Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Institut d'Astrophysique et de Géophysique (Bât. B5c)
Bureau 0/13
eMail: Guy.Munhoven@ulg.ac.be
Tél.: 04-3669771
`http://www.astro.ulg.ac.be/~munhoven/fr/cours`

16 septembre 2014

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Plan du cours 2014-2015

Cours théoriques

16-09-2014 Méthodes numériques pour équations différentielles ordinaires : introduction

- méthodes simples
- notions théoriques
- méthodes multi-pas

22-09-2014 Méthodes de Runge-Kutta ; Contrôle du pas, équations raides

22-09-2014 Fortran 95 : bases

4–5 cours Fortran 95 : suite et compléments

Supports de cours
Textbooks

Mark H. Holmes. Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. Texts in Applied Mathematics, vol. 52, Springer New York, 2007.
URL : `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-68121-4`

Alfio Quarteroni, Riccardo Sacci et Fausto Saleri. Méthodes Numériques. Algorithmes, analyse et applications. Springer Milan, 2007.
URL : `http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-0496-2`

Les deux ouvrages sont disponibles sous forme électronique sur depuis le domaine `ulg.ac.be`, directement ou via proxy – vous devez être logués avec votre identifiant ULg.

Prérequis

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Prérequis

- Analyse mathématique et calcul matriciel
  - séries de Taylor, ...
  - transformées de Fourier
  - matrices, valeurs propres, ...
- Calcul numérique de base
- Systèmes linéaires
  - Elimination de Gauss, factorisation LR, ...
  - Méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, ...)
- Résolution d'équations non-linéaires (y inclus systèmes)
  - Point fixe, bisection, ...
  - Newton-Kantorovich
- Quadrature numérique

Equations différentielles ordinaires (E.D.O.)
Ordinary Differential Equations (ODE)

Equations différentielles : A quoi bon ?

- Beaucoup de phénomènes physiques décrits à l'aide d'équations différentielles

Pourquoi se soucier de méthodes numériques alors qu'il existe des solutions analytiques ?

- Equations différentielles à solution analytique sont des exceptions
- Solutions analytiques parfois peu utiles en pratique

Exemples d'E.D.O. : Désintégration radioactive
ODE Examples : Radioactive Decay

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

La loi de décroissance radioactive décrit l'évolution de la quantité de substance N(t) par

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

sachant que la quantité initiale vaut

$$N(t_0) = N_0.$$

Equation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre

Exemples d'E.D.O. : Deuxième loi de Newton
ODE Examples : Newton's Second Law

Nous avons

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

et

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

où la force F dépend éventuellement du temps t, de la position x et de la vitesse $v = \dot{x}$.

Equation différentielle ordinaire du second ordre

- *linéaire* si F est linéaire en x et $\dot{x}$
- *non-linéaire sinon*

Exemples d'E.D.O. : Deuxième loi de Newton
ODE Examples : Newton's Second Law

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorême de Dahlquist

Exemple : Oscillateur harmonique amorti

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

assorti des conditions initiales appropriées

Transformation d'E.D.O. d'ordre $m > 1$

Transformation of ODEs of order $m > 1$

L'équation de l'oscillateur harmonique amorti, du second ordre peut être reformulée en un système d'équations du premier ordre en définissant

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-cx_2 - kx_1) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_0 \\ x_2(t_0) &= v_0. \end{aligned}$$

Transformation d'E.D.O. d'ordre $m > 1$

Transformation of ODEs of order $m > 1$

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Sous forme vectorielle,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(-cx_2 - kx_1) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Généralisation triviale à une E.D.O. d'ordre } m \text{ quelconque}}$$

Transformation d'E.D.O. non-autonomes
Transformation of non autonomous ODEs

Une équation différentielle non-autonome (i.e., avec second membre dépendant explicitement de t)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

peut être reformulée sous forme autonome (i.e., à second membre indépendant de t)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

en définissant

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x_0} \\ t_0 \end{pmatrix}$$

Méthodes obtenues par différentiation numérique
Methods Obtained by Numerical Differentiation

Problème donné :

