

# Structure et évolution des étoiles

## 1 Objectifs du cours et liens avec d'autres matières

Dans ce cours de Structure et Evolution des étoiles, nous allons étudier en profondeur les caractéristiques physiques internes des étoiles ainsi que leur évolution au cours du temps. Dans notre description de la structure des étoiles, nous nous attacherons à analyser et comprendre les processus physiques sous-jacents. Comme nous nous en rendrons compte, les étoiles sont de remarquables laboratoires de physique fondamentale :

- Les étoiles comme laboratoire de physique quantique :  
Dans les étoiles, le monde microscopique et macroscopique sont en lien étroit. Premièrement, l'interaction entre rayonnement et matière affecte de façon cruciale le transfert de l'énergie du coeur à la surface de celles-ci. Cette interaction est expliquée par la physique quantique, en considérant la perturbation des états électroniques due au passage d'une onde électromagnétique.
- Les étoiles comme laboratoire de physique nucléaire :  
Comme nous le verrons, la principale source d'énergie des étoiles réside en leur coeur. Cette énergie y est produite par des réactions thermonucléaires de fusion. Au fur et à mesure de l'évolution de l'étoile, ces réactions de fusion vont conduire à la création de noyaux de plus en plus lourds. Les étoiles sont les grandes créatrices de l'univers : tous les noyaux autres que l'hydrogène et l'hélium qui constituent notre monde (le carbone, l'oxygène, l'azote, le fer, ...) ont un jour été synthétisés au coeur d'une étoile.
- Les étoiles comme laboratoire de thermodynamique et physique statistique :  
Comme nous le verrons, les conditions de température et d'entropie dans les étoiles sont extrêmes. Dans de telles conditions où un nombre gigantesque d'états est accessible au gaz de noyaux, d'électrons et de photons, un équilibre statistique s'établit pour l'occupation de ces différents états : on parle d'équilibre thermodynamique. Les outils puissants de la physique statistique peuvent dès lors être utilisés pour décrire l'occupation des états et faire le pont entre le monde microscopique et le monde macroscopique. Des effets purement quantiques tels que le principe d'exclusion de Pauli auront un impact considérable sur la structure, l'évolution et la stabilité des étoiles.
- Enfin, les processus hydrodynamiques jouent également un rôle central dans les étoiles. L'exemple le plus important est la présence de grandes zones de convection turbulente. Celles-ci jouent un rôle fondamental dans le transport de l'énergie et des éléments chimiques dans les étoiles.

Ce cours n'a pas l'ambition d'être exhaustif. Le nombre de cas de figure pouvant ce présenter dans le monde des étoiles est considérable. De grandes simplifications seront souvent faites dans la description mathématique des phénomènes, permettant de mieux comprendre tel aspect fondamental dans la vie des étoiles. Pour terminer,

bien que l'orientation de ce cours soit plutôt théorique, nous ne manquerons pas de garder le contact avec les observations. Dans le monde des étoiles, le principal outil de confrontation entre théorie et observations est le diagramme de Hertzsprung-Russell, et c'est donc par là que nous commencerons.

## 2 Luminosité, température effective, magnitudes, diagramme de Hertzsprung-Russell

Nous commencerons par quelques définitions fondamentales.

### 2.1 Luminosité - L

*On appelle luminosité d'une étoile, la puissance totale rayonnée par celle-ci.*

Par exemple, la luminosité du soleil peut être déterminée comme suit :

- La distance terre-soleil est maintenant connue avec une très grande précision. Elle peut par exemple être déterminée par la méthode de la parallaxe vue dans d'autres cours d'astronomie. Notons d cette distance.
- Le flux rayonné par le soleil (c'est-à-dire la quantité d'énergie rayonnée traversant en une seconde une surface unitaire perpendiculaire à la direction du soleil) peut être mesuré depuis la terre. Notons cependant que si cette mesure est faite depuis le sol, il faut tenir compte de l'absorption du rayonnement solaire par l'atmosphère. De plus, les mesures de flux de rayonnement, ce qu'on appelle la photométrie, sont faites sur une gamme restreinte du spectre visible. Pour remonter au flux total intégré sur toutes les longueurs d'ondes et sans absorption, il faut appliquer ce qu'on appelle la correction bolométrique. Dans le cas du soleil, le flux bolométrique au sommet de l'atmosphère terrestre est appelé la **constante solaire** :  $C_{\odot} = \int_0^{\infty} C_{\lambda} d\lambda = 1367 \text{ W/m}^2$ .

La luminosité du soleil est alors simplement obtenue en multipliant  $C_{\odot}$  par la surface d'une sphère centrée sur le soleil et de rayon égal à la distance terre - soleil :

$$L_{\odot} = 4\pi d^2 C_{\odot} = 3.846 \times 10^{26} \text{ W} = 3.846 \times 10^{33} \text{ erg/s} \quad (1)$$

Les étoiles présentent une gamme très large de luminosités, allant typiquement de moins de  $10^{-3}L_{\odot}$  à plus de  $10^6L_{\odot}$  pour les plus brillantes !

