣ <sub>b</sub> C	ABΣ <sub>c</sub>	A <sub>w</sub> B <sub>w</sub> C <sub>w</sub>	A' <sub>w</sub> B' <sub>w</sub> C' <sub>w</sub>

### Coordonnées barycentriques et normales (relatives) de quelques points remarquables

Point	G	H	O	O <sub>3</sub>	I	I <sub>a</sub>	I <sub>b</sub>	I <sub>c</sub>	L	Ω <sub>1</sub>	Ω <sub>2</sub>	J <sub>1</sub>	J <sub>2</sub>
coordonnées	x	y	z		x	y	z	x	y	z	x	y	z
barycentriques	1	1	1		1	-a	a	a	a <sup>2</sup>	1/b <sub>2</sub>	1/c <sub>2</sub>	ab	ca
	1	1	1		1	b	-b	b	b <sup>2</sup>	1/c <sub>2</sub>	1/a <sub>2</sub>	bc	ab
	1	1	1		1	c	c	-c	c <sup>2</sup>	1/a <sub>2</sub>	1/b <sub>2</sub>	ca	bc
coordonnées	λ	μ	ν		λ	μ	ν	λ	μ	ν	λ	μ	ν
normales	h <sub>a</sub>	h <sub>b</sub>	h <sub>c</sub>		1	-1	1	1	a	c/b	b/c	b	c
	h <sub>a</sub>	h <sub>b</sub>	h <sub>c</sub>		1	1	-1	1	b	c/a	a/c	c	a
	h <sub>c</sub>	h <sub>c</sub>	h <sub>c</sub>		1	1	1	-1	c	b/a	a/b	a	b

(Rappel :  $\frac{ax}{a} = \frac{by}{b} = \frac{cz}{c}$  ,  $\frac{\lambda \sin A}{a} = \frac{\mu \sin B}{b} = \frac{\nu \sin C}{c}$  .)

### Situations de points remarquables

Comme toute ligne fermée sans point double, le contour du triangle divise le plan en deux régions : la région intérieure au triangle, celle où tous les points sont à distances finies, et la région extérieure, celle qui contient les points à l'infini. Celle-ci est divisée en six régions par les six prolongements des côtés : les trois régions intérieures aux angles du triangle, mais au-delà des côtés opposés respectifs, et les trois régions intérieures aux angles opposés, c.à.d. les combles (p.10). Pour situer les points dans le tableau ci-dessous, nous utiliserons les notations

Suivantes:

int: région intérieure du triangle;

exa: région extérieure du triangle, mais intérieure à l'angle BAC, donc limitée par BC et les prolongements de AB au-delà de B et de AC au-delà de C;

exb, exc: régions extérieures au triangle du côté de CA et de AB respectivement, comme pour exa par rapport à BC;

sbla, sblb, sblc: sables opposés respectivement à l'angle BAC, à l'angle CBA, à l'angle ACB. Pour les points qui sont aux limites de ces régions, c.à.d. sur les côtés ou leurs prolongements, les notations seront les suivantes:

a, b, c: respectivement sur le segment BC, sur le segment CA, sur le segment AB;

pa, pb, pc: sur un des prolongements respectivement de BC, de CA, de AB.

Nous donnons dans une première colonne après celle des points, la situation de chaque point dans le cas d'un triangle acutangle, puis dans une seconde colonne, celle du point dans le cas d'un triangle obtusangle en A. La transposition aux cas des triangles obtusangles en B ou en C est facile.

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 1dr., \hat{A} > 1dr.$
A' exa exa	G <sub>m</sub> int int	G <sub>a</sub> a a	H <sub>a</sub> (10) (11)	K' <sub>a</sub> pb b	S <sub>b</sub> b b
B' exb exb	A <sub>f</sub> exa sbla	G <sub>b</sub> b (5)	H <sub>b</sub> int sbla	K' <sub>b</sub> pc c	S <sub>c</sub> c c
C' exc exc	B <sub>e</sub> exb exb	G <sub>c</sub> c (6)	I int int	L int int	T <sub>a</sub> exa exa
A <sub>1a</sub> exa exa	C <sub>e</sub> exc exc	G' <sub>a</sub> int int	I <sub>a</sub> exa exa	L <sub>a</sub> a a	T <sub>b</sub> exb (19)
A <sub>1b</sub> exb (1)	A <sub>1c</sub> int int	G' <sub>b</sub> int exc	I <sub>b</sub> exb exb	L <sub>b</sub> b (14)	T <sub>c</sub> exc (20)
A <sub>1c</sub> exc exc	B <sub>1a</sub> int int	G' <sub>c</sub> int-exb	I <sub>c</sub> exc exc	L <sub>c</sub> c (15)	V -int (21)
A <sub>2a</sub> exa exa	G <sub>1a</sub> int int	G <sub>1a</sub> int (7)	J <sub>1</sub> int int	M <sub>a</sub> a a	W int (22)
A <sub>2b</sub> exb exb	A <sub>2c</sub> exa exa	G <sub>1b</sub> exa exa	J <sub>2</sub> int int	M <sub>b</sub> b b	W' (23) (24)
A <sub>2c</sub> exc (2)	B' <sub>1a</sub> exb exb	G <sub>1c</sub> exb exb	J <sub>a</sub> a a	M <sub>c</sub> c c	X <sub>a</sub> -exa exa
A <sub>3</sub> pc pc	C' <sub>1a</sub> exc exc	G <sub>1c</sub> exc exc	J <sub>b</sub> b b	N int int	X <sub>b</sub> -exb (25)
A <sub>4</sub> pb pb	D <sub>a</sub> a a	H int sbla	J <sub>c</sub> c c	N <sub>a</sub> sbla sbla	X <sub>c</sub> exc (26)
B <sub>3</sub> pa pa	D <sub>b</sub> b b	H <sub>a</sub> a a	J <sub>1a</sub> a a	N <sub>b</sub> sblb sblb	Y int (27)
B <sub>4</sub> pc pc	D <sub>c</sub> c c	H <sub>b</sub> b pb	J <sub>ab</sub> pb pb	N <sub>c</sub> sblc sblc	Γ int int
C <sub>3</sub> pb pb	D' <sub>a</sub> pa pa	H <sub>c</sub> c pc	J <sub>ac</sub> pc pc	O int exa	Γ <sub>a</sub> exa exa
C <sub>4</sub> pa pa	D' <sub>b</sub> pb pb	H' <sub>a</sub> exa exa	J <sub>ba</sub> pa pa	O <sub>1</sub> int (7)	Γ <sub>b</sub> exb exb
A <sub>9</sub> exa exa	D' <sub>c</sub> pc pc	H' <sub>b</sub> exb (8)	J <sub>ca</sub> pa pa	O <sub>2</sub> exa exa	Γ <sub>c</sub> exc exc
B <sub>9</sub> exb exb	E <sub>a</sub> int sbla	H' <sub>c</sub> exc (9)	:	Q <sub>a</sub> -exb exb	Σ <sub>a</sub> exa exa
C <sub>9</sub> exc exc	E <sub>b</sub> int (3)	H <sub>ab</sub> b b	:	Q <sub>b</sub> exc exc	Σ <sub>b</sub> exb exb
A <sub>0</sub> exa exa	E <sub>c</sub> int (4)	H <sub>ac</sub> c c	J <sub>cc</sub> c c	Q' <sub>a</sub> (16)	Σ <sub>c</sub> exc exc
B <sub>0</sub> exb exa	F <sub>a</sub> pa pa	H <sub>bc</sub> c c	K <sub>a</sub> int sbla	Q' <sub>b</sub> (17)	Φ int int
C <sub>0</sub> exc exa	F <sub>b</sub> pb pb	H <sub>ca</sub> a a	K <sub>b</sub> int (12)	Q' <sub>c</sub> (18)	Ω <sub>1</sub> int int
A <sub>m</sub> int int	F <sub>c</sub> pc pc	H <sub>ca</sub> a a	K <sub>c</sub> int (13)	R int int	Ω <sub>2</sub> int int
B <sub>m</sub> int int	G int int	H <sub>cb</sub> b b	K' <sub>a</sub> pa pa	S <sub>a</sub> a a	

