

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Institut d'Astrophysique et de Géophysique (Bât. B5c)
Bureau 0/13
eMail: Guy.Munhoven@ulg.ac.be
Tél.: 04-3669771

22 septembre 2014

Plan du cours 2014-2015

Cours théoriques

*16-09-2014 Méthodes numériques pour équations
différentielles ordinaires : introduction*

22-09-2014 Méthodes de Runge-Kutta ; Contrôle du pas

- Méthodes de Runge-Kutta
- Erreur et contrôle du pas
- Equations raides

22-09-2014 Fortran 95 : bases

4-5 cours Fortran 95 : suite et compléments

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Problème à valeur initiale sur intervalle $[t_0, t_0 + T]$ fixé :

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour } t \in [t_0, t_0 + T], \quad \text{avec } y(t_0) = y_0$$

Cinq étapes :

- 1 Choisir une grille de discrétisation
- 2 Intégrer l'équation différentielle entre deux points de la grille, p.ex., t_j et t_{j+1} :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} y'(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t)) dt.$$

Donc :

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t)) dt.$$

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Cinq étapes (suite) :

- 3 Remplacer l'intégrale de f par une formule aux différences finies, comme par exemple, la formule des trapèzes

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \frac{k}{2} [f(y(t_{j+1})) + f(y(t_j))] + O(k^3)$$

$O(k^3)$ est une fonction telle que $\lim_{k \rightarrow 0} (O(k^3)/k^3)$ est finie.

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Cinq étapes (suite) :

- 4 Laisser tomber le terme $O(k^3)$ et remplacer $y(t_j)$ par y_j , etc. :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j)$$

Méthode des trapèzes, implicite

- 5 A-stabilité

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Autres procédures pour quadrature numérique :

Approximation de $f(y(t))$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ par un polynôme de degré $q \geq 0$ passant par

- $(t_{j-q}, f(y_{j-q})), \dots, (t_j, f(y_j))$

méthode d'Adams-Bashforth (explicite)

- $(t_{j-(q-1)}, f(y_{j-(q-1)})), \dots, (t_{j+1}, f(y_{j+1}))$

méthode d'Adams-Moulton (implicite)

Développement de méthodes d'ordre supérieur

Development of Higher Order Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Stratégies pour construire des méthodes d'ordre supérieur

Méthodes multi-pas

- linéaires
- une seule évaluation du second membre par pas
- modification du pas d'intégration compliquée

Méthodes de Runge-Kutta

- méthodes généralement non-linéaires
- plusieurs évaluations du second membre pour effectuer un seul pas
- modification du pas d'intégration facile

Méthodes de Runge-Kutta : préliminaires

Runge-Kutta Methods : Preliminaries

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

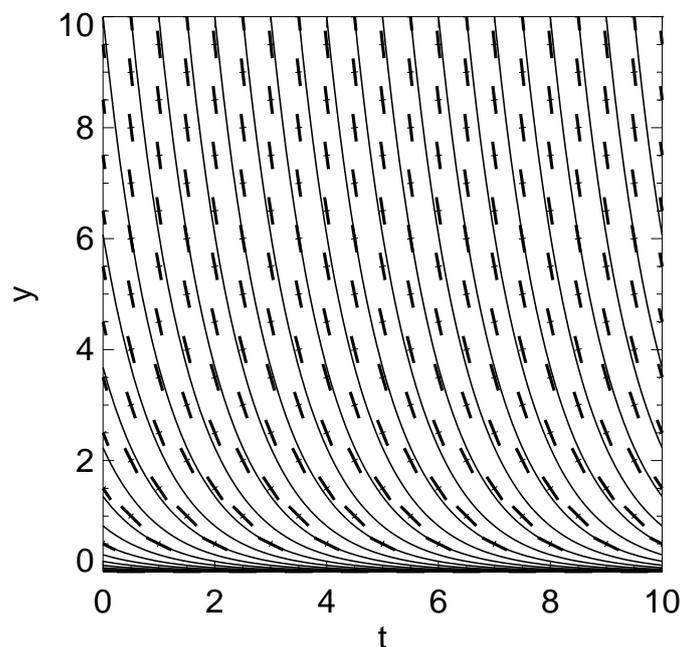
Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments



Méthodes de Runge-Kutta : logique

Runge-Kutta Methods : Rationale

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

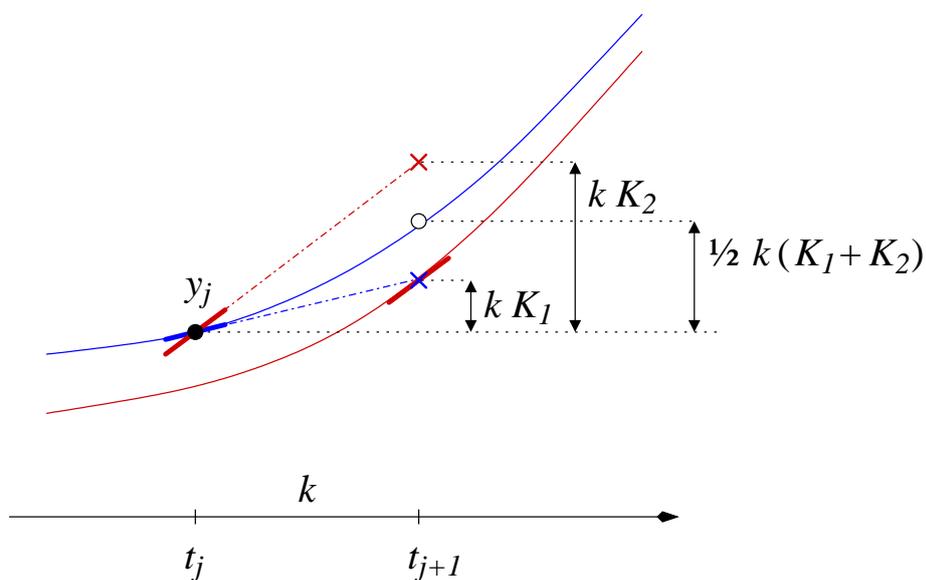
Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments



Méthodes de Runge-Kutta : logique

Runge-Kutta Methods : Rationale

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Problème donné :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \text{pour } t \in [0, T], \quad \text{avec } y(0) = y_0$$

Intégrer l'équation différentielle entre t_j et t_{j+1} ($t_{j+1} = t_j + k$) :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} y'(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt$$

Donc :

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt$$

Méthodes de Runge-Kutta : logique

Runge-Kutta Methods : Rationale

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Changement de variable $t = t_j + ck$, avec $k = t_{j+1} - t_j$

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = k \int_0^1 f(t_j + ck, y(t_j + ck)) dc$$

- Remplacer l'intégrale par une formule de quadrature

$$y(t_{j+1}) \simeq y(t_j) + k \sum_{m=1}^s b_m f(t_j + c_m k, y(t_j + c_m k))$$

où

- s est le nombre d'étapes par pas
- les c_m (à déterminer) définissent les noeuds où f est évalué
- les b_m (à déterminer) pondèrent ces valeurs évaluées
- $y(t_j + c_m k)$ inconnus \Rightarrow approximations

Méthodes de Runge-Kutta : logique

Runge-Kutta Methods : Rationale

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Pour les méthodes de Runge-Kutta explicites

- premier noeud
fixé en t_j , où f est connu $\Rightarrow c_1 = 0$

- noeuds $m = 2, \dots, s$

$y(t_j + c_m k)$ estimé à partir de $y(t_j)$, auquel une combinaison linéaire des $f(t_j + c_n k, y(t_j + c_n k))$ aux noeuds $n < m$ (déjà calculés) est ajoutée :

$$y(t_j + c_m k) \simeq y_j + k \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn} f(t_j + c_n k, y(t_j + c_n k))$$

- a_{mn}, b_n, c_m ($m, n = 1, \dots, s$) déterminés de manière à ce que l'approximation soit compatible avec le développement en série de Taylor de la solution exacte

Méthodes de Runge-Kutta explicites à deux étapes

Two-stage Explicit Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Pour la solution exacte :

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + ky'|_{t_j} + \frac{k^2}{2}y''|_{t_j} + O(k^3)$$

Or

$$\begin{aligned}y' &= f \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = f_t + f_y f\end{aligned}$$

Ainsi

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + kf|_{t_j} + \frac{k^2}{2}(f_t + f_y f)|_{t_j} + O(k^3)$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites à deux étapes

Two-stage Explicit Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Pour l'approximation au deuxième noeud :

$$\begin{aligned}f(t_j + c_2k, y(t_j + c_2k)) \\ &= f(t_j + c_2k, y(t_j) + a_{21}kf(t_j, y_j)) \\ &= f(t_j, y(t_j)) + c_2kf_t|_{t_j} + a_{21}k(f_y f)|_{t_j} + O(k^2)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y(t_j) + kb_1f(t_j, y(t_j)) + kb_2f(t_j + c_2k, y(t_j + c_2k)) \\ &= y(t_j) + k(b_1 + b_2)f|_{t_j} \\ &\quad + b_2c_2k^2f_t|_{t_j} + b_2a_{21}k^2(f_y f)|_{t_j} + O(k^3)\end{aligned}$$

à comparer avec

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + kf|_{t_j} + \frac{k^2}{2}f_t|_{t_j} + \frac{k^2}{2}(f_y f)|_{t_j} + O(k^3)$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites à deux étapes

Two-stage Explicit Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Conditions suffisantes de compatibilité :

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2} \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$$

Choix particuliers :

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{2}{3}$$

$$c_2 = 1$$

$c_1 = 0$	$b_1 = 0$	$c_1 = 0$	$b_1 = \frac{1}{4}$	$c_1 = 0$	$b_1 = \frac{1}{2}$
$c_2 = \frac{1}{2}$	$b_2 = 1$	$c_2 = \frac{2}{3}$	$b_2 = \frac{3}{4}$	$c_2 = 1$	$b_2 = \frac{1}{2}$
$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0$	$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0$	$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0$
$a_{21} = \frac{1}{2}$	$a_{22} = 0$	$a_{21} = \frac{2}{3}$	$a_{22} = 0$	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 0$

Toutes d'ordre 2

Méthodes de Runge-Kutta

Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Une méthode de Runge-Kutta à s étapes s'écrit sous la forme

$$y_{j+1} = y_j + k\Phi(t_j, y_j, k; f).$$

$\Phi(t_j, y_j, k; f)$ est appelée *fonction d'incrément* et est définie par

$$\Phi(t_j, y_j, k; f) = \sum_{m=1}^s b_m K_m$$

$$K_m = f(t_j + c_m k, y_j + k \sum_{n=1}^s a_{mn} K_n), \quad m = 1, \dots, s.$$

Méthodes de Runge-Kutta

Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Une méthode de Runge-Kutta à s étapes est complètement définie par ses coefficients a_{mn} , b_m et c_m ($m, n = 1, \dots, s$). Ils sont communément présentés dans le tableau de *Butcher*

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	$a_{1,s-1}$	a_{1s}	ou	\mathbf{c}	\mathbf{A}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	$a_{2,s-1}$	a_{2s}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots			
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	\dots	$a_{s-1,s-1}$	$a_{s-1,s}$			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	a_{ss}			\mathbf{b}^T
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s			