## 2.2 Eclat apparent - $b$

*On définit l'éclat apparent  $b$  d'une étoile comme le flux d'énergie rayonnée reçu sur terre en provenance de cette étoile.*

Comme pour le soleil, il faut appliquer une correction bolométrique pour obtenir le flux total intégré sur toutes les longueurs d'onde. Cette correction doit également prendre en compte l'absorption du rayonnement de l'étoile par le milieu interstellaire. L'éclat apparent et la luminosité d'une étoile sont reliés par l'équation suivante faisant intervenir sa distance  $d$  :  $b = L/(4\pi d^2)$ .

## 2.3 Magnitude apparente - $m$

En astronomie, l'habitude est d'utiliser une échelle logarithmique pour la mesure des flux rayonnés. La magnitude apparente d'une étoile est définie comme suit :

$$m = -2.5 \log(b) + C \quad (2)$$

La constante  $C$  apparaissant dans cette expression a été originellement choisie telle que la magnitude apparente de l'étoile Vega soit égale 0. Ainsi une étoile de magnitude apparente  $m=-2.5$  est 10 fois plus brillante que Vega ; une étoile de magnitude apparente  $m=10$  est 10 000 fois moins brillante que Vega. Comparant 2 étoiles différentes de magnitudes  $m_1$  et  $m_2$  et d'éclats  $b_1$  et  $b_2$ , on trouve :

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log(b_1/b_2) \quad (3)$$

Une différence de magnitudes apparentes correspond donc à un rapport d'éclats apparents donné entre les 2 étoiles.

## 2.4 Eclat absolu - $B$

Pour une luminosité donnée, nous avons vu que l'éclat apparent dépend de la distance de l'étoile. L'éclat absolu est défini de façon à faire disparaître cette dépendance vis-à-vis de la distance.

L'éclat absolu  $B$  est l'éclat que l'étoile aurait si sa distance à la terre était ramenée à 10 parsecs.

Soit  $pc$  la longueur d'un parsec comptée en m et  $d_{pc}$  la distance réelle de l'étoile comptée en pc. On a :

$$L = 4\pi(10 * pc)^2 B = 4\pi(d_{pc} * pc)^2 b \quad (4)$$

Et donc :

$$B/b = (d_{pc}/10)^2 \quad (5)$$

## 2.5 Magnitude absolue

La magnitude absolue  $M$  d'une étoile est la magnitude qu'elle aurait si elle était ramenée à une distance de 10 parsecs. C'est donc une grandeur intrinsèque liée à l'étoile et ne dépendant pas de la distance de celle-ci. Elle est reliée à l'éclat absolu  $B$  par :

$$M = -2.5 \log(B) + C \quad (6)$$

En utilisant les équation 5, , on trouve immédiatement la relation suivante entre magnitude absolue et magnitude apparente :

$$M - m = 5 - 5 \log(d_{pc}) \quad (7)$$

Pour passer de la magnitude apparente à la magnitude absolue, il faut donc connaître sa distance. Les incertitudes sur la mesure des distances sont la principale source d'incertitudes dans la détermination des magnitudes absolues.

Si on se restreint à la bande spectrale visible  $V$  (centrée à 545 nm), la magnitude absolue du soleil est par exemple :  $M_{V\odot} = 4.83$ . Les étoiles présentent une très large gamme de magnitudes absolues, allant de  $M_V = +17$  à  $M_V = -10$ . Si l'entière du spectre électromagnétique est considérée, on parle de magnitude absolue bolométrique.

## 2.6 Rayonnement de corps noir

Vous avez vu dans vos cours de physique statistique qu'à l'équilibre thermodynamique, l'occupation des différents niveaux d'énergie d'un gaz de photons suit la loi de Planck, on parle du spectre d'un corps noir. Le flux d'énergie rayonné depuis la surface d'un corps noir de température  $T$  dans l'intervalle de longueur d'onde  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  est simplement donné par  $F_\lambda d\lambda$ , avec :

$$F_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/(\lambda kT)) - 1} \quad (8)$$

Si on considère maintenant le flux “bolométrique” intégré sur toutes les longueurs d’ondes, on trouve la loi de Stefan-Boltzmann :

$$F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = \sigma T^4 \quad (9)$$

Enfin, notons la loi de Wien reliant la température et la longueur d’onde au maximum du spectre de Planck :

$$\lambda_{\max} (\text{cm}) = 0.29/T(\text{K}) \quad (10)$$

Plus la température est élevée, plus petite est donc la longueur d’onde où pique la courbe de Planck. Pour des températures inférieures à 4000 K, le rayonnement est le plus important dans la région infrarouge du spectre. De 4000 K et 8000 K, le maximum de la fonction de Planck traverse du rouge au bleu la région visible du spectre électromagnétique. Au-delà de 8000 K, le maximum se trouve dans l’ultra-violet.