(1) int si  $\hat{A} < \hat{C} + 1dr.$ , exa si  $\hat{A} > \hat{C} + 1dr.$

(2) int si  $\hat{A} < \hat{B} + 1dr.$ , exa si  $\hat{A} > \hat{B} + 1dr.$

- (3) exc si  $\hat{A} < \hat{C} + 1 \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \hat{C} + 1 \text{ dr.}$   
 (4) exc si  $\hat{A} < \hat{B} + 1 \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \hat{B} + 1 \text{ dr.}$   
 (5) b si  $a^2 < 3b^2 + c^2$ , pb si  $a^2 > 3b^2 + c^2$ .  
 (6) c si  $a^2 < b^2 + 3c^2$ , pc si  $a^2 > b^2 + 3c^2$ .  
 (7) int si  $\hat{A} - 1 \text{ dr.} < \hat{B}$  et  $\hat{C}$ , exc si  $\hat{C} < \hat{A} - 1 \text{ dr.} < \hat{B}$ , exc si  $\hat{B} < \hat{A} - 1 \text{ dr.} < \hat{C}$ , cbla si  $\hat{A} - 1 \text{ dr.} > \hat{B}$  et  $\hat{C}$ .  
 (8) -exc si  $\hat{A} > \hat{C} + 1 \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{A} < \hat{C} + 1 \text{ dr.}$   
 (9) exc si  $\hat{A} > \hat{B} + 1 \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{A} < \hat{B} + 1 \text{ dr.}$   
 (10) int si  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} > \frac{1}{2} \text{ dr.}$ , exc, excb, exc si  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \frac{1}{2} \text{ dr.}$  respectivement.  
 (11) int si  $\hat{A} > \frac{3}{2} \text{ dr.}$ ; si  $1 \text{ dr.} < \hat{A} < \frac{3}{2} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{B}$  et  $\hat{C} < \frac{1}{2} \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{B} > \frac{1}{2} \text{ dr.}$  et  $\hat{C} < \frac{1}{2} \text{ dr.}$ , excb si  $\hat{B} < \frac{1}{2} \text{ dr.}$  et  $\hat{C} > \frac{1}{2} \text{ dr.}$   
 (12) int si  $\hat{A} < \hat{C} + 1 \text{ dr.}$ , excb si  $\hat{A} > \hat{C} + 1 \text{ dr.}$   
 (13) int si  $\hat{A} < \hat{B} + 1 \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{A} > \hat{B} + 1 \text{ dr.}$   
 (14) b si  $a^2 < b^2 + 3c^2$ , pb si  $a^2 > b^2 + 3c^2$ .  
 (15) c si  $a^2 < 3b^2 + c^2$ , pc si  $a^2 > 3b^2 + c^2$ .  
 (16) excb si  $b > c$ , exc si  $b < c$ .  
 (17) exc si  $c > a$ , exc si  $c < a$ .  
 (18) exc si  $a > b$ , excb si  $a < b$ .  
 (19) excb si  $\hat{A} < \frac{5}{3} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \frac{5}{3} \text{ dr.}$   
 (20) exc si  $\hat{A} < \frac{5}{3} \text{ dr.}$ , cblc si  $\hat{A} > \frac{5}{3} \text{ dr.}$   
 (21) int si  $\hat{A} < \frac{3}{2} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \frac{3}{2} \text{ dr.}$   
 (22) int si  $\hat{A} < \frac{4}{3} \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{A} > \frac{4}{3} \text{ dr.}$   
 (23) si un seul des angles, par exemple  $\hat{A}$ , est  $> \frac{2}{3} \text{ dr.}$  et les deux autres  $< \frac{2}{3} \text{ dr.}$ : cbla; si deux des angles, par exemple  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , sont  $> \frac{2}{3} \text{ dr.}$ : exc.  
 (24) cbla si  $\hat{B}$  et  $\hat{C} < \frac{2}{3} \text{ dr.}$ , exc si  $\hat{B} > \frac{2}{3} \text{ dr.}$  et  $\hat{C} < \frac{2}{3} \text{ dr.}$ , excb si  $\hat{B} < \frac{2}{3} \text{ dr.}$  et  $\hat{C} > \frac{2}{3} \text{ dr.}$   
 (25) excb si  $\hat{A} < \frac{3}{2} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \frac{3}{2} \text{ dr.}$   
 (26) exc si  $\hat{A} < \frac{3}{2} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \frac{3}{2} \text{ dr.}$   
 (27) int si  $\hat{A} < \frac{4}{3} \text{ dr.}$ , cbla si  $\hat{A} > \frac{4}{3} \text{ dr.}$

### Ordre des points principaux sur les côtés

Nous nous limiterons à donner l'ordre des points sur le côté  $a$ , la transposition aux autres côtés étant facile. Nous nous limiterons aussi, chaque fois, à l'hypothèse  $\hat{B} > \hat{C}$ , soit  $b > c$ ; dans le cas contraire, il suffit évidemment de permuter  $B$  et  $b$  avec  $C$  et  $c$ . Les points sont rangés en partant du prolongement de  $a$  du côté de  $B$  pour terminer par son prolongement du côté de  $C$ .

1<sup>er</sup> cas: triangle obtusangle en  $A$  ( $\hat{A} > 1 \text{ dr.} > \hat{B} > \hat{C}$ )

$$D_a J_{ca} B S_a L_a H_a J_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

2<sup>me</sup> cas: triangle acutangle avec  $a > \frac{b^2 + c^2}{b + c}$  (\*) ( $1 \text{ dr.} > \hat{A}$  et  $\hat{B} > \hat{C}$ )

$$D_a J_{ca} B H_a L_a S_a J_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

3<sup>me</sup> cas: triangle acutangle avec  $b + c - \sqrt{bc} < a < \frac{b^2 + c^2}{b + c}$  ( $1 \text{ dr.} > \hat{B} > \hat{A}$  et  $\hat{C}$ )

$$D_a J_{ca} B H_a L_a J_a S_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

(\*) Les quantités  $b$  et  $c$  étant toutes deux  $> 0$ , on a, si  $b > c$ ,  $c < \frac{b^2 + c^2}{b + c} < b$ . Cette moyenne assez particulière de  $b$  et  $c$  est (pour  $b$  et  $c > 0$ ) contrairement à la moyenne géométrique et à la moyenne harmonique, plus grande que la moyenne arithmétique; elle s'écarte de celle-ci de la même quantité que la moyenne harmonique, mais dans l'autre sens. Notons qu'avec l'hypothèse faite de  $b > c$ , si  $a > b$ , on a nécessairement  $a > \frac{b^2 + c^2}{b + c}$  et si  $a < c$ , on a nécessairement  $a < \frac{b^2 + c^2}{b + c}$ .

4<sup>me</sup> cas : triangle acutangle avec  $a < b+c - \sqrt{2bc}$  ( $1 dr. > \hat{B} > \hat{A}$  et  $\hat{C}$ )

$$D'_a J_{ca} B H_a J_a L_a S_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

5<sup>me</sup> cas : triangle obtusangle en B avec  $a > \frac{b^2+c^2}{b+c}$  ( $\hat{B} > 1 dr. > \hat{A} > \hat{C}$ )

$$D'_a J_{ca} H_a B L_a S_a J_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

6<sup>me</sup> cas : triangle obtusangle en B avec  $b+c - \sqrt{2bc} < a < \frac{b^2+c^2}{b+c}$  ( $\hat{B} > 1 dr. > \hat{A}$  et  $\hat{C}$ )

$$D'_a J_{ca} H_a B L_a J_a S_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

7<sup>me</sup> cas : triangle obtusangle en B avec  $a < b+c - \sqrt{2bc}$  ( $\hat{B} > 1 dr. > \hat{A}$  et  $\hat{C}$ )

$$D'_a J_{ca} H_a B J_a L_a S_a D_a M_a J_{ca} C J_{ba}$$

Entre  $D'_a$  et B, on peut situer en plus  $F_a = \frac{1}{2}(D'_a, D_a) = (a, \hat{c}_a)$  (pp. 69 et 70) par rapport à  $J_{ca}$ , ainsi que par rapport à  $H_a$  lorsque  $\hat{B} > 1 dr.$

Par rapport à  $J_{ca}$ , l'ordre est  $F_a J_{ca}$  ( $F_a$  entre  $D'_a$  et  $J_{ca}$ ) si  $a > \frac{(b+c)(b^2-c^2)}{b^2+c^2}$ ,  
 il est  $J_{ca} F_a$  ( $F_a$  entre  $J_{ca}$  et B) si  $a < \frac{(b+c)(b^2-c^2)}{b^2+c^2}$ ;

par rapport à  $H_a$ , l'ordre est  $F_a H_a$  ( $F_a$  entre  $D'_a$  et  $H_a$ ) si  $a > \frac{b^2-c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$ ,  
 il est  $H_a F_a$  ( $F_a$  entre  $H_a$  et B) si  $a < \frac{b^2-c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$ .

Distances entre quelques-uns de ces points (le plus souvent, simples rappels):

$$\begin{aligned} \overline{BD'_a} &= \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{D'_a B} = \frac{ac}{b-c}, \quad \overline{D'_a C} = \frac{ab}{b+c}, \quad \overline{D'_a C} = \frac{ab}{b-c}, \quad \overline{D'_a M_a} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}, \quad \overline{D'_a M_a} = \frac{a(b+c)}{2(b-c)}; \\ \overline{F_a D'_a} &= \overline{D'_a F_a} = \frac{1}{2} \overline{D'_a D_a} = \frac{abc}{b^2-c^2}; \quad \overline{BH_a} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}, \quad \overline{H_a C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}, \quad \overline{H_a M_a} = \frac{b^2-c^2}{2a}; \\ \overline{BJ_a} &= \overline{J_{ca} C} = p-b = \frac{a-b+c}{2}, \quad \overline{J_a C} = \overline{BJ_{ca}} = p-c = \frac{a+b-c}{2}, \quad \overline{J_{ca} B} = \overline{CJ_{ba}} = p-a = \frac{b+c-a}{2}, \\ \overline{BJ_{ba}} &= \overline{J_{ca} C} = p = \frac{a+b+c}{2}, \quad \overline{J_a M_a} = \overline{M_a J_{ca}} = \frac{b-c}{2}, \quad \overline{J_{ca} M_a} = \overline{M_a J_{ba}} = \frac{b+c}{2}; \\ \overline{H_a J_a} &= \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}, \quad \overline{H_a J_{ca}} = \frac{(b-c)(a+b+c)}{2a}, \quad \overline{J_{ca} H_a} = \frac{(b+c)(a-b+c)}{2a}, \quad \overline{H_a J_{ba}} = \frac{(b+c)(a+b-c)}{2a}; \\ \overline{BS_a} &= \frac{ac^2}{b^2+c^2}, \quad \overline{S_a C} = \frac{ab^2}{b^2+c^2}, \quad \overline{S_a M_a} = \frac{a(b^2-c^2)}{2(b^2+c^2)}, \quad \overline{H_a S_a} = \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2a(b^2+c^2)}, \quad \overline{S_a J_a} = \frac{b-c}{2} \left[ \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} - 1 \right]; \\ \overline{BL_a} &= \frac{a(a^2-b^2+3c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}, \quad \overline{L_a M_a} = \frac{a(b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \quad \overline{L_a S_a} = \frac{a(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}, \quad \overline{L_a J_a} = \frac{b-c}{2} \left[ \frac{2a(b+c)}{a^2+b^2+c^2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Caractéristiques d'un point selon sa région