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

Runge-Kutta Methods : Examples

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthode de Heun :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(t_j, y_j) \\
 K_2 &= f(t_j + k, y_j + kK_1) \\
 \Phi(t_j, y_j, k; f) &= \frac{1}{2}(K_1 + K_2)
 \end{aligned}$$

0	·	·
1	1	·
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

Runge-Kutta Methods : Examples

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthode de Runge-Kutta (classique) :

$$K_1 = f(t_j, y_j)$$

$$K_2 = f(t_j + \frac{k}{2}, y_j + \frac{k}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(t_j + \frac{k}{2}, y_j + \frac{k}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(t_j + k, y_j + kK_3)$$

$$\Phi(t_j, y_j, k; f) = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

0	·	·	·	·
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	·	·	·
$\frac{1}{2}$	·	$\frac{1}{2}$	·	·
1	·	·	1	·
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

Runge-Kutta Methods : Examples

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthode d'Euler explicite :

$$K_1 = f(t_j, y_j)$$

$$\Phi(t_j, y_j, k; f) = K_1$$

0	·
	1

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

Runge-Kutta Methods : Examples

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthode d'Euler implicite : une méthode de Runge-Kutta ?

$$y_{j+1} = y_j + kf(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$s = 1$$

$$\Phi(t_j, y_j, k; f) = K_1$$

$$K_1 = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$= f(t_j + k, y_j + kK_1)$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

Runge-Kutta Methods : Examples

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthode des trapèzes ?

$$y_{j+1} = y_j + k\left(\frac{1}{2}f(t_j, y_j) + \frac{1}{2}f(t_{j+1}, y_{j+1})\right)$$

$$s = 2$$

$$\Phi(t_j, y_j, k; f) = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2$$

$$K_1 = f(t_j, y_j)$$

$$K_2 = f(t_{j+1}, y_{j+1})$$

$$= f\left(t_j + k, y_j + k\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2\right)\right)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Méthodes de Runge-Kutta : types

Runge-Kutta Methods : Types

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Méthodes explicites (ERK – *Explicit Runge-Kutta*)
 - tableau (a_{mn}) strictement triangulaire inférieur
 - tous les $K_m = y(t_j + c_m k)$ peuvent être calculés de manière explicite, les uns après les autres
- Méthodes implicites (IRK – *Implicit Runge-Kutta*)
 - $a_{mn} \neq 0$, pour $m \leq n$
 - les K_m doivent évt. être calculés tous ensemble
 - cas particulier : DIRK (*Diagonally Implicit Runge-Kutta*)
 - méthodes où $a_{mn} = 0$ pour $m < n$
 - ⇒ (a_{mn}) triangulaire inférieur
 - ⇒ les K_m peuvent encore être calculés à tour de rôle

$$K_m = y_j + k \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn} f(t_j + c_n k, K_n) + k a_{mm} f(t_j + c_m k, K_m)$$

Méthodes de Runge-Kutta : ordre et étapes

Runge-Kutta Methods : Order and Stages

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

■ ERK

Ordre vs. nombre minimal d'étapes requises pour ERK

Ordre	1	2	3	4	5	6	7	8
s_{\min}	1	2	3	4	6	7	9	11

■ IRK

Théorème (Butcher)

Pour tout entier $s \geq 1$, il existe une et une seule méthode IRK d'ordre $2s$ à s étapes.

Méthodes de Runge-Kutta Gauss-Legendre

Gauss-Legendre Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

La seule méthode IRK à s étapes d'ordre $2s$ est la méthode de Gauss-Legendre, obtenue à partir des formules de quadrature de Gauss-Legendre par un procédé de *collocation* :

- déterminer un polynôme $u(t)$ sur $[t_j, t_{j+1}]$, dépendant de s paramètres *distincts* c_1, \dots, c_s (dits *paramètres de collocation*), tel que, pour $m = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned}u(t_j) &= y_j \\ u'(t_j + c_m k) &= f(t_j + c_m k, u(t_j + c_m k)).\end{aligned}$$

- adopter $y_{n+1} = u(t_{n+1})$

Méthodes de Runge-Kutta Gauss-Legendre

Gauss-Legendre Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Pour Runge-Kutta Gauss-Legendre :

- u déterminé à partir du polynôme de Legendre d'ordre $2s$, défini par convention pour $c \in]-1, 1[$, transformé ici de manière linéaire pour $c \in]0, 1[$ et noté $q(c)$
- les c_m sont les racines (*distinctes une à une!*) de $q(c)$:

$$q(c) = \prod_{m=1}^s (c - c_m)$$

- en définissant $q_r(c) = q(c)/(c - c_r)$, on a, pour $m, n = 1, \dots, s$:

$$b_m = \int_0^1 \frac{q_m(c)}{q_m(c_m)} dc \quad \text{et} \quad a_{mn} = \int_0^{c_m} \frac{q_n(c)}{q_n(c_n)} dc.$$

RK Gauss-Legendre

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

RK-GL2

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

RK-GL6

RK-GL4

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Stabilité absolue et A-stabilité en général

Absolute Stability and A-stability in General

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

■ Problème test

$$y'(t) = \lambda y, \quad y(0) = 1 \quad t > 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

■ Solution : $y(t) = e^{\lambda t}$

■ $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0$ si $\Re(\lambda) < 0$

Stabilité absolue et A-stabilité en général

Absolute Stability and A-stability in General

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Définition

Une méthode numérique pour l'approximation du problème test est absolument stable si

$$|y_j| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t_j \rightarrow +\infty$$

La région de stabilité absolue est le sous-ensemble du plan complexe

$$\mathcal{A} = \{z = k\lambda \in \mathbb{C} \mid \lim_{t_j \rightarrow +\infty} |y_j| = 0\}$$