## 2.7 Température effective

Le spectre de rayonnement des étoile s’avère être relativement proche de celui des corps noirs. Ceci conduit à la définition de la température effective d’une étoile :

*La température effective est la température qu’aurait un corps noir ayant le même rayon et la même luminosité que l’étoile considérée.*

La loi de Stefan-Boltzmann nous donne donc, en multipliant le flux par la surface de l’étoile :

$$L = 4\pi R^2 F = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (11)$$

Cette équation n’est en fait pas une loi mais une définition mathématique de la température effective. Les températures effectives des étoiles sont typiquement comprises entre 100 000 K pour les plus chaudes et moins de 3000 K (étoiles « froides »). Des plus chaudes aux plus froides, les étoiles sont classées en différents types spectraux :

O B A F G K M (Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me!)

Chaque type spectral est subdivisé en sous-types désignés par un chiffre. Ainsi pour les étoiles B : B0, B1, ... correspondent à des sous-types de températures effectives décroissante. Notre soleil a une température effective  $T_{\text{eff}} = 5777$  K. Son type spectral est G2.

Dans tous les cas, la loi de Wien nous montre qu'une part non-négligeable de leur spectre de rayonnement est située dans le domaine visible, c'est grâce à cela que nous les voyons !

## 2.8 Le diagramme de Hertzsprung-Russell

Le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR) est fondamental pour ce repérer dans le monde des étoiles. Il reste aussi le principal outil de confrontation entre la théorie de l'évolution stellaire et les observations. Y sont donnés en abscisse et en ordonnée les 2 grandeurs mesurables les plus importantes pour accéder à la structure d'une étoile.

Commençons par en donner une définition théorique : en abscisse est donnée le logarithme de la température effective de l'étoile  $\log T_{eff}$  (comptée croissante vers la gauche) et en ordonnée le logarithme de sa luminosité rapportée à celle du soleil  $\log(L/L_{\odot})$ .

Pour déterminer ces 2 grandeurs à partir de mesures photométriques ou spectroscopiques, il faut entre autre faire intervenir des modèles d'atmosphère stellaire. Un diagramme de Hertzsprung-Russell observationnel évitant l'utilisation de ces modèles peut aussi être construit. On y donnera en ordonnée la magnitude absolue de l'étoile mesurée dans une certaine bande passante, en général avec le filtre V visible (autour de 545 nm) :  $M_V$ . En abscisse, on y donnera l'indice de couleur de l'étoile, c'est-à-dire la différence entre les magnitudes mesurées dans 2 bandes passantes distinctes, par exemple  $m_B - m_V$  (filtres de Johnson) ou mieux  $m_b - m_y$  (filtres de Strömngren). Un indice de couleur négatif (resp. positif) signifie que l'étoile est plus bleue (resp. plus rouge) que Vega. Comme on l'a vu la couleur d'une étoile, son type spectral et sa température effective sont en lien direct (les étoiles froides (K-M) sont plutôt rouges, les étoiles chaudes (O-B) sont plutôt bleues).

Le point remarquable est que chaque type d'étoile de masses et stade et stade évolutif donné occupe une région bien spécifique du diagramme HR. C'est donc la carte par excellence pour ce repérer parmi les étoiles. Les physiciens stellaires ont beaucoup de chance de pouvoir construire une telle carte ; un outil aussi utile fait en général défaut dans d'autres domaines de l'astrophysique. La principale difficulté pour placer les étoiles dans le diagramme HR réside dans la détermination de leur distance (nécessaire pour déterminer leur magnitude absolue). La meilleure détermination des distances d'étoiles proches a pu être obtenue par les mesures du satellite spatial Hipparcos. Toutes les étoiles du catalogue de cette mission ont ainsi pu être placées dans le diagramme HR, cela donne la figure ...

### 2.8.1 Rayons des étoiles

Les étoiles peuvent avoir des rayons très différents. Connaissant la position d'une étoile dans le diagramme HR, son rayon peut immédiatement en être déduit. Prenons en effet le logarithme de la loi de Stefan-Boltzmann (définition de la température effective, équation 11), on trouve :

$$\log L = 2 \log R + 4 \log T_{\text{eff}} + \log(4\pi\sigma) \quad (12)$$

Le lieu des points correspondant à une valeur donnée du rayon est donc une droite  $\log L = 4 \log T_{\text{eff}} + \text{cst.}$  Au fur et à mesure qu'on augmente le rayon, on se déplace du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du diagramme HR.