Les notations sont celles qui sont définies au début du paragraphe avant-précédent.

région	signes des coordonnées normales absolues			situations des sommets du triangle pédal		
	$\overline{P'_a P}$	$\overline{P'_b P}$	$\overline{P'_c P}$	$P_a = (AP, a)$	$P_b = (BP, b)$	$P_c = (CP, c)$
$P \in int$	+	+	+	$\in a$	$\in b$	$\in c$
$P \in exa$	-	+	+	$\in a$	$\in pb$	$\in pc$
$P \in exb$	+	-	+	$\in pa$	$\in b$	$\in pc$
$P \in exc$	+	+	-	$\in pa$	$\in pb$	$\in c$
$P \in cbla$	+	-	-	$\in a$	$\in pb$	$\in pc$
$P \in cblb$	-	+	-	$\in pa$	$\in b$	$\in pc$
$P \in cblc$	-	-	+	$\in pa$	$\in pb$	$\in c$



## Index

### Index des symboles utilisés

Nous ne reprenons évidemment pas ici les symboles habituels d'égalité (=), d'inégalité (>, <), des opérations arithmétiques fondamentales (+, -, ...), des fonctions trigonométriques (sin, cos, tg, cotg), etc.

Symbole	contexte	signification	page
°	en haut à droite d'un nombre	unité d'angle = 1 degré	4
• ( )	avec la notation d'un cercle	le centre de ce cercle	3
( , )	avec la notation d'un cercle et celle d'une tangente	le point de contact	7
( , )	avec les notations de deux cercles tangents	le point de contact	7
( , , )	avec les notations de trois points (ou plus)	ces points sont colinéaires	6
( , , , )	avec les notations de quatre points (ou plus)	ces points sont concycliques	6
○ ( , , )	avec les notations de trois points (ou plus)	le cercle passant par ces points	3 (etc)
○ ( , )	avec la notation d'un point et celle d'une longueur	le cercle ayant ce point pour centre et cette longueur pour rayon	3
○ ( )	avec la notation d'un segment de droite	le cercle ayant ce segment de droite pour diamètre	3
( , , )*	avec les notations de trois droites (ou plus)	ces droites sont concourantes	6
⇒	entre deux propositions	entraîne, implique que	1
∥	devant la notation d'une droite	est parallèle à cette droite	2
⊥	devant la notation d'une droite	est perpendiculaire à cette droite	2
↑ ↓	avec la notation d'un angle au milieu et des notations de droites de part et d'autre	ces deux droites sont antiparallèles par rapport aux côtés de cet angle	4
∥ ( , )	avec la notation d'une droite et celle d'un point	la parallèle menée par le point à la droite	2
⊥ ( , )	avec la notation d'une droite et celle d'un point	la perpendiculaire menée par le point à la droite	2
↑ ↓ ( , )	avec la notation d'un angle entre les flèches puis la notation d'une droite et celle d'un point	l'antiparallèle à la droite par rapport aux côtés de l'angle, menée par le point	4
∈	entre la notation d'un point et celle d'une ligne	ce point est sur la ligne (droite ou cercle)	1 et 3
⇒	entre une expression et une simple notation	ce que définit l'expression sera représenté par cette notation	5
∫	avec les notations de deux triangles de part et d'autre	ces triangles sont semblables	121
< >	entourant la notation d'une figure (triangle notamment)	l'aire de cette figure	89
$\frac{1}{2}$ ( , )	avec les notations de deux points	le point milieu du segment limité par ces points	2
((P-Q), h)	avec les notations de deux points	le point, entre ces deux points, tel que le rapport de la distance au premier point à la longueur du segment soit = h	2
$\frac{1}{2}$ ( , )	avec les notations de deux droites	la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites	4
ang ( , )	avec les notations de deux droites	la mesure de l'angle entre ces deux droites	4
isog	avec la notation d'un angle en indice et devant la notation d'une droite	la conjuguée isogonale de la droite par rapport aux côtés de l'angle	5 et 72

compl	devant la notation d'un point	le point complémentaire de ce point (dans le triangle considéré)	37
dist	avec la notation d'une droite en indice et devant celle d'un point	la distance du point à la droite	3
dr.	devant un nombre	unité d'angle = $\frac{1}{4}$ tour = 1 droit	4
=hom	avec les notations de deux triangles de part et d'autre	ces triangles sont homothétiques	7
hom( )	avec la notation d'un point et un nombre, devant la notation d'une figure (triangle notamment)	la figure (triangle notamment) homothétique de cette figure, avec le point pour centre et le nombre pour rapport d'homothétie	6 et 123
inv	devant la notation d'un point	le point inverse de ce point (dans le triangle considéré)	73
P( )	avec la notation d'un cercle en indice et avec la notation d'un point	la puissance de ce point par rapport au cercle	7
pol	avec la notation d'un cercle en indice et devant celle d'un point	la polaire du point par rapport au cercle	5
pol	avec la notation d'un cercle en indice et devant celle d'une droite	le pôle de la droite par rapport au cercle	5
pol	avec la notation d'un triangle en indice et devant celle d'un point	la polaire trichloraire du point par rapport au triangle	16
pol	avec la notation d'un triangle en indice et devant celle d'une droite	le pôle trichloraire de la droite par rapport au triangle	16
proj	avec la notation d'une droite en indice et devant celle d'un point	la projection (orthogonale) du point sur la droite	2
rad.	suivant un nombre	unité d'angle = 1 radian	4
reci	devant la notation d'un point	le point réciproque de ce point (dans le triangle considéré)	16
reci	devant la notation d'une droite (transversale)	la transversale réciproque (dans le triangle considéré)	20
sym	avec la notation d'un point ou d'une droite en indice et devant celle d'un point	le point symétrique de ce point par rapport au point ou à la droite	3
tang	entre la notation d'une droite ou d'un cercle et celle d'un autre cercle	cette droite et ce cercle ou ces deux cercles sont tangents	7
tang	devant la notation d'un cercle et avec en indice celle d'un point de ce cercle	la tangente au cercle en ce point	7
w( )	avec la notation d'un point	la wallace de ce point (par rapport au triangle considéré)	94
w( )	avec la notation d'un triangle	le triangle wallacien de ce triangle (par rapport au triangle considéré ou indiqué en indice de w)	95

Index des points

Notation(s)	expression(s)	nom	page
A, B, C	(b, c), (c, a), (a, b)	sommets du triangle considéré	8
A', B', C'	$\text{sym}_{H_a} A, \text{sym}_{H_b} B, \text{sym}_{H_c} C$	sommets du triangle anticomplémentaire	38
B', C''; C', A''; A', B''		points sur les prolongements des côtés a, b, c	9
A <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ; A <sub>2</sub> , B <sub>2</sub> , C <sub>2</sub>	(b <sub>1</sub> , c <sub>1</sub> ), (c <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> ), (a <sub>1</sub> , b <sub>1</sub> ); (b <sub>2</sub> , c <sub>2</sub> ), (c <sub>2</sub> , a <sub>2</sub> ), (a <sub>2</sub> , b <sub>2</sub> )	sommets de triangles différents	92, 106, 119 etc.
A <sub>1a</sub> , A <sub>1b</sub> , A <sub>1c</sub> ; A <sub>2a</sub> , A <sub>2b</sub> , A <sub>2c</sub>	( $\sigma_{1a}$ ), ( $\sigma_{1b}$ ), ( $\sigma_{1c}$ ); ( $\sigma_{2a}$ ), ( $\sigma_{2b}$ ), ( $\sigma_{2c}$ )	centres des cercles adjacents	84
A <sub>B</sub> , A <sub>C</sub> ; B <sub>c</sub> , B <sub>a</sub> ; C <sub>a</sub> , C <sub>b</sub>	A <sub>B</sub> ∈ ⊥(BC, B) avec $\overline{BA_B} = a$ , etc.	sommets des carrés construits si l'extérieur de ABC, sur BC, sur CA, sur AB	100