Une méthode est A-stable si $\mathbb{C}^- \subseteq \mathcal{A}$, où

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}.$$

A-stabilité des méthodes de Runge-Kutta

A-stability of Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Méthode de Runge-Kutta appliquée au problème test

$$y_{j+1} = y_j + k \sum_{m=1}^s b_m K_m, \quad K_m = \lambda \left(y_j + k \sum_{n=1}^s a_{mn} K_n \right)$$

- Avec $\mathbf{K} = [K_1, \dots, K_s]^T$ et $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$, cette récurrence peut être ré-écrite sous forme vectorielle

$$y_{j+1} = y_j + k \mathbf{b}^T \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \lambda (y_j \mathbf{1} + k \mathbf{A} \mathbf{K}).$$

- Ainsi, $\mathbf{K} = \lambda (I - k\lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1} y_j$

A-stabilité des méthodes de Runge-Kutta

A-stability of Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Une itération d'une méthode de Runge-Kutta peut donc se mettre sous la forme

$$y_{j+1} = (1 + k\lambda \mathbf{b}^T (I - k\lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}) y_j = R(k\lambda) y_j$$

- $R(k\lambda)$ est appelé *fonction de stabilité*
- Méthode absolument stable si $|R(k\lambda)| < 1$
- Région de stabilité d'une méthode de Runge-Kutta

$$\mathcal{A} = \{z = k\lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } |R(k\lambda)| < 1\}$$

A-stabilité des méthodes ERK

A-stability of ERK Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

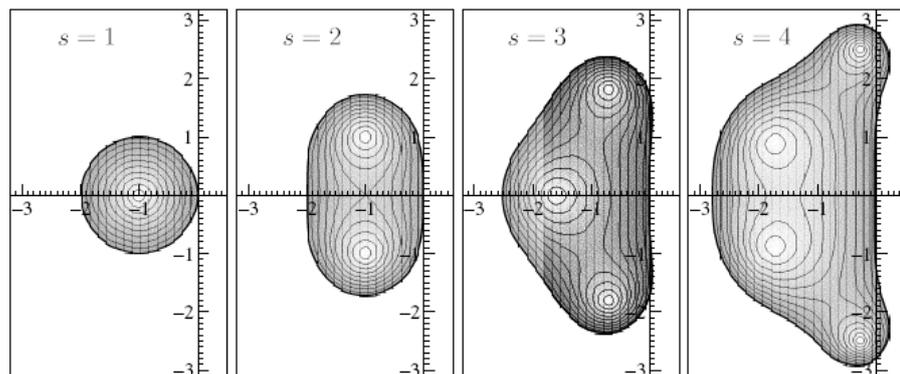
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Pour une méthode ERK à s étapes

- $R(z)$ est un polynôme
 \Rightarrow aucune méthode ERK ne peut être A-stable
- pour $s \leq 4$: $R(z) = 1 + z + \dots + \frac{1}{s!} z^s$



Source : <http://www.unige.ch/~hairer/poly/chap3.pdf>

A-stabilité des méthodes IRK

A-stabilité of IRK Methods

Méthodes
numériques et
éléments de
programma-
tion

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

Pour les méthodes IRK

- Euler implicite :

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - 1| > 1\}$$

- toutes les méthodes IRK ne sont pas A-stables
- toutes les méthodes de Runge-Kutta Gauss-Legendre sont A-stables

Problèmes à résoudre

Homework

Méthodes
numériques et
éléments de
programma-
tion

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

- 1 Méthodes d'Adams-Bashforth et d'Adams-Moulton pour $q = 2$ (voir tableaux du premier cours).
 - Combien de pas ces méthodes comprennent-elles ?
 - Établissez les polynômes caractéristiques pour chacune de ces deux méthodes. Déterminer leurs ordres respectifs à l'aide de ces polynômes.
- 2 Établissez les expressions des polynômes ρ des méthodes d'Adams en général. Est-ce qu'elles sont toutes convergentes ?
- 3 La méthode saute-mouton est convergente, alors qu'elle n'est pas A-stable. Comment expliquez-vous cette contradiction (apparente) ?

Délai : 29 septembre 2014

Contrôle du pas de discrétisation

Discretisation Step Control

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Adaptation du pas de discrétisation k en fonction de l'erreur locale
- Deux types de stratégies (suivant le pas ou l'ordre)
 - comparer les erreurs respectives pour deux méthodes différentes de même ordre p et de constantes d'erreur connues
→ applicable avec méthodes multi-pas
 - avec une même méthode, comparer les erreurs pour deux pas différents (généralement k et $2k$)
→ applicable avec méthodes RK
 - comparer les erreurs respectives pour deux méthodes d'ordres p et q différents (généralement $q = p + 1$)
→ applicable avec méthodes RK et multi-pas

Contrôle du pas de discrétisation (multi-pas)

Discretisation Step Control (Multi-step)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Soient deux méthodes multi-pas convergentes de même ordre p , de polynômes caractéristiques ρ, σ et $\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}$ resp. :

$$\begin{cases} \rho(w) - \sigma(w) \ln(w) = c(w-1)^{p+1} + O(|w-1|)^{p+2}, & w \rightarrow 1 \\ \tilde{\rho}(w) - \tilde{\sigma}(w) \ln(w) = \tilde{c}(w-1)^{p+1} + O(|w-1|)^{p+2}, & w \rightarrow 1 \end{cases}$$