### 2.8.2 La Séquence Principale

L'examen du diagramme HR nous montre immédiatement que la plupart des étoiles se regroupent le long d'une ligne allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit : c'est la séquence principale. Pourquoi la plupart des étoiles y sont-elles situées ? Tout simplement car la séquence principale est le lieu des points correspondant à la phase la plus longue de la vie des étoiles. Pour le comprendre, je rappelle (ceci sera vu en détail plus loin dans le cours !) que l'énergie rayonnée par la plupart des étoiles est produite en leur cœur par des réactions thermonucléaires de fusion. Durant la vie de l'étoile, différentes phases de fusion d'enchaîneront. Parmi celles-ci, la plus longue correspond à la fusion, au travers d'une chaîne de réactions, de 4 protons pour former un noyau d'hélium. 90% de la vie d'une étoile telle que notre soleil correspond à cette phase.

*La séquence principale est le lieu dans le diagramme HR où se situent les étoiles se trouvant dans la phase de fusion thermonucléaire centrale de l'hydrogène en hélium.*

Les étoiles se forment avec des masses très différentes, de l'ordre de 0.1 masses solaires ( $M_{\odot}$ ) pour les moins massives à 70-90  $M_{\odot}$  pour les plus massives. Les étoiles les moins massives sont situées dans la partie inférieure droite de la séquence principale et les étoiles les plus massives dans la partie supérieure gauche ; c'est une conséquence de la relation masse-luminosité qui sera établie plus tard dans le cours.

### 2.8.3 Les géantes rouges

Après sa phase de combustion centrale de l'hydrogène, nous verrons que le cœur d'une étoile se contractera et simultanément son enveloppe se dilatera. En conséquence, son rayon augmentera d'un facteur de l'ordre de 10-100 (voir même 1000 en

toute fin de vie!). L'étoile devient alors une géante rouge. Vu leurs grands rayons, les géantes rouges se trouvent en haut à droite du diagramme HR. L'étoile enchaîne à ce stade, selon sa masse, différentes phases de combustions nucléaires : combustion de l'hélium, puis du carbone, de l'oxygène, ...

#### 2.8.4 Les naines blanches

En toute fin de vie, une étoile telle que notre soleil éjectera son enveloppe ; il ne restera alors plus que son coeur inerte et très dense en lent refroidissement. Il sera alors devenu une naine blanche. Les densités au coeur des naines blanches sont de l'ordre d'une tonne par  $cm^3$ . Leurs rayons sont de l'ordre de 1/100ème du rayon du soleil. En conséquence, les naines blanches occupent une région spécifique en bas à gauche du diagramme HR.

#### 2.8.5 Caractéristiques globales du soleil et des étoiles

Dans le tableau ... nous faisons une synthèse des caractéristiques globales du soleil et des étoiles. Il est utile de rappeler comment ces grandeurs peuvent être obtenues pour notre soleil. Tout d'abord, il faut déterminer la distance terre - soleil.

Celle-ci peut par exemple être obtenue par la méthode des parallaxes. La première mesure précise de cette distance fut ainsi obtenue par Cassini. Il commença par mesurer la parallaxe diurne de mars au moment de son opposition (mesures simultanées depuis Paris et Cayenne, et mesures décalées en temps depuis Paris). Utilisant la 3ème loi de Kepler (voir plus bas), il put ainsi obtenir la distance terre - soleil.

Connaissant la distance terre-soleil  $d \simeq 149.6 \times 10^6$  km et son diamètre angulaire  $\theta$ , on trouve immédiatement son rayon :

$$R = d \tan(\theta/2) \simeq 0.6955 \times 10^6 km \quad (13)$$

Nous avons vu (Section 2.1) comment la luminosité solaire peut être déterminée. Sa température effective est immédiatement déduite de sa définition (équation 11), ce qui donne  $T_{eff} = 5777K$ . Enfin, la masse du soleil peut être déduite de la 3ème loi de Kepler :

$$GM_{\odot} = 4\pi^2 a^3 / P^2 \quad (14)$$

où  $a$  est le demi-grand axe de l'orbite terrestre ou de toute autre planète et  $P$  sa période de révolution. Nous trouvons :  $M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30}$  kg. De loin la plus grande source d'incertitude dans la détermination de la masse du soleil provient de l'incertitude sur la constante de gravitation  $G$  (précision relative  $\approx 10^{-4}$ ).



## 3 Equations de structure d'une étoile

### 3.1 Hypothèses

Les étoiles sont en rotation sur elles-mêmes. En conséquence, l'action de la force centrifuge les aplatit légèrement (pôles plus proches du centre que l'équateur). Nous négligeons ici cet effet et supposons que les étoiles sont des corps à symétrie sphérique. De même, nous négligeons l'influence du champs magnétique sur leur structure. En conséquence, les différentes grandeurs internes de l'étoile : densité, pression, température, flux d'énergie, composition chimique, ...seront supposées dépendre d'uniquement 2 grandeurs : la distance au centre et le temps. Dans cette section, nous allons considérer la structure de l'étoile à un moment donné. Nous oublierons donc temporairement la dimension temporelle et pourrons décrire les différentes caractéristiques internes comme fonction d'une seule variable, la distance au centre  $r$  :  $\rho(r)$ ,  $P(r)$ ,  $T(r)$ , ...