$A_b, A_c; B_c, B_a; C_a, C_b$	sommets de parallélogrammes construits sur BC, sur CA, sur AB	102
$A'_b, A'_c, A''_b, A''_c, \dots$	sommets du carré inscrit dont un côté est sur BC, ...	101
$A_{Ba}, A_{Ca}, \dots$	$\text{sym}_B B_{BC}, \text{sym}_C C_{BC}, \dots$	54
$A_d, B_d, C_d$	$(PA_1, d), (PB_1, d), (PC_1, d)$ où P = point quelconque et d = axe d'homologie des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$	124
$A_g, B_g, C_g$	intersections de $g_a, g_b, g_c$ avec le cercle circonscrit $\mathcal{C}$	43
$A_h, B_h, C_h$	$\text{sym}_{\mathcal{O}} H_a, \text{sym}_{\mathcal{O}} H_b, \text{sym}_{\mathcal{O}} H_c$ orthocentres des triangles $AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b$	29
$A_i, B_i, C_i$	$A_i \in BC, B_i \in CA, C_i \in AB$ (points sur les côtés de ABC) sommets d'un triangle inscrit à ABC	92
$A_m, B_m, C_m$	$\frac{1}{2}(M_c, M_b) = \frac{1}{2}(A, M_a), \frac{1}{2}(M_a, M_c) = \frac{1}{2}(B, M_b), \frac{1}{2}(M_b, M_a) = \frac{1}{2}(C, M_c)$	36
$A_o, B_o, C_o$	$\text{sym}_{\mathcal{O}} A, \text{sym}_{\mathcal{O}} B, \text{sym}_{\mathcal{O}} C$ points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés aux sommets	44
$A'_o, B'_o, C'_o$	$(a, AA_o), (b, BB_o), (c, CC_o)$ pour un triangle acutangle	44
$A_{o1}, B_{o1}, C_{o1}$	$(a, OI), (b, OI), (c, OI)$	68
$A_s, B_s, C_s$	$\text{sym}_L A, \text{sym}_L B, \text{sym}_L C$	80
$A_t, B_t, C_t$	$(t_c, t_b), (t_a, t_c), (t_b, t_a)$ sommets du triangle tangentiel	45
$A_{t2}, B_{t2}, C_{t2}$	$(t_{c1}, t_{c2}), (t_{c1}, t_{a2}), (t_{a1}, t_{b2})$ intersections des paires de bissectrices (intérieures) adjacentes à un même côté	62
$A'_{t2}, B'_{t2}, C'_{t2}$	$(t'_{c2}, t'_{c1}), (t'_{c2}, t'_{a1}), (t'_{a2}, t'_{b1})$ intersections des paires de bissectrices extérieures adjacentes à un même côté	64
$A_u, B_u, C_u$	proju A, proju B, proju C projections orthogonales des sommets sur une transversale u	21
$A_w, B_w, C_w$	(secondes) intersections de AW, BW, CW avec $\mathcal{C}$	70
$A'_w, B'_w, C'_w$	(secondes) intersections de AW', BW', CW' avec $\mathcal{C}$	70
$A_x, B_x, C_x$	$(x, m_a), (x, m_b), (x, m_c)$	86
$A_y, B_y, C_y$	$(y, m_a), (y, m_b), (y, m_c)$	86
$B_{BC}, C_{BC}, \dots$	$B_{BC} \in c$ avec $\overline{BB_{BC}} = \overline{BC}, C_{BC} \in b$ avec $\overline{CC_{BC}} = \overline{BC}, \dots$	52
$A_\alpha, B_\beta, C_\gamma$	points sur les prolongements de BC, CA, AB avec $CA_\alpha = \alpha a, AB_\beta = \beta b, BC_\gamma = \gamma c$	91
$A_{\delta 1}, A_{\delta 2}; B_{\delta 1}, B_{\delta 2}; C_{\delta 1}, C_{\delta 2}$	points à une distance $\delta$ de H sur $M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a$	37
$A_\theta, B_\theta, C_\theta$	$(H_{ab}H_{bc}, H_{ca}H_{ac}), (H_{bc}H_{cb}), (H_{ab}H_{ba}), (H_{ca}H_{ac}, H_{bc}H_{cb})$	29
$A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$	$(b_\varphi, c_\varphi), (c_\varphi, a_\varphi), (a_\varphi, b_\varphi)$ sommets d'un triangle circonscrit à ABC, dont les côtés font un angle $\varphi$ avec ceux de ABC	103 et 104
$C$	centre d'homothétie	6 et 123
$C$	point double d'une égalité, d'une similitude	120, 122
$D_a, D_b, D_c$	$(a, d_a), (b, d_b), (c, d_c)$ pieds des bissectrices (intérieures)	51
$D'_a, D'_b, D'_c$	$(a, e_a), (b, e_b), (c, e_c)$ pieds des bissectrices extérieures	55
$D_{ab}, D_{ac}, \dots$	$(\perp(d_a, D_a), b), (\perp(d_b, D_b), c), \dots$	52
$D_{ab}^e, D_{ac}^e, \dots$	$(\parallel(d_a, D_a), e_a), (\parallel(d_b, D_b), e_b), \dots$	68

$D_{2a}^b, D_{1a}^c$	$(b, \perp(a, D_a)), (c, \perp(a, D_a))$	dans un triangle rectangle, intersections avec les cathètes	111
$E_a, E_b, E_c$	$\circ(E_a) = \frac{1}{2}(A, H), \circ(E_b) = \frac{1}{2}(B, H), \circ(E_c) = \frac{1}{2}(C, H)$	base d'une perpendiculaire à l'hypoténuse menée par D	27
$E_{a1}, E_{a2}, E_{b1}, E_{b2}, E_{c1}, E_{c2}$	$(a, t'_{a1}), (a, t'_{a2}), \dots$	intersections des trisectrices extérieures avec les côtés opposés aux sommets dont elles sont respectivement issues	63
$E'_{a1}, E'_{a2}, \dots$		(secondes) intersections des trisectrices extérieures avec C	63
$E_{Ba}, \dots$	proj <sub>a</sub> B, ...		68
$F_a, F_b, F_c$	$\circ(D_a) = \frac{1}{2}(D_a, D'_a), \circ(D_b) = \frac{1}{2}(D_b, D'_b), \circ(D_c) = \frac{1}{2}(D_c, D'_c)$	centres des cercles d'Apollonios	52 et 69
G	$(g_a, g_b, g_c)$	centre de gravité	33
$G_a, G_b, G_c$	proj <sub>a</sub> G, proj <sub>b</sub> G, proj <sub>c</sub> G	sommets du triangle podaire de G	34
$G'_a, G'_b, G'_c$	proj <sub>a</sub> G, proj <sub>b</sub> G, proj <sub>c</sub> G		36
$G_h$	$(H_a K_a, H_b K_b, H_c K_c)$	centre de gravité du triangle orthique	28
$G_j$	$[\frac{1}{2}(J_b, J_c) J_a, \frac{1}{2}(J_c, J_a) J_b, \frac{1}{2}(J_a, J_b) J_c]$	centre de gravité du triangle $J_a J_b J_c$	55
$G_{ma}, G_{mb}, G_{mc}$	sym <sub>a</sub> G, sym <sub>b</sub> G, sym <sub>c</sub> G		38
H	$(h_a, h_b, h_c)$	orthocentre	25
$H_a, H_b, H_c$	$(a, h_a), (b, h_b), (c, h_c)$	pieds des hauteurs	24
$H'_a, H'_b, H'_c$	sym <sub>a</sub> H, sym <sub>b</sub> H, sym <sub>c</sub> H	(secondes) intersections de $h_a, h_b, h_c$ avec C	43
$H''_a, H''_b, H''_c$	tel <sub>s</sub> que $\overline{AH''_a} = a, \overline{BH''_b} = b, \overline{CH''_c} = c$	sur les prolongements respectifs de $H_a A, H_b B, H_c C$	27
$H_{ab}, H_{ac}, H_{bc}, H_{ba}, H_{ca}, H_{cb}$	proj <sub>b</sub> H <sub>a}, proj<sub>c</sub> H<sub>a}, proj<sub>c</sub> H<sub>b}, proj<sub>a</sub> H<sub>b}, proj<sub>a</sub> H<sub>c}, proj<sub>b</sub> H<sub>c}</sub></sub></sub></sub></sub></sub>		25 et 27
$H'_{ab}, H'_{ac}, \dots$	proj <sub>b</sub> H <sub>a}, proj<sub>c</sub> H<sub>a}, \dots</sub></sub>		25 et 31
$H_{AP}, H_{BP}, H_{CP}$		orthocentres des triangles BCP, CAP, ABP	91-92
$H_x$	sym <sub>O</sub>	orthocentre du triangle orthique	29
$H_x$	$(h'_a, h'_b, h'_c)$	point réciproque de l'orthocentre	37
$H_t$	$(A_t H_a, B_t H_b, C_t H_c)$	centre d'homothétie des triangles orthique et tangentiel	46
I	$\circ(I) = (i_a, i_b, i_c)$	centre du cercle inscrit	51
$I_1, I_2$		intersections de OI avec C	96
$I_a, I_b, I_c$	$\circ(I_a) = (e_a, e_c), \circ(I_b) = (e_b, e_c), \circ(I_c) = (e_a, e_b)$	centres des cercles exinscrits	57
$I_{a1}, I_{a2}, \dots$	$(a, t_{a1}), (a, t_{a2}), \dots$	pieds des trisectrices (intérieures)	62
$I'_{a1}, I'_{a2}, \dots$		(secondes) intersections des trisectrices (intérieures) avec C	62
$I_{ab}, I_{ac}, \dots$	$(e_b \parallel (a, I)), (c \parallel (a, I)), \dots$		53
$I_{ak}, I_{bh}, I_{ck}$	$[(1-k)I, kJ_a], [(1-k)I, kJ_b], [(1-k)I, kJ_c]$		55
$I_{Ba}, I_{Ca}, \dots$	proj <sub>a</sub> B, proj <sub>a</sub> C, ...		68
J		point tel que compl J = récipro I	23
$J_1, J_2$		points de Jerabeck	22
$J_a, J_b, J_c$	proj <sub>a</sub> I, proj <sub>b</sub> I, proj <sub>c</sub> I	points de contact du cercle inscrit	54
$J'_a, J'_b, J'_c$	sym <sub>a</sub> J <sub>a}, sym<sub>b</sub> J<sub>b}, sym<sub>c</sub> J<sub>c}</sub></sub></sub>		60