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour} \quad t \in [0, T]$$

avec

$$y(0) = y_0$$

Cinq étapes :

1. Choisir une grille de discrétisation

$$t_0 = 0, t_1, \ldots, t_M = T.$$

   Ici, nous adoptons une grille où les t_j sont équidistants :

$$t_j = jk, \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

2. Evaluer l'équation différentielle au point $t = t_j$:

$$y'(t_j) = f(y(t_j))$$

Cinq étapes (suite) :

3. Remplacer la dérivée y' par une formule aux différences finies, utilisant les valeurs de y à un ou plusieurs points de la grille, par exemple :

$$y'(t_j) = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{k} + \tau_j,$$

où

$$\tau_j = -\frac{k}{2} y''(\eta_j)$$

est l'*erreur de troncature*, et η_j un point de $[t_j, t_{j+1}]$

Méthodes obtenues par différentiation numérique
Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

3. Après insertion dans l'équation :

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) - k\tau_j + kf(y(t_j))$$

4. Laisser tomber l'erreur de troncature et remplacer $y(t_j)$ par y_j, etc. :

$$y_{j+1} = y_j + kf(y_j)$$

Méthode d'Euler explicite (progressive)

Méthodes obtenues par différentiation numérique
Methods Obtained by Numerical Differentiation

Cinq étapes (suite) :

4. A noter que :

$$\lim_{k\to 0} \tau_j = 0$$

Méthode *consistante*

5. Vérifier la stabilité :
   - y_0 connue exactement
   - y_1 seulement approximation de $y(t_1)$
   - différence entre y_j et $y(t_j)$ affectée par toutes les différences en $y_1, \ldots, y_{j-1}$
   - Condition de *stabilité* : les erreurs successives ne doivent pas s'amplifier

A-stabilité d'une solution numérique d'E.D.O.
A-Stability of a numerical ODE solution

Il existe différentes manières d'exprimer quantitativement le concept de stabilité.
L'*A-stabilité* utilise une *équation test* (décroissance radioactive)

$$y' = -\lambda y, \quad (\lambda > 0), \quad \text{et} \quad y(0) = y_0,$$

qui admet comme solution $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t)$.
Pour cette équation, la méthode d'Euler explicite fournit

$$y_{j+1} = (1 - \lambda k) y_j$$

et nous avonc donc :

$$y_j = (1 - \lambda k)^j y_0$$

A-stabilité d'une solution numérique d'E.D.O.

A-Stability of a numerical ODE solution

La solution de l'équation test décroît vers 0 pour $t \to +\infty$, ce qui inspire la définition *tentative et préliminaire* suivante :

Définition

Une méthode est dite A-stable si son application à l'équation

$$y' = -\lambda y, \quad (\lambda > 0), \quad \textit{et} \quad y(0) = y_0$$

fournit une solution qui reste bornée, quelque soient les valeurs de k et de λ. Si la solution ne reste bornée que pour des k suffisamment petits, alors la méthode est qualifiée de conditionnellement A-stable, sinon elle est instable.

A-stabilité de la méthode d'Euler explicite

A-Stability of the Forward Euler Method

La méthode d'Euler explicite est A-stable pour

$$|1 - \lambda k| \leq 1,$$

c'est-à-dire pour

$$-1 \leq 1 - \lambda k \leq 1.$$

Il faut donc que (l'inégalité à droite étant réalisée)

$$-1 \leq 1 - \lambda k,$$

c'est-à-dire, que

$$k \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Ainsi, la méthode d'Euler est conditionnellement A-stable.

Méthodes obtenues par différentiation numérique
Methods Obtained by Numerical Differentiation

Autres méthodes : Méthode d'Euler implicite

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) - k\tau_j + kf(y(t_{j+1}))$$

où $\tau_j = \frac{k}{2}y''(\eta_j)$, pour un $\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$

- implicite en y_{j+1} : évt. difficile à résoudre
- A-stabilité :

$$y_{j+1} = \frac{1}{1+\lambda k} y_j \quad \text{et donc} \quad y_j = \frac{y_0}{(1+\lambda k)^j}.$$

y_j tend vers 0 quels que soient λ et k positifs.