### 3.2 Masse et densité

Considérons une coquille sphérique située à une distance  $r$  du centre de l'étoile, ayant une épaisseur  $\delta r$  et un volume  $\delta V$  supposés petits. Par définition de la densité, la masse de cette coquille vaut  $\delta m = \rho \delta V$ . Au premier ordre en  $\delta r$ , nous avons  $\delta V = 4\pi r^2 \delta r$  et donc  $\delta m = 4\pi r^2 \rho \delta r$ . Divisant par  $\delta r$  et passant à la limite nous donne l'équation différentielle :

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho \quad (15)$$

Dans cette équation,  $m(r)$  est la masse de la sphère de rayon  $r$  à l'intérieur de l'étoile. C'est une fonction croissante partant de 0 au centre de l'étoile ( $m(0) = 0$ ) à la masse totale  $M$  quand on arrive à sa surface ( $m(R) = M$ ). Connaissant la répartition de la densité dans l'étoile, une simple intégration de l'équation 15 nous donne  $m(r)$  :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr. \quad (16)$$

La densité moyenne de l'étoile est le rapport entre sa masse totale et son volume total :

$$\langle \rho \rangle = M/(4/3\pi R^3) \quad (17)$$

Pour le soleil dont nous avons vu comment obtenir la masse et le rayon, nous trouvons :

$$\langle \rho \rangle_{\odot} = M_{\odot}/(4/3\pi R_{\odot}^3) \simeq 2 \times 10^3 \text{kg/m}^3, \quad (18)$$

c'est-à-dire le double de la densité de l'eau.

Exercices :

Calculer  $m(r)$  pour un modèle de densité constante  $\rho_0$  et pour un modèle de densité  $\rho(r) = \rho_0(R^2 - r^2)$ .

### 3.3 Equilibre hydrostatique

Nos sens nous montrent que la forme géométrique du soleil est dans un état global d'équilibre. Son rayon par exemple n'a pas changé de façon significative entre disons maintenant et il y a quelques années. Nous supposons qu'il en est de même pour la plupart des étoiles. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la résultante des forces exercée sur chaque petit volume de matière à l'intérieur de l'étoile soit nulle. Isolons un tel petit volume matériel situé à une distance  $r$  du centre. Nous lui donnerons pour simplifier une forme cylindrique dont la base horizontale a une surface  $\delta A$  et la hauteur dans la direction radiale est  $\delta r$ . Quelles sont les forces s'exerçant sur ce volume matériel ?

Nous avons tout d'abord les forces de contact exercées au niveau de sa surface. Nous négligerons ici les tensions visqueuses et ne garderons que les forces normales aux surfaces dues à la pression du gaz. Notre hypothèse de symétrie sphérique nous assure que la résultante de ces forces de contact dans le plan horizontal est nulle, tout va bien à ce niveau. Quand à la résultante des forces de contact dans la direction radiale (comptée positivement vers le haut), elle est tout simplement donnée par :

$$(P(r) - P(r + \delta r))\delta A = -\delta P\delta A. \quad (19)$$

Nous avons d'autre part la force de volume correspondant à l'attraction gravifique exercée par la sphère située en-dessous :

$$-g \delta m = -(Gm/r^2) \rho \delta A \delta r. \quad (20)$$

La résultante totale doit être nulle :

$$-\delta P\delta A - (Gm/r^2) \rho \delta A \delta r = 0 \quad (21)$$

Divisant cette expression par  $\delta A \delta r$  et passant à la limite, nous trouvons :

$$dP/dr = -\rho Gm/r^2. \quad (22)$$

C'est la forme différentielle de l'équation d'équilibre hydrostatique. Si on souhaite travailler avec la masse plutôt que la distance comme variable indépendante (c'est souvent utile), il suffit de diviser l'équation 22 par l'équation 15 et nous trouvons :

$$dP/dm = -Gm/(4\pi r^4) \quad (23)$$

Intégrons maintenant l'équation 22 depuis la distance  $r$  jusqu'à la surface de l'étoile où la pression est supposée nulle, on trouve :

$$P(r) = \int_r^R \rho (Gm/r^2) dr. \quad (24)$$

La pression en un point donné de l'étoile est donc égale au poids de la colonne de gaz de section unitaire située au-dessus de celui-ci.

Si la pression était inférieure à ce poids, l'étoile incapable de soutenir les couches supérieures s'effondrerait sur elle-même. Si au contraire la pression était supérieure au poids, elle serait suffisante pour éjecter ces couches supérieures.