$J_{a1}, J_{b1}, J_{c1}$	$[H(a, J_1), a], [H(a, J_1), b], [H(b, J_1), c]$	22	
$J_{a2}, J_{b2}, J_{c2}$	$[H(b, J_2), a], [H(c, J_2), b], [H(a, J_2), c]$	22	
$J_{aa}, J_{ab}, \dots, J_{cc}$	$proj_a L_a, proj_b L_a, \dots, proj_c L_c$	points de contact des cercles circonscrits	60
$J_A, J_B, J_C$	$(J_{ba} J_{bc}, J_{ca} J_{cb}), (J_{cb} J_{ca}, J_{ab} J_{ac}), (J_{ac} J_{ab}, J_{bc} J_{ba})$		67
$K_R$	$(AJ_{ab}, BJ_{bc}, CJ_{ca})$	point de Kiepert	55
$K_a, K_b, K_c$	$\frac{1}{2}(H_b, H_c), \frac{1}{2}(H_c, H_a), \frac{1}{2}(H_a, H_b)$	pieds des médianes du triangle orthogone	28
$K'_a, K'_b, K'_c$	$(a, H_b H_c), (b, H_c H_a), (c, H_a H_b)$	conjugués harmoniques de $H_a$ par rapport à $BC$ , de $H_b$ par rapport à $CA$ , de $H_c$ par rapport à $AB$	32
$L$	$(J_a, J_b, J_c) = \text{inv } \mathcal{E}$	point de Lemoine	76
$L_a, L_b, L_c$	$proj_a L, proj_b L, proj_c L$	sommets du triangle podaire de $L$	78
$L'_a, L'_b, L'_c$	$proj_{m_a} L, proj_{m_b} L, proj_{m_c} L$	sommets du premier triangle de Brocard	82
$L_{ab}, L_{bc}, L_{ca}; L'_{ab}, L'_{bc}, L'_{ca}$	$(l_a, b), (l_b, c), (l_c, a); (l'_a, b), (l'_b, c), (l'_c, a)$	sommets du premier hexagone de Lemoine	79
$L'_{ab}, L'_{bc}, L'_{ca}; L''_{ab}, L''_{bc}, L''_{ca}$	$(l'_a, b), (l'_b, c), (l'_c, a); (l''_a, b), (l''_b, c), (l''_c, a)$	sommets du second hexagone de Lemoine	80
$M_a, M_b, M_c$	$\frac{1}{2}(B, C), \frac{1}{2}(C, A), \frac{1}{2}(A, B)$	pieds des médianes	33
$M'_a, M'_b, M'_c$		(secondes) intersections de $m_a, m_b, m_c$ avec le contour du triangle	43
$M''_a, M''_b, M''_c$		(secondes) intersections de $m_a, m_b, m_c$ avec le prolongement de l'autre côté	43
$M_{ab}, M_{ac}, \dots$	$(m_a, l), (m_b, c), \dots$	(N.B., $M'_a = M_{bc}$ ou $M_{ac}$ et $M''_a = M_{bc}$ ou $M_{ac}$ respectivement, etc.)	111
$N$	$(AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}) = \text{recipro}$	point de Nagel	61
$N_a, N_b, N_c$	$(AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}), (BJ_{bb}, CJ_{cc}, AJ_{aa}), (CJ_{cc}, AJ_{aa}, BJ_{bb})$	adjoints de $N$	61
$O$	$\cdot(\mathcal{E}) = (m_a, m_b, m_c)$	centre du cercle circonscrit $\mathcal{E}$	41
$O_g$	$\cdot(\mathcal{E}_g) = \frac{1}{2}(O, H)$	centre du cercle des neuf points $\mathcal{E}_g$	49
$O_a, O_b, O_c$	$proj_a O, proj_b O, proj_c O$	sommets du second triangle de Brocard	85
$O_L$	$\frac{1}{2}(O, L)$	centre du premier cercle de Lemoine (et du cercle de Brocard)	79 (et 82)
$O_{TK}$	$[(1-k')L, k'O]$ où $k' = \frac{1}{2}(k+1)$	centre d'un cercle de Tucker	80
$O_{\odot}$	$\cdot[o(\odot_a, \odot_b, \odot_c)]$	centre du cercle circonscrit au triangle de Taylor $\odot_a \odot_b \odot_c$	32
$P$	$pol_{ABC} p$	pôle trilineaire d'une droite $p$	16
$P_1, P_2$		points quelconques du plan	
$P'$		point jumeau de $P$	18
$P_1, P_2$		points isotomiques l'un de l'autre sur $a$	15
ou $P_1, P_2$		points isoperes l'un de l'autre	73 et 74
ou $P_1, P_2$		intersections de $OP$ avec $\mathcal{E}$	96
ou $P_1, P_2$		orthopôles, isopôles ou métapôles des triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$	127, 128, 128
$P_{1,2}$		premier métapôle du triangle $A_1 B_1 C_1$ par rapport au triangle $A_2 B_2 C_2$	106
$P'_{1,2}$		second métapôle du triangle $A_1 B_1 C_1$ par rapport au triangle $A_2 B_2 C_2$	107
$P'_{1a}, P'_{1b}, P'_{1c}$	$proj_a P_1, proj_b P_1, proj_c P_1$	sommets du triangle podaire de $P_1$	74
$P'_{2a}, P'_{2b}, P'_{2c}$	$proj_a P_2, proj_b P_2, proj_c P_2$	sommets du triangle podaire de $P_2$	74

$P_a, P_b, P_c$	$(a, AP), (b, BP), (c, CP)$	sommets du triangle pédal de P	14
$P_{a1}, P_{a2}; P_{b1}, P_{b2}; P_{c1}, P_{c2}$		paires de points isotomiques sur a, sur b, sur c	15
$P'_a, P'_b, P'_c$	$proj_a P, proj_b P, proj_c P$	sommets du triangle pédaire de P	14
$P''_a, P''_b, P''_c$	$(a, P_b P_c), (b, P_c P_a), (c, P_a P_b)$	conjugués harmoniques de $P_a$ par rapport à BC, de $P_b$ par rapport à CA, de $P_c$ par rapport à AB	16
$P'''_a, P'''_b, P'''_c$	$(BP''_b, CP''_c, AP''_a), (CP''_c, AP''_a, BP''_b), (AP''_a, BP''_b, CP''_c)$	points harmoniquement associés à P	16-17
$P^*_a, P^*_b, P^*_c$		(secondes) intersections de $PP'_a, PP'_b, PP'_c$ avec $\mathcal{C}$	96
$P_{ba}, P_{ca}; \dots$	$(p_a, b), (p_a, c); \dots$		46
$P_A, P_B, P_C$	$\frac{1}{2}(A, P), \frac{1}{2}(B, P), \frac{1}{2}(C, P)$	centres des cercles $\circ(P, P'_a, A, P'_c), \circ(P, P'_b, B, P'_a), \circ(P, P'_c, C, P'_b)$	15
$P_{ja}, P_{jb}, P_{jc}$		intersections de $PJ_a, PJ_b, PJ_c$ avec $\mathcal{C}_i$	65
$P'_{ja}, P'_{jb}, P'_{jc}$		intersections de $AP_{ja}, BP_{jb}, CP_{jc}$ avec $\mathcal{C}_i$	65
$P_j$		dans un triangle rectangle en A, $proj_{a \cap \mathcal{C}_i} J_c = proj_{b \cap \mathcal{C}_i} A$	111
$Q, Q_1, Q_2$		points quelconques du plan	
$Q'$		point jumeau de Q	18
$Q_1, Q_2$		points inverses l'un de l'autre	74
$Q_a, Q_b, Q_c$	$(a, m_a) = \frac{1}{2}(1, l_a), (c, m_b) = \frac{1}{2}(1, l_b), (c, m_c) = \frac{1}{2}(1, l_c)$	intersections des bissectrices (intérieures) avec les médianes correspondantes	58
$Q_{ab}, Q_{ac}, \dots$	$(Q_a Q_b, b), (Q_a Q_c, c), \dots$	intersections des côtés respectifs des triangles ABC et $Q_a Q_b Q_c$	53
$Q_j$		dans un triangle rectangle en A, $proj_{a \cap \mathcal{C}_i} J_c = proj_{b \cap \mathcal{C}_i} A$	111
R	$(AL'_a, BL'_b, CL'_c) = \text{recipro } L$	reciproque du point de Lemoine	87
$R_a, R_b, R_c$	$(a, AL'_a), (b, BL'_b), (c, CL'_c)$	isotomiques de $S_a, S_b, S_c$	85
S	$(\parallel(L'_b L'_c, A), \parallel(L'_c L'_a, B), \parallel(L'_a L'_b, C))$	point de Steiner	86
$S_a, S_b, S_c$	$(a, s_a), (b, s_b), (c, s_c)$	piéds des symédianes	76
T	$(\perp(L'_b L'_c, A), \perp(L'_c L'_a, B), \perp(L'_a L'_b, C))$	point de Torrey	87
$T_a, T_b, T_c$		centres des cercles de Toricelli (au sens strict) $\circ(B, C, \Delta_a), \circ(C, A, \Delta_b), \circ(A, B, \Delta_c)$	98
$T'_a, T'_b, T'_c$	$\text{sym}_{m_a} T_a, \text{sym}_{m_b} T_b, \text{sym}_{m_c} T_c$	centres des cercles de Toricelli au sens élargi $\circ(B, C, \Delta'_a), \circ(C, A, \Delta'_b), \circ(A, B, \Delta'_c)$	100
$T_{kA}, T_{kB}, T_{kC}$	$[(1-k)L, kA], [(1-k)L, kB], [(1-k)L, kC]$	sommets du triangle hom $(L, k) ABC$	80
$T_{ab}^h, T_{ac}^h; T_{bc}^h, \dots$	$(T_{bB} T_{cC}, b), (T_{bB} T_{cC}, c); (T_{cC} T_{aA}, a), \dots$	points définissant un cercle de Tucker	80
U	$(u_1, u_2, u_3)$	point de concours de trois transversales (parallèles aux côtés)	21
$U_{\perp}$	$(\perp(a, A_u), \perp(b, B_u), \perp(c, C_u))$	orthopôle d'une transversale u	21
$U_a, U_b, U_c$	$(a, u), (b, u), (c, u)$	points segmentaires d'une transversale u	19
$U'_a, U'_b, U'_c$		(secondes) intersections avec $\mathcal{C}$ de $\parallel(u, A), \parallel(u, B), \parallel(u, C)$	43
$U_{1b}, U_{1c}, U_{2c}, U_{2a}, U_{3a}, U_{3b}$	$(b, u_1), (c, u_1), (c, u_2), (a, u_2), (a, u_3), (b, u_3)$	points segmentaires de transversales $u_1, u_2, u_3$	21
$U_{a1}, U_{b1}, U_{c1}, U_{a2}, U_{b2}, U_{c2}$		points segmentaires d'une transversale U, et leurs isotomiques	20
V	$(v_a, v_b, v_c)$	point de concours de trois droites concourantes $v_a, v_b, v_c$	13
$V$	$(AX_a, BX_b, CX_c)$	point de Vecten	101
$V_a, V_b, V_c$	$(a, v_a), (b, v_b), (c, v_c)$	piéds des séciennes $v_a, v_b, v_c$	12
$V'_a, V''_a$		points de la droite BC tels que $B\hat{A}V'_a = \hat{C}, V''_a \hat{A}C = \hat{B}$	17
$V_{a1}, V_{a2}$	$(a, v_{a1}), (a, v_{a2})$	piéds des séciennes $v_{a1}, v_{a2}$	72