La méthode d'Euler implicite est A-stable.

Méthodes obtenues par différentiation numérique
Methods Obtained by Numerical Differentiation

Autres méthodes : Centrée explicite (saute-mouton, *leap-frog*, *explicit mid-point*)

$$y(t_{j+1}) = y(t_{j-1}) - 2k\tau_j + 2kf(y(t_j))$$

où $\tau_j = -\frac{k^2}{6}y'''(\eta_j)$, pour un $\eta_j \in [t_{j-1}, t_{j+1}]$

- explicite, à deux pas
- τ_j d'ordre 2 : méthode meilleure ?

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Autres méthodes : saute-mouton

- A-stabilité :

$$y_{j+1} = y_{j-1} - 2\lambda k y_j$$

Rechercher une solution de la forme $y_j = s^j$:

$$s^2 + 2\lambda ks - 1 = 0.$$

Les solutions sont $s_{\oplus/\ominus} = -\lambda k \pm \sqrt{1+\lambda^2 k^2}$.
La solution générale y_j s'écrit alors

$$y_j = c_\ominus s_\ominus^j + c_\oplus s_\oplus^j,$$

$c_\oplus$ et $c_\ominus$ étant deux constantes.

Comme $s_\ominus < -1$ pour $\lambda k > 0$, $|s_\ominus| > 1$: la méthode saute-mouton n'est pas A-stable.

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Problème donné :

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour} \quad t \in [0, T], \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

Cinq étapes :

1. Choisir une grille de discrétisation
2. Intégrer l'équation différentielle entre deux points de la grille, p.ex., t_j et t_{j+1} :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} y'(t_j)\,dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t))\,dt.$$

Donc :

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t))\,dt.$$

Cinq étapes (suite) :

3. Remplacer l'intégrale de f par une formule aux différences finies, comme par exemple, la formule des trapèzes

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \frac{k}{2}[f(y(t_{j+1})) + f(y(t_j))] + O(k^3)$$

$O(k^3)$ est une fonction telle que $\lim_{k\to 0}(O(k^3)/k^3)$ est finie.

Méthodes obtenues par quadrature numérique
Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

4. Laisser tomber le terme $O(k^3)$ et remplacer $y(t_j)$ par y_j, etc. :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j)$$

Méthode des trapèzes, implicite

5. A-stabilité : à déterminer comme exercice

Délai : 22 septembre 2014

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Autres procédures pour quadrature numérique :

Approximation de $f(y(t))$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ par un polynôme de degré $q \geq 0$ passant par

- $(t_{j-q}, f(y_{j-q})), \ldots, (t_j, f(y_j))$

  méthode d'Adams-Bashforth (explicite)

- $(t_{j-(q-1)}, f(y_{j-(q-1)})), \ldots, (t_{j+1}, f(y_{j+1}))$

  méthode d'Adams-Moulton (implicite)

Méthode d'Adams-Bashforth $(q = 2)$

Adams-Bashforth Method $(q = 2)$

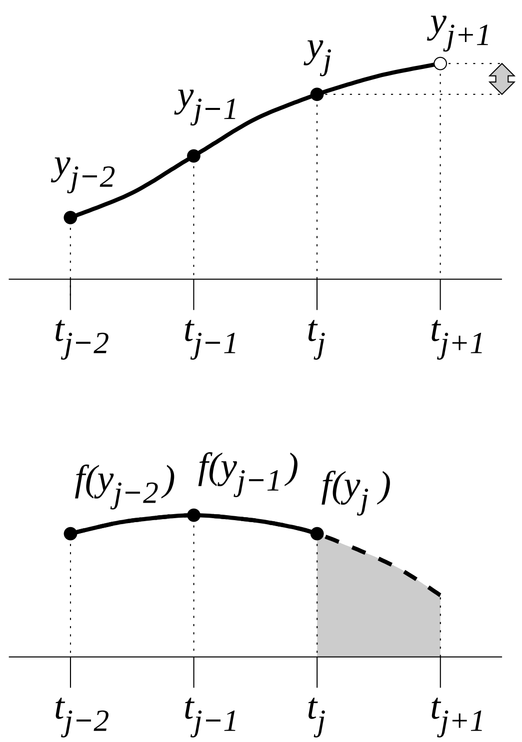
Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist



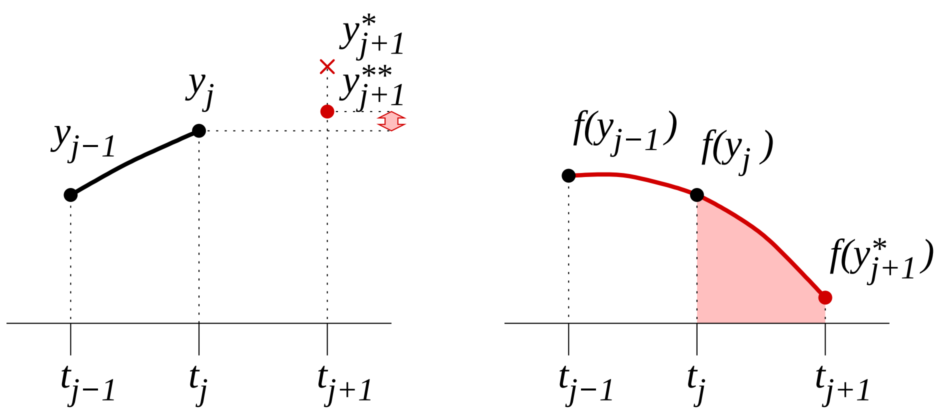
Méthodes d'Adams-Bashforth
Adams-Bashforth Method

Méthodes d'Adams-Bashforth

q	Itération pour calculer y_{j+1}
0	$y_{j+1} = y_j + kf_j$ *(Euler explicite)*
1	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(3f_j - f_{j-1})$
2	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{12}(23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2})$
3	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{24}(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3})$
4	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{720}(1901f_j - 2774f_{j-1} + 2616f_{j-2} - 1274f_{j-3} + 251f_{j-4})$
5	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{1440}(4277f_j - 7923f_{j-1} + 9982f_{j-2} - 7298f_{j-3} + 2877f_{j-4} - 475f_{j-5})$

Erreur de troncature (locale) : $O(k^{q+1})$

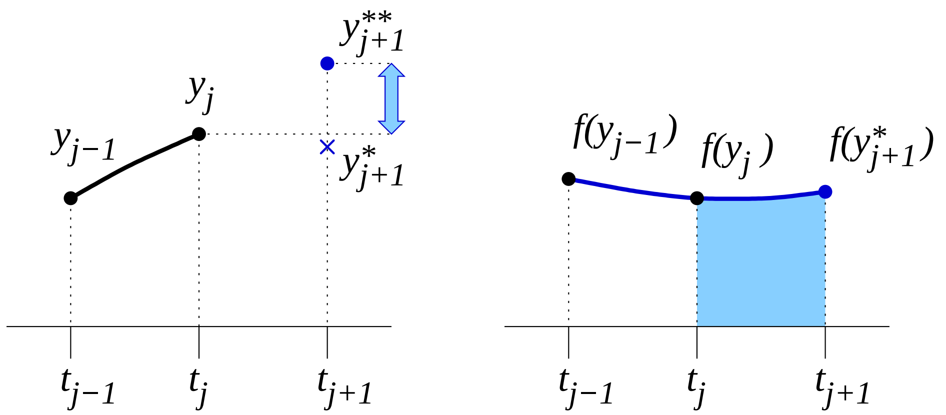
Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)
Adams-Moulton Method ($q = 2$)



- y^*_{j+1} – valeur test pour itérer
- y^{**}_{j+1} – valeur calculée à partir de $f(y^*_{j+1})$

Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)

Adams-Moulton Method ($q = 2$)



- y^*_{j+1} – valeur test pour itérer
- y^{**}_{j+1} – valeur calculée à partir de $f(y^*_{j+1})$

Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)

Adams-Moulton Method ($q = 2$)