De manière équivalente, si nous intégrons l'équation 23 sur la masse, nous trouvons :

$$P(m) = \int_m^M Gm/(4\pi r^4) dm. \quad (25)$$

Cette expression nous sera également for utile par la suite. Par simple analyse dimensionnelle, nous pouvons en déduire l'ordre de grandeur de la pression régnant dans les couches profondes d'une étoile de rayons et masses connus :

$$P \approx GM^2/R^4 \quad (26)$$

## Le temps dynamique

Considérons brièvement maintenant une situation hors équilibre hydrostatique. L'équilibre des forces étant brisé, l'étoile va exploser ou imploser, mais sur quelle échelle de temps ? Seul un ordre de grandeur nous intéresse ici et nous ferons des simplifications extrêmes pour l'estimer. Supprimons les forces de pression et gardons uniquement l'attraction gravifique. L'étoile s'effondre sur elle-même avec une accélération initiale  $GM/R^2$  à la surface. Comme  $R$  diminue cette accélération augmente au cours du temps. Simplifions les choses et supposons un mouvement d'accélération uniforme  $2GM/R^2$ . Le mouvement de la surface est  $r(t) = R - (GM/R^2) t^2$ . Le centre sera atteint après un temps  $t_{dyn}$  tel que  $R = GM/R^2 t_{dyn}^2$ . Nous en déduisons :

$$t_{dyn} = \sqrt{R^3/GM}. \quad (27)$$

C'est le temps dynamique. Notre raisonnement était très approximatif mais l'ordre de grandeur du résultat reste valable. Si à un moment donné de la vie d'une étoile, l'équilibre des forces est brisé, sa structure à grande échelle va se modifier en une échelle de temps courte donnée par le temps dynamique. Pour le soleil, nous trouvons à partir des valeurs de sa masse et de son rayon déterminées plus haut :  $t_{dyn,\odot} = 26$  minutes. En 26 minutes, nous n'observons aucune variation significative de son rayon ! Nous pouvons donc pleinement admettre que celui-ci se trouve à l'état d'équilibre hydrostatique.

## Exercices

Déterminer la pression au centre d'une étoile de densité constante, sa masse et son rayon étant donnés.

Déterminer les temps dynamiques d'une étoile à neutron, une naine blanche, géante rouge, super-géante rouge, super-géante bleue.

### 3.4 Rotation rapide et équilibre hydrostatique

Dans les étoiles en rotation rapide, l'hypothèse de base évoquée en début de chapitre, à savoir la symétrie sphérique, n'est plus valable. Examinons brièvement le cas général où on tient compte de la déformation centrifuge de l'étoile. Tout d'abord, réécrivons l'équation d'équilibre dans ce cas. La résultante des forces par unité de masse est cette fois-ci égale à l'accélération centripète. Quelles sont ces forces par unité de masse ? D'une part, nous avons la résultante des forces de surface par unité de masse. A symétrie sphérique, elle s'écrivait  $-(1/\rho)dP/dr \vec{e}_r$ . Hors symétrie sphérique, elle n'est plus orientée radialement et s'écrit  $-\nabla P/\rho$ . D'autre part, nous avons la force d'attraction gravifique par unité de masse. A symétrie sphérique, elle s'écrivait  $-Gm/r^2 \vec{e}_r$ . Hors symétrie sphérique, ce qui demeure c'est qu'elle dérive d'un potentiel, s'écrivant  $-\nabla\phi$ . Quant à l'accélération centripète, elle s'écrit simplement  $-\Omega^2 s \vec{e}_s$  où  $\Omega$  est la vitesse angulaire,  $s$  est la distance à l'axe de rotation et  $\vec{e}_s = \nabla s$  est le vecteur normé orienté selon une perpendiculaire à l'axe de rotation. L'équation de Newton pour le cas d'un corps en rotation s'écrit donc en chaque point :

$$\Omega^2 s \vec{e}_s = \nabla P/\rho + \nabla\phi. \quad (28)$$

On voit clairement par cette équation que la symétrie sphérique est incompatible avec la rotation : le membre de gauche est orienté selon  $\vec{e}_s$ , tandis qu'à symétrie sphérique, le membre de droite serait orienté selon  $\vec{e}_r$ .

Dans le cas le plus général, la modélisation des étoiles en rotation rapide est très complexe. Cependant, il y a 2 cas de figures où la géométrie de l'étoile en rotation se simplifie, les étoiles en rotation rigide ( $\Omega$  constant) et en rotation cylindrique ( $\Omega$  fonction de  $s$  uniquement, c'est-à-dire constant sur des cylindres). La rotation rigide étant un cas particulier de la rotation cylindrique, nous nous limiterons au cas général. Pour le montrer, considérons le rotationnel de l'équation 28.

$$\nabla \times (\Omega^2 s \vec{e}_s) = \nabla \times \left( \frac{\Omega^2 \nabla s^2}{2} \right) = \frac{\nabla \Omega^2 \times \nabla s^2}{2} = \nabla \times \left( \frac{\nabla P}{\rho} \right) = -\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2}, \quad (29)$$

où nous avons utilisé les propriétés  $\nabla \times (a\nabla b) = \nabla a \times \nabla b$  et  $\nabla \times (\nabla a) = 0$ . Pour une rotation cylindrique,  $\nabla \Omega^2$  et  $\nabla s^2$  sont coalignés selon  $\vec{e}_s$ , leur produit vectoriel est donc nul. L'équation 29 donne donc dans ce cas :  $\nabla \rho \times \nabla P = 0$ . Les gradients