$V_{a1}, V_{a2}, \dots, V_{a(n-1)}$	points divisant le côté $a$ en $n$ segments égaux	39
$V_{ab}, V_{ac}; V_{bc}, V_{ba}; V_{ca}, V_{cb}$	points en tiers et aux deux tiers des segments $BC, CA, AB$	39
$W, W'$	$\text{env } Y, \text{env } Y'$ centres isodynamiques	69
$W_a, W_b, W_c$	$\text{proj}_a W, \text{proj}_b W, \text{proj}_c W$ sommets du triangle podaire de $W$	70
$W'_a, W'_b, W'_c$	$\text{proj}_a W', \text{proj}_b W', \text{proj}_c W'$ sommets du triangle podaire de $W'$	70
$X_a, X_b, X_c$	$(BA_c, CA_b), (CB_a, AB_c), (AC_b, BC_a)$ centres des cercles construits sur les côtés de $ABC$ à l'extérieur	101
$X_{bc}, X_{ca}, X_{ab}$	$(BB_a, CC_a), (CC_b, AA_b), (AA_c, BB_c)$	101
$Y$	$(AA_n, BA_b, CA_c)$ premier centre isogone	98
$Y'$	$(AA'_n, BA'_b, CA'_c)$ second centre isogone	99
$Y_a, Y_b, Y_c$	$(\delta_b, \delta_c), (\delta_c, \delta_a), (\delta_a, \delta_b)$ sommets du triangle de côtés $\perp AA_n, \perp BA_b, \perp CA_c$ et passant par $A, B, C$	99
$Z_a, Z_b, Z_c$	$\frac{1}{2}(A, H_a) = (h_a, M_a M_c), \frac{1}{2}(B, H_b) = (h_b, M_b M_a), \frac{1}{2}(C, H_c) = (h_c, M_c M_b)$ milieux des hauteurs	36
$Z'_a, Z'_b, Z'_c$	$(m_a, M_c M_b), (m_b, M_a M_c), (m_c, M_b M_a)$	36
$\Gamma$	$(AJ_a, BJ_b, CJ_c)$ point de Gergonne	55
$\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$	$(AJ_{aa}, BJ_{bb}, CJ_{cc}), (BJ_{bb}, CJ_{cc}, AJ_{aa}), (CJ_{cc}, AJ_{aa}, BJ_{bb})$ adjoints de $\Gamma$	61
$\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$	troisièmes sommets des triangles équilatéraux construits vers l'extérieur de $ABC$ , sur $BC$ , sur $CA$ , sur $AB$	98
$\Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'_c$	troisièmes sommets des triangles équilatéraux construits vers l'intérieur de $ABC$ , sur $BC$ , sur $CA$ , sur $AB$	99
$\Delta_{1a}, \Delta_{1b}, \Delta_{1c}$	troisièmes sommets des triangles semblables à $A_2 B_2 C_2$ construits vers l'intérieur de $A_1 B_1 C_1$ , sur $B_1 C_1$ , sur $C_1 A_1$ , sur $A_1 B_1$	106
$\Delta'_{1a}, \Delta'_{1b}, \Delta'_{1c}$	troisièmes sommets des triangles semblables à $A_2 B_2 C_2$ construits vers l'intérieur de $A_1 B_1 C_1$ , sur $B_1 C_1$ , sur $C_1 A_1$ , sur $A_1 B_1$	107
$\odot$	$\cdot(Z) = \frac{1}{2}(O, H)$ centre du cercle de Taylor	28
$\odot_a, \odot_b, \odot_c$	$\cdot(Z_a), \cdot(Z_b), \cdot(Z_c)$ centres des cercles de Taylor des triangles $HBC, HCA, HAB$	31
$\Lambda$	$\text{sym}_O H$ point de Longchamps	79
$\Lambda_a, \Lambda_b, \Lambda_c$	$\text{sym}_m L_a, \text{sym}_m L_b, \text{sym}_m L_c$ points de Lemoine des triangles $AH_b H_c, BH_c H_a, CH_a H_b$	78
$\Xi_a, \Xi_b, \Xi_c$	$(B_c B_a, C_a C_b), (C_a C_b, A_b A_c), (A_b A_c, B_c B_a)$	100
$\Pi$	$(I_a I_{aa}, I_b I_{bb}, I_c I_{cc})$ centre du cercle circonscrit au triangle $I_a I_b I_c$	65
$\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c$	$(I_a, I_{bb}, I_{cc}), (I_b, I_{ca}, I_{aa}), (I_c, I_{ab}, I_{ba})$ centres des cercles circonscrits aux triangles $I_b I_c, I_a I_b, I_a I_c$	66
$\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c$	(secondes) intersections des symédianes $s_a, s_b, s_c$ avec le cercle circonscrit $\mathcal{C}$	70 et 76
$Y_a, Y_b, Y_c$	quatrième sommets des parallélogrammes construits sur $B_a A_c, C_b B_a, A_c C_b$	100
$\Phi$	$(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_c)$ point de Feuerbach	67
$\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c$	$(\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_a), (\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_b), (\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_c)$ points de contact du cercle des neuf points avec les cercles exinscrits	67
$\Psi$	$(A\Psi_a, B\Psi_b, C\Psi_c)$	108
$\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c$	sommets des triangles isocèles semblables de bases respectives $a, b, c$	108
$\Omega_1, \Omega_2$	$(L_a B, L_b C, L'_c A), (L'_c A, L'_b A, L'_c B)$ premier et second points de Brocard	82
$\Omega_{1a}, \Omega_{1b}, \Omega_{1c}$	$(a, A\Omega_1), (b, B\Omega_1), (c, C\Omega_1)$ sommets du triangle pédal de $\Omega_1$	83
$\Omega_{2a}, \Omega_{2b}, \Omega_{2c}$	$(a, A\Omega_2), (b, B\Omega_2), (c, C\Omega_2)$ sommets du triangle pédal de $\Omega_2$	83

Index des droites et segments de droites

Comme expliqué dans le préambule, une lettre minuscule peut représenter, selon le contexte, un segment de droite ou la droite qui le porte (ou encore la longueur du segment).

Ainsi  $a$  peut désigner la droite  $BC$  ou le côté  $BC$  du triangle, linéaire à ces sommets (ou encore la longueur  $a = \overline{BC}$ ).