On peut montrer que l'erreur locale est telle que

$$\begin{cases} y(t_{j+1}) - y_{j+1} = c k^{p+1} y^{(p+1)}(t_{j+1}) + O(k^{p+2}) \\ y(t_{j+1}) - \tilde{y}_{j+1} = \tilde{c} k^{p+1} y^{(p+1)}(t_{j+1}) + O(k^{p+2}) \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième de ces relations de la première, et en négligeant les termes $O(k^{p+2})$, nous pouvons estimer que

$$k^{p+1} y^{(p+1)}(t_{j+1}) \simeq \frac{\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}}{c - \tilde{c}}$$

Contrôle du pas de discrétisation (multi-pas)

Discretisation Step Control (Multi-step)

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

Il en résulte que

$$y(t_{j+1}) - y_{j+1} \simeq \frac{c}{c - \tilde{c}} (\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1})$$

Estimateur pour l'erreur locale

$$\kappa = \left| \frac{c}{c - \tilde{c}} \right| |\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}|$$

Critère de contrôle du pas :

$$\kappa < k\delta$$

Motivation : Erreur par unité de pas doit rester en-dessous d'une certaine limite δ fixée préalablement.

Contrôle du pas de discrétisation (multi-pas)

Discretisation Step Control (Multi-step)

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

Réalisation pratique

- $\kappa > k\delta$: rejeter y_{j+1} calculé, diminuer le pas de moitié, calculer des nouvelles valeurs initiales par interpolation et répéter
- $k\delta/10 < \kappa \leq k\delta$: continuer sans modification
- $\kappa \leq k\delta/10$: accepter y_{j+1} calculé, doubler le pas, ajuster les valeurs initiales (en supprimer une sur deux et compléter par des plus anciennes)

Inconvénient : exige de garder en mémoire au moins $2s - 1$ valeurs précédentes

Contrôle du pas de discrétisation : doublement

Discretisation Step Control : Step Doubling

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Progression d'une méthode de Runge-Kutta

$$y_{j+1} = y_j + k\Phi(t_j, y_j, k)$$

- Erreur de discrétisation locale d'une méthode d'ordre p

$$y(t_{j+1}) - y_{j+1} = c(y(t_j))k^{p+1} + O(k^{p+2})$$

- Deux pas successifs de t_{j-1} à t_j et t_j à t_{j+1} mènent de $y(t_{j-1})$ (exact) à $y_j \simeq y(t_j)$ et $y_{j+1} \simeq y(t_{j+1})$ (approximations); un seul pas de t_{j-1} à t_{j+1} mène de $y(t_{j-1})$ à $y_{j+1}^* \simeq y(t_{j+1})$

$$\begin{aligned}y_j &= y(t_{j-1}) + k\Phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), k) \\y_{j+1} &= y_j + k\Phi(t_j, y_j, k) \\y_{j+1}^* &= y(t_{j-1}) + k\Phi(t_j, y(t_j), k)\end{aligned}$$

Contrôle du pas de discrétisation : doublement

Discretisation Step Control : Step Doubling

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Problème : évaluer le terme principal de $y(t_{j+1}) - y_{j+1}$
Il vient

$$\begin{aligned}y(t_{j+1}) - y_{j+1} &= y(t_{j+1}) - y_{j+1}^* + y_{j+1}^* - y_{j+1} \\&= c(y(t_j))k^{p+1} + O(k^{p+2}) \\&\quad + y(t_j) + k\Phi(t_j, y(t_j), k) - y_j - k\Phi(t_j, y_j, k) \\&= (c(y(t_{j-1})) + k \frac{dc}{dy} \Big|_{y(t_{j-1})} y'(t_{j-1}) + O(k^2))k^{p+1} \\&\quad + c(y(t_{j-1}))k^{p+1} + O(k^{p+2}) + kO(y(t_j) - y_j) \\&= 2c(y(t_{j-1}))k^{p+1} + O(k^{p+2}) + kO(k^{p+1})\end{aligned}$$

Contrôle du pas de discrétisation : doublement

Discretisation Step Control : Step Doubling

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Ainsi, pour deux pas successifs

$$y(t_{j+1}) - y_{j+1} = 2c(y(t_{j-1}))k^{p+1} + O(k^{p+2}) \quad (*)$$

Pour un pas de longueur $2k$ de t_{j-1} vers t_{j+1} , menant de $y_{j-1} = y(t_{j-1})$ vers $\tilde{y}_{j+1} \simeq y(t_{j+1})$:

$$y(t_{j+1}) - \tilde{y}_{j+1} = c(y(t_{j-1}))(2k)^{p+1} + O(k^{p+2}),$$

que nous pouvons réorganiser comme suit

$$y(t_{j+1}) - \tilde{y}_{j+1} = 2^p \times 2c(y(t_{j-1}))k^{p+1} + O(k^{p+2}). \quad (**)$$

En retranchant (**) de (*), nous trouvons que

$$\kappa = |2c(y(t_{j-1}))k^{p+1}| = \simeq \frac{|\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}|}{2^p - 1}$$

Contrôle du pas de discrétisation : adaptation

Discretisation Step Control : Step Adaptation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Critère d'ajustement : comparer $\kappa = \kappa(k) = \frac{|\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}|}{2^p - 1}$ à $k\delta$, où δ est une tolérance par unité de pas pré-définie
 - si $\kappa(k) > k\delta$: rejeter y_{j+1} et re-calculer une nouvelle estimation avec un pas réduit
 - si $\kappa(k) < k\delta$: accepter y_{j+1} et augmenter le pas pour l'itération suivante
- Pour deux longueurs de pas différentes, k et k_c , les erreurs respectives affectant y_{j+1} sont telles que

$$\frac{\kappa(k_c)}{\kappa(k)} \simeq \left(\frac{k_c}{k}\right)^{p+1}$$

Contrôle du pas de discrétisation : adaptation

Discretisation Step Control : Step Adaptation

Méthodes
numériques et
éléments de
programma-
tion

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

- Pour avoir $\kappa(k_c) < k_c \delta$ il suffirait donc que

$$\kappa(k_c) \simeq \kappa(k) \left(\frac{k_c}{k} \right)^{p+1} < k_c \delta$$

c'est-à-dire que

$$k_c < k \left(\frac{k \delta}{\kappa(k)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