étant alignés, les surfaces isobares et d'iso-densités coïncident. En outre, comme le fluide obéit nécessairement à une équation d'état reliant température, pression et densité (pour une composition chimique fixée), voir chapitre ultérieur, les surfaces de densité et pression constante sont en général aussi des isothermes. Enfin, pour une rotation cylindrique, la force centrifuge dérive d'un potentiel. Plus précisément, on peut définir le potentiel total (gravifique + centrifuge) comme suit :

$$\Psi = \phi - \int_0^s \Omega^2(s) s ds . \quad (30)$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors tout simplement :

$$\nabla P / \rho = -\nabla \Psi . \quad (31)$$

On voit donc que les isobares sont aussi des surface de potentiel total constant. Prenant le Laplacien de l'équation 30, nous trouvons la généralisation suivante de l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho - 2\Omega^2 . \quad (32)$$

Partant d'un profil de rotation  $\Omega(s)$  et un profil de densité  $\rho(r)$  (pour une latitude donnée), des méthodes numériques relativement simples existent pour résoudre les équations 31 et 32 et ainsi déterminer la forme des surfaces de potentiel total constant. Cela facilite grandement la modélisation de ces étoiles.

A la rotation rapide est aussi associée la notion de vitesse critique. Au-delà d'une certaine vitesse de rotation, la force centrifuge l'emporte sur l'attraction gravifique et l'étoile ne peut plus maintenir sa cohésion. Un ordre de grandeur de cette vitesse critique peut être obtenu en égalant à la surface accélération centripète équatoriale et accélération gravifique dans un modèle à symétrie sphérique :

$$\Omega^2 R = \frac{GM}{R^2} . \quad (33)$$

Isolant la vitesse équatoriale correspondante, on trouve :

$$V_{crit} = \Omega R = \sqrt{\frac{GM}{R}} . \quad (34)$$

Dans le modèle simplifié dit de Roche, le potentiel gravifique est approximé par  $\phi = -Gm/r$  (potentiel en  $r$  si la masse  $m$  est concentrée au centre). Pour une étoile en rotation rigide, le potentiel total est alors donné par :

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{Gm}{r} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta . \quad (35)$$

La surface de l'étoile suit une équipotentielle. Notons  $R(\theta)$  le rayon en fonction de la colatitude  $\theta$ . On déduit alors immédiatement de l'équation 35 :

$$\frac{GM}{R(\theta)} + \frac{1}{2} \Omega^2 R(\theta)^2 \sin^2 \theta = \frac{GM}{R_p} , \quad (36)$$

où  $R_p$  est le rayon polaire. Isoler  $R(\theta)$  dans cette équation est immédiat, ce qui donne la forme de la surface, d'autant plus aplatie que  $\Omega^2$  est élevé. En particulier, on voit qu'à la vitesse critique, le rapport entre rayon polaire et rayon équatorial vaut 2/3.

### 3.5 Etat de la matière stellaire

Nous étudierons en détail dans une section ultérieure l'état de la matière stellaire. Il est cependant d'ores et déjà possible de mettre en évidence les grandes lignes. Faisons une hypothèse (qui va s'avérer fausse!) et testons-la.

Hypothèse : *Serait-il possible que la matière stellaire soit constituée d'atomes d'hydrogènes en contacts ?*

Calculons tout d'abord la densité d'une telle configuration. Le volume occupé par chaque atome est de l'ordre de  $1 \text{ Angström}^3 = 10^{-30} \text{ m}^3$ . La masse d'un atome d'hydrogène est à peu près égale à l'unité de masse atomique, soit  $m_u = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . Nous trouvons donc une densité  $\rho = 1.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . C'est à peu de choses près la densité moyenne que nous avons trouvée pour le soleil! L'hypothèse a l'air de tenir ...

Mais nous avons oublié un deuxième point. Une telle configuration sera-t-elle capable de soutenir le poids des couches se trouvant au-dessus ?

Pour des atomes en contact, la pression due à la répulsion entre ceux-ci trouve son origine dans le principe d'incertitude d'Heisenberg. Nous savons qu'en thermodynamique la pression est définie comme  $P = -\partial U / \partial V|_S$  ( $U$ ,  $V$  et  $S$  étant l'énergie interne, le volume et l'entropie). Si on comprime la configuration d'atomes en contact sans échange de chaleur (compression adiabatique), le volume occupé par chaque atome diminue. Le principe d'incertitude nous dit donc que l'incertitude sur le module de l'impulsion de l'électron augmente, donc son énergie cinétique moyenne augmente aussi, ce qui crée la pression. Plutôt que d'invoquer la physique quantique, un raisonnement classique suffit ici pour estimer l'ordre de grandeur de cette pression. Nous estimons la force de répulsion entre 2 atomes par la répulsion électrostatique entre 2 électrons à une distance  $d_0 = 1 \text{ Angström}$ , puis nous divisons par  $d_0^2$  (surface occupée par chaque atome) pour avoir la pression :

$$P_{el} \simeq e^2 / d_0^4 \approx 2 \times 10^{12} Pa \quad (37)$$

D'autre part, vous avez estimé lors d'un exercice précédent le poids de la colonne de matière de section unitaire au centre d'un « soleil » de densité constante, ce qui donne :

$$\text{Poids} \simeq 5 \times 10^{14} Pa \gg P_{el} \approx 2 \times 10^{12} Pa.$$