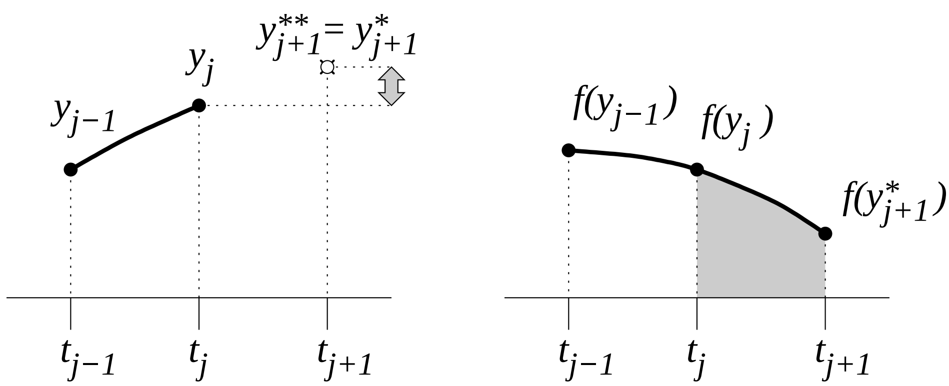
Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist



- y^*_{j+1} – valeur test pour itérer
- y^{**}_{j+1} – valeur calculée à partir de $f(y^*_{j+1})$

Méthodes d'Adams-Moulton
Adams-Moulton Methods

Méthodes d'Adams-Moulton

q	Itération pour calculer y_{j+1}
0	$y_{j+1} = y_j + kf_{j+1}$ *(Euler implicite)*
1	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j)$ *(Trapèzes)*
2	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{12}(5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1})$
3	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{24}(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2})$
4	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{720}(251f_{j+1} + 646f_j - 264f_{j-1} + 106f_{j-2} - 19f_{j-3})$
5	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{1440}(475f_{j+1} + 1427f_j - 798f_{j-1} + 482f_{j-2} - 173f_{j-3} + 27f_{j-4})$

Erreur de troncature (locale) : $O(k^{q+1})$

Méthodes obtenues par quadrature numérique
Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Variations sur le même thème :
Partir de

$$y(t_{j+1}) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(y(t))\,dt$$

et utiliser un polynôme de degré $q \geq 0$ passant par

- $(t_{j-q}, f(y_{j-q})), \ldots, (t_j, f(y_j))$

  méthode de Nyström (explicite)

  Cas particulier :
  $q = 0 \to$ méthode saute-mouton (*leap-frog, midpoint rule*)
- $(t_{j-(q-1)}, f(y_{j-(q-1)})), \ldots, (t_{j+1}, f(y_{j+1}))$

  méthode de Milne (implicite)

Méthodes d'Adams : Inconvénients

Adams Methods : Disadvantages

Méthodes d'Adams :

- ⊖ exigent q valeurs "initiales" qu'il faut déterminer à l'aide
  - d'une série de Taylor en $t = t_0$ (dérivées de f requises)
  - d'une méthode d'ordre inférieur (danger d'amplification de l'erreur globale)
  - d'une méthode Runge-Kutta de même ordre (plus tard)
- ⊖ Adams-Moulton implicite : f non-linéaire demande méthode itérative pour déterminer y_{j+1}
  - utiliser Adams-Bashforth de même ordre, ou d'un ordre inférieur pour initialiser l'itération

Adams-Bashforth ⇒ prédicteur
Adams-Moulton ⇒ correcteur

Théorie : approfondissement

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Quelques notions théoriques

- Erreurs inhérentes à une méthode
- Consistance
- Ordre de convergence
- Convergence d'une méthode

Cadre numérique pour la résolution d'une E.D.O.
Numerical Framework for Solving an ODE

Pour une E.D.O. donnée (problème à valeur initiale—*initial value problem*),

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour } t \in [t_0, t_0 + T], \quad \text{avec } y(t_0) = y_0,$$

nous considérons

- dans l'intervalle d'intégration (fixe) $[t_0, t_0 + T]$, une suite de points $\{t_{j,k} = t_0 + jk | j = 0, \ldots N_k\}$, appelés *noeuds*, avec $N_k = \lfloor T/k \rfloor$ (partie entière de T/k)
- une méthode numérique pour générer la suite d'approximations $y_{j,k}$ de la solution de l'E.D.O. aux points $t_{j,k}$