Notation(s)	expressions)	nom	page
$a, b, c$	$BC, CA, AB$	côtés du triangle considéré	8
$a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$	$B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2$	côtés de triangles différents $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ 22 et 119 etc.	
$a_\varphi, b_\varphi, c_\varphi$		droites faisant un angle $\varphi$ avec les côtés de $ABC$ ou (longueurs des) côtés du triangle $A_\varphi B_\varphi C_\varphi$	103, 104, 105
$d$		droite quelconque du plan	
ou $d$	$[(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$	axe d'homologie des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$	124
ou $d$	$D'_a D'_b D'_c = \text{pol}_{ABC} I$	axe d'homologie de $ABC$ et $D_a D_b D_c$	57 et 125
$d_{a1}, d_{a2}, \dots$	$\ (b, D_a), \ (c, D_a); \dots$		52
$d_A, d_B, d_C$		droites menées dans une même direction par $A$ , par $B$ , par $C$	26
$d_{Aa}(P), d_{Bb}(P), d_{Cc}(P)$	$\ (PA, M_a), \ (PB, M_b), \ (PC, M_c)$		37
$e$	$HO$	droite d'Euler	45
$e_a, e_b, e_c$	$\perp(a, A), \perp(b, B), \perp(c, C)$	bissectrices extérieures	55
$g_a, g_b, g_c$	$AM_a, BM_b, CM_c$	médianes	33
$g_{ab}, g_{ac}, g_{bc}; g_{a1}, g_{a2}, g_{b1}, g_{b2}, g_{c1}, g_{c2}$	$AV_{ab}, AV_{ac}; BV_{bc}, BV_{ba}; CV_{ca}, CV_{cb}$		39
$h$	$\text{pol}_{ABC} H$	axe orthique	32
$h_a, h_b, h_c$	$\perp(a, A), \perp(b, B), \perp(c, C)$	hauteurs	24
$h'_a, h'_b, h'_c$		céviannes isotomiques des hauteurs	37
$h_{a1}, h_{a2}$		hauteurs des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$	92
$i_a, i_b, i_c$	$\frac{1}{2}(b, c), \frac{1}{2}(c, a), \frac{1}{2}(a, b)$	bissectrices (intérieures)	51
$i'_a, i'_b, i'_c$		antibissectrices	51
$k_{ab}, k_{ac}, \dots$	$\frac{1}{2}(M_a A, M_a B), \frac{1}{2}(M_a C, M_a A), \dots$	bissectrices des angles $AM_a B, AM_a C, \dots$	35
$l$	$F_a F_b F_c = \text{pol}_\varphi L$	droite de Lemoine	79
$l_a, l_b, l_c$	$\ (a, l), \ (b, l), \ (c, l)$		79
$l'_a, l'_b, l'_c$	$\uparrow BAC \downarrow (a, l), \uparrow CBA \downarrow (b, l), \uparrow ACB \downarrow (c, l)$		80
$m_a, m_b, m_c$	$\perp(a, M_a), \perp(b, M_b), \perp(c, M_c)$	médiatrices	41
$p$	$\text{pol}_{ABC} P$	polaire trilinéaire d'un point $P$	16
$t_a, t_b, t_c$	$\ (t_a, A), \ (t_b, B), \ (t_c, C)$		46
$q_a, q_b, q_c$	$\ (i_a, M_a), \ (i_b, M_b), \ (i_c, M_c)$		52
$q'_a, q'_b, q'_c$	$\perp(i_a, M_a), \perp(i_b, M_b), \perp(i_c, M_c)$		53
$s_a, s_b, s_c$	$\text{cisog}_A g_a, \text{cisog}_B g_b, \text{cisog}_C g_c$	symmédianes	75
$t_a, t_b, t_c$	$\text{tang}_A e, \text{tang}_B e, \text{tang}_C e$	côtés du triangle tangentiel	45
$t_{a1}, t_{a2}; t_{b1}, t_{b2}; t_{c1}, t_{c2}$		trissectrices (intérieures) de l'angle $A$ , de l'angle $B$ , de l'angle $C$	61-62
$t'_{a1}, t'_{a2}; t'_{b1}, t'_{b2}; t'_{c1}, t'_{c2}$		trissectrices extérieures en $A$ , en $B$ , en $C$	63
$u$		transversale quelconque	19
$u_1, u_2, u_3$	$\ (a, u), \ (b, u), \ (c, u)$	transversales parallèles aux côtés (et concourant en $U$ )	21



$v_a, v_b, v_c$ $v'_a, v'_b, v'_c$ $v''_a, v''_b, v''_c$	droites quelconques issues de A, de B, de C droites issues de A telles que $\text{ang}(c, v'_a) = \hat{C}$ , $\text{ang}(v''_a, b) = \hat{B}$ droites conjuguées isogonales issues de A	12 17 72
$v_{a1}, v_{a2}, \dots, v_{a(n-1)}$	droites $AV_{a1}, AV_{a2}, \dots, AV_{a(n-1)}$	39
$v''_a, v''_b, \dots$ $AV'_a, AV''_b, \dots$	droites telles que $\text{ang}(c, v'_a) = \hat{C}$ , $\text{ang}(v''_a, b) = \hat{B}$	17
$w(P)$	wallace de P (supposé $\in \mathcal{E}$ )	94
$w_\varphi(P)$	wallace généralisée de P (supposé $\in \mathcal{E}$ ) avec angle $\varphi$	97
$x, y$	axes de Steiner	86
$d_a, d_b, d_c$	$\perp(AA_a, A), \perp(BB_b, B), \perp(CC_c, C)$ côtés du triangle $Y_a Y_b Y_c$	99

Index des cercles

Notation(s)	expressions	nom	page
$A_{1a}, A_{1b}, A_{1c}$		cercles adjoints concourant en $\Omega_1$ et ayant pour cordes respectives BC, CA, AB	84
$A_{2a}, A_{2b}, A_{2c}$		cercles adjoints concourant en $\Omega_2$ et ayant pour cordes respectives BC, CA, AB	84
$B$	$o(OL)$	cercle de Brocard	82
$\mathcal{O}$	$o(A, B, C) = o(O, \mathcal{R})$	cercle circonscrit au triangle	42
$\mathcal{E}_9$	$o(M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, E_a, E_b, E_c)$	cercle des neuf points	48
$\mathcal{E}_a$	$o(I_a, r_a)$	cercles exinscrits	59
$\mathcal{E}_b$	$o(I_b, r_b)$		
$\mathcal{E}_c$	$o(I_c, r_c)$		
$\mathcal{E}_H$		cercle auquel un triangle (d'orthocentre H) est conjugué	130
$\mathcal{E}_i$	$o(I, r)$	cercle tangent à a, b, c (au sens étroit) = cercle inscrit	53
$\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$	$o(D_a, D'_a), o(D_b, D'_b), o(D_c, D'_c)$	cercles d'Apollonios	69
$\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$	$o(AH), o(BH), o(CH)$	cercles eulériens	27
$\mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b, \mathcal{E}'_c$	$o(O, \overline{OM}_a), o(O, \overline{OM}_b), o(O, \overline{OM}_c)$		44
$L_1$	$o(L_{ca}, L_{ba}, L_{ab}, L_{cb}, L_{bc}, L_{ac})$	premier cercle de Lemoine	79
$L_2$	$o(L'_{ca}, L'_{ba}, L'_{ab}, L'_{cb}, L'_{bc}, L'_{ac})$	second cercle de Lemoine	80
$\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b, \mathcal{Q}_c$	$o(Q_a, \overline{Q_a M_a}), o(Q_b, \overline{Q_b M_b}), o(Q_c, \overline{Q_c M_c})$	cercles inscrits aux triangles $A_b B_c C_a$ , $B_c C_a A_b$ , $C_a A_b B_c$ (exinscrit pour l'un d'eux si ABC est obtusangle)	66
$\mathcal{T}$	$o(H_{ca}, H_{ba}, H_{ab}, H_{cb}, H_{bc}, H_{ac})$	cercle de Taylor	27-28
$\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$		cercles de Taylor des triangles HBC, HCA, HAB	31

Index de longueurs

Comme il est dit dès le préambule (p.1), la longueur d'un segment de droite représenté par une lettre minuscule est représentée par la même lettre. C'est ce qui est illustré par les lettres a, b, c qui, suivant le contexte, représentent les côtés du triangle ou leurs longueurs respectives: p.8; c'est aussi le cas, avons-nous remarqué p.12, pour les droites: ainsi la longueur  $\overline{AH}_a$ , entre autres, peut être simplement désignée par  $h_a$  comme le segment  $h_a = \overline{AH}_a$  lui-même. Le contexte indique chaque fois le sens à attribuer à une telle notation. Nous

indiquons donc ici seulement les notations d'autres longueurs, notamment des rayons de cercles particuliers.

Notation(s)	expression(s)	nom	page
$j$	$\overline{J_1 J_{b1}} = \overline{J_1 J_{c1}} = \overline{J_1 J_{a1}} = \overline{J_2 J_{c2}} = \overline{J_2 J_{a2}} = \overline{J_2 J_{b2}}$		22
$m'_a, m''_a, \dots$	$\overline{M_a M'_a}, \overline{M_a M''_a}$		43
$p$	$\frac{1}{2}(a+b+c)$	semi-périmètre du triangle	8
$r$	$\text{dist}_a I = \text{dist}_b I = \text{dist}_c I$	rayon du cercle inscrit $\mathcal{C}_i$	54
$r_a, r_b, r_c$	$\text{dist}_a I_a, \text{dist}_b I_b, \text{dist}_c I_c$	rayons des cercles exinscrits $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$	59
$r_B, r_C$		rayons des cercles inscrits dans les triangles $AH_B D, AH_C C$ (triang. rectang.)	112
$r_H$		rayon du cercle $\mathcal{C}_H$	130
$R$	$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$	rayon du cercle circonscrit $\mathcal{C}$	42
$R_1$	$\overline{O_1 A_1 B} = \overline{O_1 A_1 C} = \overline{O_1 B_1 C} = \overline{O_1 C_1 A} = \overline{O_1 C_1 B} = \overline{O_1 A_1 C}$	rayon du premier cercle de Lemoine	88
$R_2$	$\overline{L_2 A_2 B} = \overline{L_2 A_2 C} = \overline{L_2 B_2 C} = \overline{L_2 C_2 A} = \overline{L_2 C_2 B} = \overline{L_2 A_2 C}$	rayon du second cercle de Lemoine	88
$R_{1a}, R_{1b}, R_{1c}, R_{2a}, R_{2b}, R_{2c}$	$\overline{A_1 a C}, \overline{A_1 b A}, \overline{A_1 c B}, \overline{A_2 a B}, \overline{A_2 b C}, \overline{A_2 c A}$	rayons des cercles adjoints	84
$D_a, D_b, D_c$	$\frac{1}{2} \overline{D_a D'_a}, \frac{1}{2} \overline{D_b D'_b}, \frac{1}{2} \overline{D_c D'_c}$	rayons des cercles d'Apollonius $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$	70
$R_g$		rayon du cercle circonscrit au triangle construit avec $g_a, g_b, g_c$	91
$R_{G_a}, R_{G_b}, R_{G_c}$		rayons des cercles $\odot(B, G, C), \odot(C, G, A), \odot(A, G, B)$	91
$R_T$	$\overline{\odot H_a b} = \overline{\odot H_b c} = \overline{\odot H_c a} = \overline{\odot H_{a'a}} = \overline{\odot H_{b'b}} = \overline{\odot H_{c'c}}$	rayon du cercle de Taylor $\mathcal{T}$	30
$R_{\mathcal{C}_a}, R_{\mathcal{C}_b}, R_{\mathcal{C}_c}$		rayons des cercles $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$	32
$t$		longueur de chacune des tangentes menées d'un point P à un cercle $\mathcal{C}$	7
$x_a, x_b, x_c$		longueurs des côtés des carrés inscrits ayant un côté porté par BC, par CA, par AB	102
$\delta$		distance quelconque	par exemple 37