- En pratique, un facteur de sécurité de 0.8 est appliqué à cette borne et on demande que $k/2 < k_c < 2k$

Contrôle du pas de discrétisation : adaptation

Discretisation Step Control : Step Adaptation

Méthodes
numériques et
éléments de
programma-
tion

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

- Procédure d'ajustement permet un contrôle du pas très fin avec les méthodes de Runge-Kutta.
- Désavantage : la validation d'un pas demande presque autant de d'opérations que trois pas directs.
- Critère d'ajustement : quelques remarques
 - on peut aussi adopter une *tolérance absolue* au lieu d'une *tolérance par unité de pas*, et donc comparer κ à δ au lieu de $k\delta$, et de baser l'ajustement du pas sur $\kappa(k_c) < \delta$;
 - la facteur de sécurité 0.8 est parfois porté à 0.9 ;
 - la gamme de pas acceptés au cours d'une modification est parfois étendue à l'intervalle $]k/5, 5k[$.

Contrôle du pas de discrétisation : ordre

Discretisation Step Control : Order

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Pour deux méthodes d'ordres p et $\tilde{p} = p + 1$, les erreurs de discrétisation locales sont

$$\begin{cases} y(t_{j+1}) - y_{j+1} &= c(y(t_j))k^{p+1} + O(k^{p+2}) \\ y(t_{j+1}) - \tilde{y}_{j+1} &= O(k^{p+2}) \end{cases}$$

- L'erreur qui affecte y_{j+1} est donc

$$\kappa = |c(y(t_j))k^{p+1}| = \simeq |\tilde{y}_{j+1} - y_{j+1}|$$

- Ajustement de k_c comme pour «Doublement de pas»
- Méthode de choix pour les méthodes de Runge-Kutta *emboîtées* : avec un même tableau (a_{mn}) on dérive deux méthodes différentes en utilisant des b_m différents

Méthodes de Runge-Kutta emboîtées

Embedding Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

RK-Fehlberg 2(3) — 3 étapes

0	·	·	·
1	1	·	·
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	·
$p = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$p = 3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Méthodes de Runge-Kutta emboîtées

Embedding Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement

Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

RK-Fehlberg 4(5) — 6 étapes

0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$	0	.	.	.
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$.	.
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$\frac{3544}{2565}$	$-\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$.
$p = 4$	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
$p = 5$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12855}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

A noter que les ordres des deux méthodes sont inférieures à 6, le nombre d'étapes.

Méthodes de Runge-Kutta emboîtées

Embedding Runge-Kutta Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables Méth. multi-pas Doublement

Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Dormand-Prince 5(4) — 7 étapes

0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{55}$	$-\frac{56}{15}$	0
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$.	.	.
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$.	.
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$.
$p = 4$	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
$p = 5$	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

Méthodes de Runge-Kutta emboîtées

Embedding Runge-Kutta Methods

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

- Autres : RK–Dormand-Prince 8(6), RK–Verner 5(4), ...
- Notation des tableaux de Butcher étendus pour les méthodes de Runge-Kutta emboîtées pas standardisée.
- Généralement : la première ligne de coefficients b_m correspond à la méthode d'ordre inférieur.
- La dénomination de la méthode précise les rôles de chaque méthode individuelle : pour *Méthode* $p_1(p_2)$,
 - la méthode d'ordre p_1 fournit l'approximation à adopter en fin de pas,
 - la méthode d'ordre p_2 n'est utilisée que pour le monitoring de l'erreur,
 - le plus petit des p_1, p_2 est utilisé à la place de p pour l'ajustement du pas.

Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

Exemple :

$$\begin{aligned}y_1' &= -101y_1 - 99y_2, & y_1(0) &= 2 \\y_2' &= -99y_1 - 101y_2, & y_2(0) &= 0\end{aligned}$$

Solution analytique :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{-200t} + e^{-2t} \\y_2(t) &= e^{-200t} - e^{-2t}\end{aligned}$$

Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Euler explicite :

$$y_{1,j+1} = y_{1,j} + k(-101y_{1,j} - 99y_{2,j})$$

$$y_{2,j+1} = y_{2,j} + k(-99y_{1,j} - 101y_{2,j})$$

- Dans cet exemple particulier, nous avons

$$y_{1,j} = (1 - 200k)^j + (1 - 2k)^j$$

$$y_{2,j} = (1 - 200k)^j - (1 - 2k)^j$$

- Pour des raisons de stabilité, il faut que $|1 - 200k| < 1$ et $|1 - 2k| < 1$ en permanence, c'est-à-dire, que $k < 0.01$, alors que pour $t > 0.05$, $e^{-200t}/e^{-2t} < \frac{1}{10000}$ rendant e^{-200t} négligeable.

Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Euler implicite :

$$y_{1,j+1} = y_{1,j} + k(-101y_{1,j+1} - 99y_{2,j+1})$$

$$y_{2,j+1} = y_{2,j} + k(-99y_{1,j+1} - 101y_{2,j+1})$$

- Dans cet exemple particulier, nous avons

$$y_{1,j} = (1 + 200k)^{-j} + (1 + 2k)^{-j}$$

$$y_{2,j} = (1 + 200k)^{-j} - (1 + 2k)^{-j}$$

- Stabilité garantie pour tout $k > 0$

Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

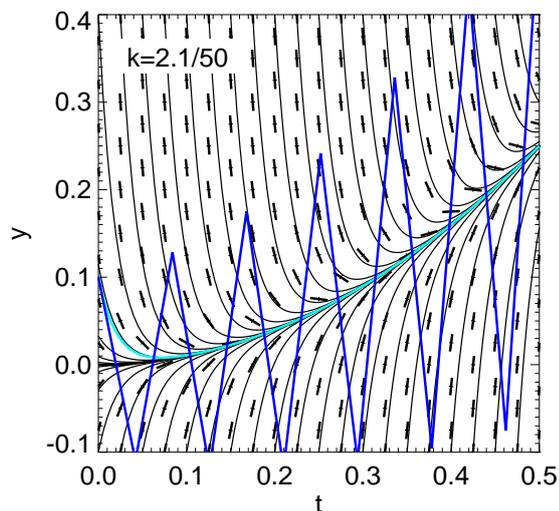
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

$$y' = 50(t^2 - y) + 2t, \quad y(0) = 0.1$$

Euler explicite



Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

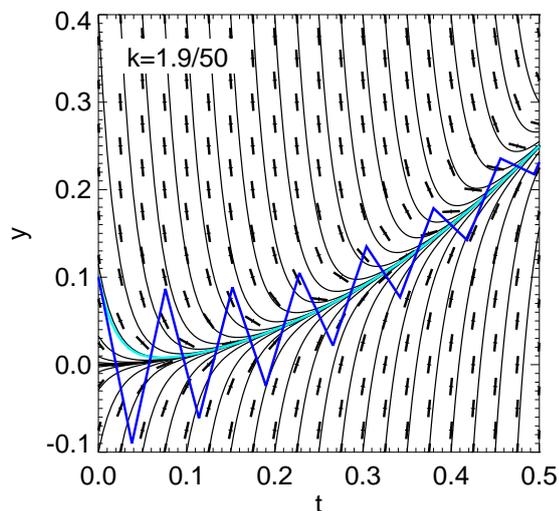
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

$$y' = 50(t^2 - y) + 2t, \quad y(0) = 0.1$$

Euler explicite



Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

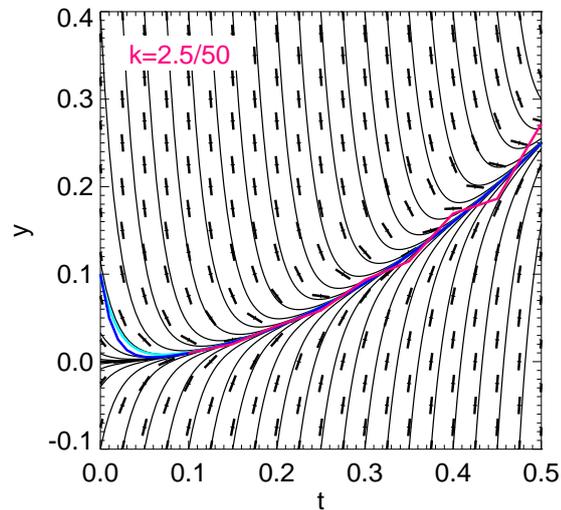
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

$$y' = 50(t^2 - y) + 2t, \quad y(0) = 0.1$$

Euler explicite



Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

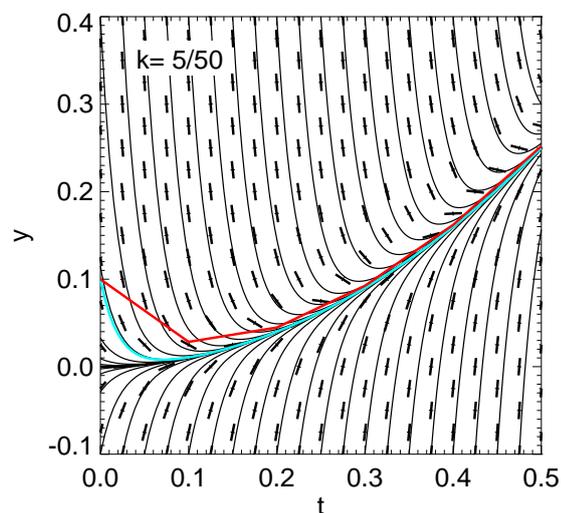
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

$$y' = 50(t^2 - y) + 2t, \quad y(0) = 0.1$$

Euler implicite



Problèmes raides (stiff)

Stiff Problems

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

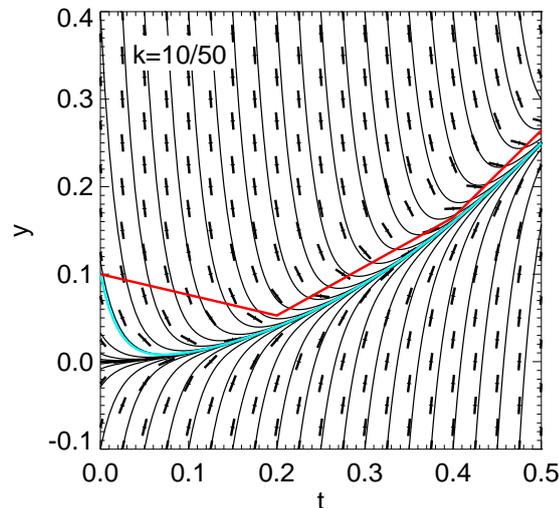
Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

$$y' = 50(t^2 - y) + 2t, \quad y(0) = 0.1$$

Euler implicite



Problèmes raides (stiff) : méthodes BDF

Stiff Problems : BDF Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Méthodes implicites avantageuses
- Formules de différentiation rétrograde (*BDF* – Backward Differentiation Formulae)
 - Méthodes multi-pas
 - Basées sur des approximations de la dérivée de y au noeud t_{j+1}
 - Considérer le polynôme P de degré $q > 0$ passant par (t_{j+1}, y_{j+1}) et les q points $(t_j, y_j), \dots, (t_{j+1-q}, y_{j+1-q})$ qui le précèdent et tel que $P'(t_{j+1}) = y'_{j+1} = f_{j+1}$
 - Définition implicite