Récursion formelle pour approximations successives
Formal Recurrence for Successive Approximations

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

En toute généralité, la relation de récurrence utilisée pour calculer les approximations successives y_{j+1} de la solution d'une E.D.O. à l'aide d'une méthode numérique peut s'écrire formellement comme

$$y_{j+1} - Y(f, k; y_0, \ldots, y_j; y'_0, \ldots, y'_j, y'_{j+1}) = 0$$

Exemples :

- Euler explicite : $Y = Y(f, k; y_j) = y_j + kf(y_j)$
- Saute-mouton : $Y = Y(f, k; y_{j-1}, y_j) = y_{j-1} + 2kf(y_j)$
- Trapèzes : $Y = Y(f, k; y_j, y'_{j+1}) = y_j + \frac{k}{2}(f(y_j) + f(y_{j+1}))$

Erreurs associées à une méthode
Errors Associated with a Method

Nous insérons la solution exacte de l'E.D.O., $y(t)$, dans la relation de récurrence (replacer y_j par $y(t_j)$, y'_j par $y'(t_j)$, etc.)

$$y_{j+1} - Y(f,k;y_0,\ldots,y_j;y'_0,\ldots,y'_j,y'_{j+1}).$$

L'*erreur de troncature locale* au noeud t_{j+1}, dénotée $\tau_{j+1}(k)$, est alors définie par

$$k\tau_{j+1}(k) = y(t_{j+1}) - Y(f,k;y(t_0),\ldots,y(t_j);y'(t_0),\ldots,y'(t_{j+1})).$$

L'*erreur de troncature globale*, $\tau(k)$, est

$$\tau(k) = \max_{0\le j\le N_k} |\tau_{j+1}(k)|.$$

Consistance, ordre et convergence d'une méthode
Consistency, Order and Convergence of a Method

- Une méthode est dite *consistante* si

$$\lim_{k\to 0} \tau(k) = 0.$$

- Une méthode est qualifiée *d'ordre p* si

$$\tau(k) = O(k^p),$$

  pour tout t dans l'intervalle d'intégration.
- La méthode numérique est dite *convergente* si

$$\lim_{k\to 0+} \left(\max_{i=0,\ldots,N_k} |y_{i,k} - y(t_{i,k})| \right) = 0.$$

Ordre de la méthode des trapèzes

Order of the Trapezoidal Method

Exemple : Déterminer l'ordre de la méthode des trapèzes

$$y_{j+1} - y_j - \frac{k}{2}[f(y_{j+1}) + f(y_j)] = 0$$

Pour déterminer l'ordre de cette méthode :

- remplacer y_j par $y(t_j)$, y_{j+1} par $y(t_{j+1})$
- développer $y(t_{j+1})$ en série de Taylor
- développer $f(y(t_{j+1})) = y'(t_{j+1})$ en série de Taylor

$$\begin{aligned} & \{y(t_j) + ky'(t_j) + \frac{k^2}{2}y''(t_j) + O(k^3)\} - y(t_j) \\ & \quad -\frac{k}{2}[\{y'(t_j) + ky''(t_j) + O(k^2)\} + y'(t_j)] \\ = \quad & O(k^3) - \frac{k}{2}O(k^2) = O(k^3) \quad \rightarrow \textit{méthode d'ordre 2} \end{aligned}$$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas

Order and Convergence of Multistep Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Une méthode générale à s pas (aussi appelée *méthode à pas liés*, *méthode à pas multiples* ou *méthode multi-pas*) est définie par la récurrence

$$\begin{aligned} & y_{j+1} + a_{s-1}y_j + \cdots + a_0 y_{j+1-s} \\ = \quad & k\left(b_s f(y_{j+1}) + \cdots + b_0 f(y_{j+1-s})\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{m=0}^{s} a_m y_{j+1-s+m} = k \sum_{m=0}^{s} b_m f(y_{j+1-s+m})$$

où a_m, b_m $(m = 0, \ldots, s)$ sont des constantes données, indépendantes de k, de j et de l'E.D.O., avec $a_s = 1$ et $|a_0| + |b_0| \neq 0$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas
Order and Convergence of Multistep Methods