Indice d'autres grandeurs

	Notation(s)	expressions ou nom	page	
Aires:	$\mathcal{I}$	$\langle ABC \rangle$	89	
	$\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$	$\langle A_1 B_1 C_1 \rangle, \langle A_2 B_2 C_2 \rangle$	92	
	$\mathcal{I}_i$	$\langle J_a J_b J_c \rangle$	90	
	$\mathcal{I}_e$	$\langle J_{aa} J_{bb} J_{cc} \rangle$	90	
	$\mathcal{I}_{e_a}, \mathcal{I}_{e_b}, \mathcal{I}_{e_c}$	$\langle J_{a'a} J_{b'b} J_{c'c} \rangle, \langle J_{a'a} J_{b'b} J_{c'c} \rangle, \langle J_{c'a} J_{c'b} J_{c'c} \rangle$	90	
	$\mathcal{I}_P(P)$	$\langle P'_a P'_b P'_c \rangle$ ( $P'_a P'_b P'_c =$ triangle podaire de P)	94	
Angles:	$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$	angles (intérieurs) du triangle ABC	8	
	$\theta$	$\text{ang}(H_{ac} H_{ba}, c) = \dots = \text{ang}(H_{ab}, H_{ca}, b) = \dots$ angle entre les côtés des triangles $H_{ac} H_{ba} H_{cc}$ et $H_{ab} H_{bc} H_{ca}$ et ceux de ABC	30	
	$\sigma_1, \sigma_2$		premier et second angles de Steiner	86
	$\tau_a, \tau_b, \tau_c$	$\frac{\hat{A}}{3}, \frac{\hat{B}}{3}, \frac{\hat{C}}{3}$	angles déterminés par les trisectrices (intérieures)	62
	$\tau'_a, \tau'_b, \tau'_c$		angles déterminés par les trisectrices extérieures	62-63
	$\varphi$	angle quelconque		

$\Psi$	valeurs commune des angles $B\hat{\Psi}_aC$ , $C\hat{\Psi}_bA$ , $A\hat{\Psi}_cB$	108
$\omega$	angle de Brocard	82
Coordonnées: $\alpha, \beta, \gamma$	coordonnées barycentriques d'un point	14
$\lambda, \mu, \nu$	coordonnées normales d'un point	15
$\rho, \sigma, \tau$	coordonnées d'une transversale	19
Autres: $k$	nombre quelconque	
ou $k$	rapport de similitude	121
$\alpha, \beta, \gamma$	nombres quelconques	par exemple 91
$\rho$	rapport d'homothétie	6 et 123

### Index des noms

Nous ne citons pas ici les notions rappelées dans le préambule. La recherche d'un nom qualifié doit en général se faire suivant l'ordre alphabétique du qualificatif si c'est celui-ci qui est significatif; par exemple, "point eulérien" doit être cherché à "eulérien".

acutangle (triangle —)	9	Brocard (premier et second points de —)	82
adjacents (côté et sommet)	8	Brocard (théorème de —)	50
adjoint (cercle —)	83-84	Brocard (premier triangle de —)	85
adjoint (point —)	61 et 65	Brocard (second triangle de —)	85
angle (intérieur)	8	cauthète (d'un triangle rectangle)	110
angle extérieur	9	centre de gravité	33
antibissectrice	51	cercle circonscrit	42
antihcomplémentaire (point —)	37	cercle des neuf points	48-49
antihcomplémentaire (triangle —)	36 et 38	cercle exinscrit	59
antipédal (triangle —)	14	cercle inscrit	53
antipodaire (triangle —)	14	Ceva (théorème de — en relation de —)	12
Apollonios (cercle d'—)	69	cevienne	12
Apollonios (corde d'—)	70	Chebot (théorème de —)	45
arguésienne d'une courbe	73 (note*)	Clairaut (théorème de —)	103
associé (point harmoniquement —)	17	combe	10
associées (droite harmoniquement —)	17	complémentaire (point —)	37
base	8 et 113	complémentaire (triangle —)	36
Beltrami (théorème de —)	58	confugé (triangle — à un cercle)	130
bissectrice (intérieure)	51	conjugée isogonale (cevienne —)	72
bissectrice extérieure	55	conjugés isogonaux (points —)	73
Brocard (angle de —)	82	coordonnées barycentriques d'un point	14
Brocard (cercle de —)	82	coordonnées normales absolues	14

coordonnées normales d'un point	15	Aboussel (droite de -)	55
coordonnées d'une transversale	19	hypoténuse (d'un triangle rectangle)	110
cosinus (relation aux -)	10	interhauteur	26
côté	8	intermédiaire	36
Desargues (théorème de -)	124	inverse (homothétie -)	123
directe (homothétie -)	123	inverse (point -)	73
directement égaux (triangles - -)	119	inverse (transversale -)	74
directement semblables (triangles - -)	121	inversement égaux (triangles - -)	119
double (droite -)	120 et 122	inversement semblables (triangles - -)	121
double (point -)	120 et 122	isocèle (triangle -)	8 et 113
égalité	119	isodynamique (centre -)	69
équilatéral (triangle -)	8 et 116	isogone (premier centre -)	98
équivalents (triangles -)	92	isogone (second centre -)	99
Euler (droite d' -)	45	isologiques (triangles -)	128
Euler (triangle d' -)	27	isopôle (de triangles isologiques)	128
eulérien (cercle -)	27	isotomique (cévienne -)	15
eulérien (point -)	27	isotomique (point -)	15
Feuerbach (cercle de -)	49	jambe (d'un triangle isocèle)	113
Feuerbach (point de -)	67	Jerabeck (point de -)	22
Feuerbach (théorème de -)	67	jumeau (point -)	18
Fahrman (cercle de -)	61	Kariya (point de -)	55
Gergonne (point de -)	55	Lemoine (droite de -)	79
gravité (centre de -)	33	Lemoine (premier cercle de -)	79
harmoniquement associé (point -)	17	Lemoine (premier hexagone de -)	79
harmoniquement associée (droite -)	17	Lemoine (second cercle de -)	80
hauteur	24	Lemoine (second hexagone de -)	80
homologie (axe d' -)	124	Lemoine (point de -)	76
homologie (centre d' -)	124	Longchamps (droite de -)	79
homologiques (triangles -)	124	Longchamps (point de -)	79
homologues (sommets -, côtés -, points -, ...)	121	Malfatti (problème de -)	68
homothétie	123	médiane	33
homothétie (centre d' -)	123	médiatrice	41
homothétie (rapport d' -)	123	Ménélaos (théorème de - ou relation de -)	19

métaharmonique (centre —)	129	similitude (rapport de —)	121
métaharmoniques (triangles —)	129	sinus (relation aux —)	10
mitaparallèles (triangles —)	128	Simson (droite de —)	94
métapôle (premier —)	106 et 128	Simson (relation de —)	13
métapôle (second —)	107 et 128	Simson (théorème de —)	94
Morley (théorème de —)	62	sinus (relation aux —)	10
Magel (point de —)	61	sommet	8 et 113
Magel (théorème de —)	43	Specker (cercle de —)	55
Mauberg (cercles de —)	83	Steiner (axes de —)	86
obtusangle (triangle —)	9	Steiner (premier et second angles de —)	86
opposés (côté et sommet)	8	Steiner (point de —)	86
orthique (axe —)	32	Steiner (relation de —)	72
orthique (triangle —)	26	Steiner (théorème de —)	95
orthocentre	25	Stewart (relation etc —)	13
orthologiques (triangles —)	127	symédiane	75
orthopolaire (droite —)	21	tangentiel (triangle —)	45
orthopôle (d'une transversale)	21	Tarry (point de —)	87
orthopôles (de triangles orthologiques)	127	Taylor (cercle de —)	27
pédal (triangle —)	14	Taylor (triangle de —)	31
périmètre	8	Thébault (théorème de —)	43
piéd (d'une arête)	12	Toricelli (cercles de —)	98 et 100
podaire (triangle —)	14	transversale	19
polaire bilinéaire	16	triangle (relation du —)	8
pôle bilinéaire	16	trisectrice (intérieure)	61
pseudo-isocèle (triangle —)	115	trisectrice extérieure	63
Pythagore (théorème de —)	110	Tucker (cercle de —)	80
récipecque (point —)	16	Veeten (point de —)	101
récipecque (transversale —)	20 ou 21	wallace	94
rectangle (triangle —)	9 et 110	wallace généralisée	97
scalène (triangle —)	8	Wallace (droite de —)	94
segmentaire (point —)	19	wallacien (triangle —)	95
segmentaire (rapport —)	19	Zeeman (théorème de —)	45
similitude	121		