Problèmes raides (stiff) : méthodes BDF

Stiff Problems : BDF Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

Méthodes BDF

q Itération pour calculer y_{j+1}

1 $y_{j+1} - y_j = kf_{j+1}$ (Euler implicite)

2 $y_{j+1} - \frac{4}{3}y_j + \frac{1}{3}y_{j-1} = \frac{2}{3}kf_{j+1}$

3 $y_{j+1} - \frac{18}{11}y_j + \frac{9}{11}y_{j-1} - \frac{2}{11}y_{j-2} = \frac{6}{11}kf_{j+1}$

4 $y_{j+1} - \frac{48}{25}y_j + \frac{36}{25}y_{j-1} - \frac{16}{25}y_{j-2} + \frac{3}{25}y_{j-3} = \frac{12}{25}kf_{j+1}$

5 $y_{j+1} - \frac{300}{137}y_j + \frac{300}{137}y_{j-1} - \frac{200}{137}y_{j-2} + \frac{75}{137}y_{j-3} - \frac{12}{137}y_{j-4} = \frac{60}{137}kf_{j+1}$

6 $y_{j+1} - \frac{360}{147}y_j + \frac{450}{147}y_{j-1} - \frac{400}{147}y_{j-2} + \frac{225}{147}y_{j-3} - \frac{72}{147}y_{j-4} + \frac{10}{147}y_{j-5} = \frac{60}{147}kf_{j+1}$

Erreur de troncature (locale) : $O(k^q)$

Problèmes raides (stiff) : méthodes BDF

Stiff Problems : BDF Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- $\sigma(w) = \beta w^q, 1/\beta = \sum_{m=1}^q \frac{1}{m},$
 $\rho(w) = \beta \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} w^{q-m} (w-1)^m$
- A-stables et convergentes pour $q = 1$ et 2
- A(α)-stables et convergentes pour $q = 3, \dots, 6$
- non convergentes pour $q > 6$
- http://scholarpedia.org/article/Backward_Differentiation_Formulas

Problèmes raides (stiff) : méthodes BDF

Stiff Problems : BDF Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

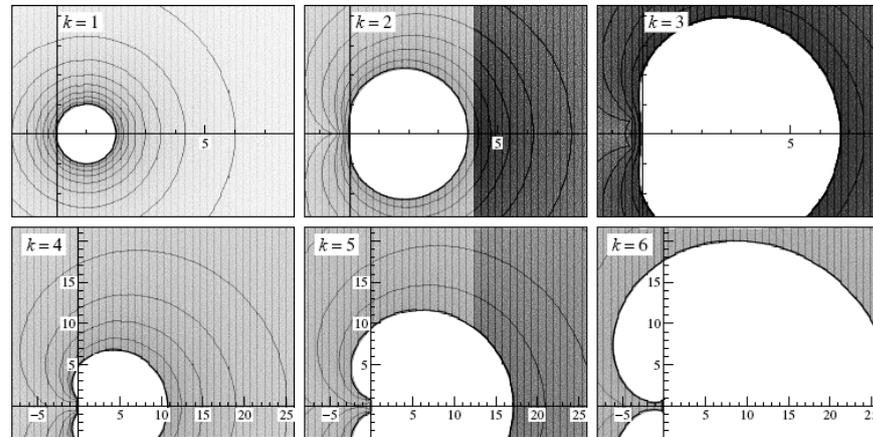
Méth. multi-pas

Doublement

Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments



Source : <http://www.unige.ch/~hairer/poly/chap3.pdf>

Stabilité : quelques compléments

Stability : a few complements

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité absolue et A-Stabilité

Pas variables

Méth. multi-pas

Doublement

Ordres p , $p+1$

Problèmes raides

Stabilité : compléments

- Stabilité absolue ou A-stabilité d'une méthode
 - pour l'équation linéaire $y' = \lambda y$
 - pour k fixé
 - y_j doit rester borné quand $t_j \rightarrow \infty$
- Stabilité ou zéro-stabilité d'une méthode
 - pour une E.D.O. bien posée quelconque
 - pour un intervalle d'intégration fixé (de longueur T)
 - définit le comportement de la méthode soumise à des perturbations suffisamment petites (p.ex., résultant d'erreurs d'arrondi)
 - il doit exister $k_0 > 0$ et $C > 0$ tels que les approximations z_j^k ($j = 0, \dots, T/k$) solutions de la méthode soumise à des perturbations δ_j suffisamment petites (si $|\delta_j| < \varepsilon, \forall \varepsilon \ll 1$) doivent pouvoir être ramenées arbitrairement proches des solutions y_j^k ($j = 0, \dots, T/k$) de la méthode non perturbée ($|z_j^k - y_j^k| < C\varepsilon, j = 0, \dots, T/k$), dès que $k < k_0$.

Stabilité : quelques compléments

Stability : a few complements

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Rappels

Runge-Kutta

Stabilité
absolue et
A-Stabilité

Pas variables
Méth. multi-pas
Doublement
Ordres $p, p+1$

Problèmes
raides

Stabilité :
compléments

Pour une méthode *consistante*

- zéro-stabilité \Leftrightarrow convergence
- stabilité absolue \Rightarrow zéro-stabilité
- il existe des méthodes zéro-stables non A-stables

Dans le cas d'une méthode multi-pas consistante

- condition de racine \Leftrightarrow zéro-stabilité