- Méthode multi-pas à s pas définie par une *équation aux différences d'ordre s*

$$y_{j+1} + a_{s-1}y_j + \cdots + a_0 y_{j+1-s} = \phi_{j+1}, \quad j = s-1, \ldots$$

- Polynômes caractéristiques :

$$\rho(w) := \sum_{m=0}^{s} a_m w^m \quad \text{et} \quad \sigma(w) := \sum_{m=0}^{s} b_m w^m$$

- $\rho(w)$ est le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à l'équation aux différences
- caractéristiques des solutions de l'équation aux différences contrôlées par les racines de $\rho(w)$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas
Order and Convergence of Multistep Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist

Théorème

Une méthode multi-pas à s pas est d'ordre $p \geq 1$ si et seulement s'il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$\rho(\xi+1) - \sigma(\xi+1)\ln(\xi+1) = c\xi^{p+1} + O(|\xi|^{p+2}).$$

Théorème (Théorème d'équivalence de Dahlquist)

Si l'erreur sur les valeurs de départ $y_0, \ldots, y_{s-1}$ tend vers 0 lorsque k tend vers 0^+, alors, la méthode multi-pas à s pas est convergente si et seulement si elle est d'ordre $p \geq 1$ et son polynôme caractéristique ρ obéit à la condition de racine, c.-à-d. que toutes ses racines (évt. complexes) sont de module inférieur à 1 et que celles de module égal à 1 sont simples.

Ordre et convergence de la méthode des trapèzes II

Order and Convergence of the Trapezoidal Method II

Méthode des trapèzes : $y_{j+1} - y_j = k(\frac{1}{2}f_{j+1} + \frac{1}{2}f_j)$
Polynômes caractéristiques (2 points, t_{j+1} et t_j) :

$$\rho(w) = w - 1 \quad \text{et} \quad \sigma(w) = \tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{2}$$

Ordre :

$$\begin{aligned}
\rho(\xi+1) &= \xi \\
\sigma(\xi+1) \times \ln(\xi+1) &= (\tfrac{1}{2}\xi + 1) \times (\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)) \\
&= \tfrac{1}{2}\xi^2 + \xi - \tfrac{1}{4}\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4) \\
&= \xi + \tfrac{1}{12}\xi^3 + O(\xi^4)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\rho(\xi+1) - \sigma(\xi+1) \times \ln(\xi+1) = -\frac{1}{12}\xi^3 + O(\xi^4)$

$\rightarrow$ *méthode d'ordre 2*
$\rightarrow$ *convergente ($w = 1$ seule racine de $\rho(w)$)*

Ordre et convergence de la méthode saute-mouton

Order and Convergence of the Leap-Frog Method

Méthode saute-mouton : $y_{j+1} - y_{j-1} = k\,2f_j$
Polynômes caractéristiques (3 points, t_{j+1}, t_j et t_{j-1}) :

$$\rho(w) = w^2 - 1 \quad \text{et} \quad \sigma(w) = 2w$$

Ordre :

$$\begin{aligned}
\rho(\xi+1) &= \xi^2 + 2\xi \\
\sigma(\xi+1) \times \ln(\xi+1) &= 2(\xi + 1) \times (\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)) \\
&= 2\xi^2 + 2\xi - \xi^3 - \xi^2 + \tfrac{2}{3}\xi^3 + O(\xi^4) \\
&= \xi^2 + 2\xi - \tfrac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\rho(\xi+1) - \sigma(\xi+1) \times \ln(\xi+1) = \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)$

$\rightarrow$ *méthode d'ordre 2*
$\rightarrow$ *convergente ($w = 1$ et $w = -1$ racines simples de $\rho(w)$)*

Méthode à trois pas d'ordre 6

Three-step sixth order method

$$y_{j+1} + \tfrac{27}{11} y_j - \tfrac{27}{11} y_{j-1} - y_{j-2} = k\left(\tfrac{3}{11} y'_{j+1} + \tfrac{27}{11} y'_j + \tfrac{27}{11} y'_{j-1} + \tfrac{3}{11} y'_{j-2}\right)$$

Polynômes caractéristiques (4 points, t_{j+1}, t_j, t_{j-1} et t_{j-2}) :

$$\begin{aligned} \rho(w) &= w^3 + \tfrac{27}{11} w^2 - \tfrac{27}{11} w - 1 \\ \sigma(w) &= \tfrac{3}{11} w^3 + \tfrac{27}{11} w^2 + \tfrac{27}{11} w + \tfrac{3}{11} \end{aligned}$$

Ordre :

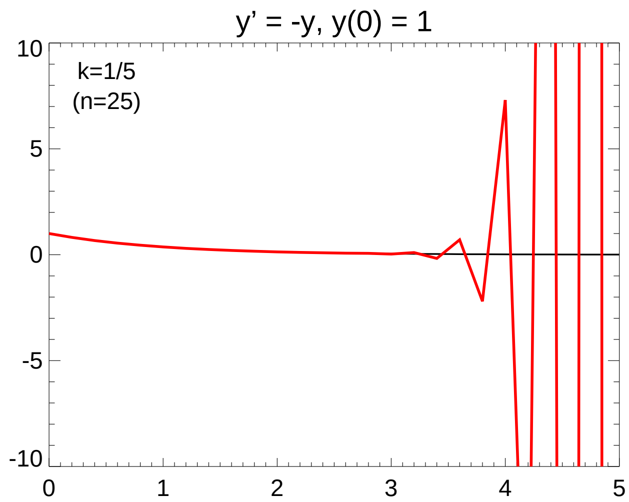
$$\begin{aligned} \rho(\xi+1) &= \xi^3 + \tfrac{60}{11}\xi^2 + \tfrac{60}{11}\xi \\ \sigma(\xi+1)\times\ln(\xi+1) &= \left(\tfrac{3}{11}\xi^3 + \tfrac{36}{11}\xi^2 + \tfrac{90}{11}\xi + \tfrac{60}{11}\right) \\ &\quad \times\left(\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{3}\xi^3 + \ldots\right) \\ &= \ldots \\ &= \xi^3 + \tfrac{60}{11}\xi^2 + \tfrac{60}{11}\xi + \tfrac{3}{1540}\xi^7 + O(\xi^8) \end{aligned}$$

Ainsi : *méthode d'ordre 6 (la seule à 3 pas)*

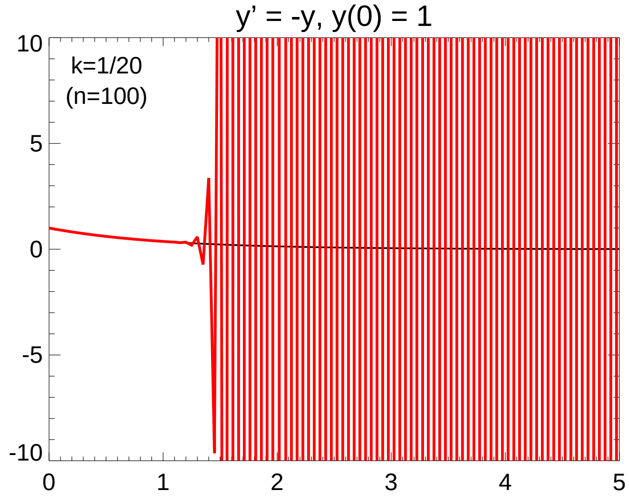
Méthode à trois pas d'ordre 6

Three-step Sixth-Order Method

Méthodes numériques et éléments de programmation
Guy Munhoven
Méthodes numériques pour E.D.O.
Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams
Concepts théoriques
Erreurs
Consistance, ordre et convergence
Méthodes multi-pas
Théorème de Dahlquist



Méthode à trois pas d'ordre 6
Three-step Sixth-Order Method



$\Rightarrow$ Instabilités s'aggravent lorsque k diminue !

$$\rho(w) = w^3 + \frac{27}{11}w^2 - \frac{27}{11}w - 1 \simeq (w-1)(w+3{,}136)(w+0{,}308)$$