Il est donc évident qu'une telle configuration est incapable de soutenir le poids des couches supérieures. La matière ne peut donc pas être dans cet état et nous devons rejeter notre hypothèse de départ.

Cherchons donc une autre solution et supposons que la matière stellaire soit complètement ionisée, on parle dans ce cas de plasma. Nous gardons la même densité, mais

cette fois-ci l'ionisation a libéré un espace considérable. La distance moyenne entre particules est toujours de l'ordre de  $\approx 10^{-10}$  m, ce qui est bien plus que la taille des noyaux de l'ordre de  $\approx 10^{-15}$  m. Les électrons et noyaux peuvent donc se déplacer librement. Bien qu'il soit constitué de particules chargées, nous admettrons que ce gaz est raisonnablement bien décrit par l'équation d'un gaz parfait :

$$P = \frac{k\rho T}{\mu m_u} \quad (38)$$

Dans cette équation  $k$  est la constante de Boltzmann,  $m_u$  est l'unité de masse atomique et  $\mu$  le poids moléculaire moyen (usuellement défini de façon adimensionnelle en astrophysique). Nous voyons par cette équation qu'il n'y a aucun obstacle à ce que le gaz exerce une pression aussi grande soit-elle ; il suffit pour ce faire qu'il ait une température suffisamment grande. Je rappelle que dans un gaz parfait, l'énergie cinétique moyenne de chaque particule est donnée par

$$E_c = (3/2) kT \quad (39)$$

Grâce à l'espace libéré par l'ionisation, l'énergie cinétique des particules peut devenir considérable. La pression qui n'est autre que le flux d'impulsion des particules peut donc elle aussi devenir gigantesque et permettre à l'étoile de soutenir son propre poids. Isolons la température dans l'équation ... et remplaçons la pression (poids de la colonne de gaz) et la densité par les valeurs estimées précédemment. Nous trouvons :

$$T_c = \frac{P_c \mu m_u}{k \rho_c} \approx \frac{GM \mu m_u}{R k} \simeq 10^7 K \quad (40)$$

Cette valeur estimée de façon grossière n'est pas loin de la vraie température centrale du soleil qui est de  $T = 15 \times 10^6 K$ .

### 3.6 Transport d'énergie par la radiation

Nous avons vu que la température central du soleil est de l'ordre de  $15 \times 10^6 K$ , une valeur si élevée étant nécessaire pour qu'il puisse soutenir son propre poids. D'autre part, la loi de Stefan-Boltzmann nous montre que sa température de surface est de l'ordre de 5800 K. Un tel contraste de température doit obligatoirement conduire à un transfert de chaleur du coeur vers la surface, et ceci indépendamment de l'existence de toute source de production d'énergie ! Examinons donc de plus près les principaux processus de transport de l'énergie du coeur vers la surface.

Les photons sont porteurs d'une énergie  $h\nu \approx kT$  considérable à l'intérieur des étoiles et ils se déplacent on ne peut plus vite. La radiation y est donc potentiellement un excellent moyen de transport de l'énergie. Cependant, nous allons voir que différentes sources d'absorption peuvent rendre le plasma stellaire particulièrement opaque au rayonnement. Celles-ci seront étudiées en détail dans une section ultérieure. Cependant, nous pouvons déjà les mettre en évidence d'un point de vue qualitatif. Pour des températures de  $10^4$  à  $10^7$  K, l'énergie moyenne  $kT$  des photons va de 1'eV au keV. Cela correspond aux niveaux d'énergie typiques des électrons. Par contre, ces valeurs sont de loin inférieures aux niveaux d'énergie nucléaires de l'ordre du MeV. Il faudra attendre que des température centrales de l'ordre de  $10^9 K$  soient atteintes aux phases finales de la vie d'une étoile pour que les photons soient capables d'exciter et briser les noyaux. Nous n'en sommes pas encore là. L'absorption du rayonnement au sein des étoiles est donc, sauf exception, associée aux changements de niveau énergétique des électrons. Rappelons les principales sources d'absorption et réémission des photons associées aux électrons.

### Sources d'absorption et réémission des photons associées aux électrons :

**Transitions lié-lié (bound-bound) :** Un électron lié absorbe un photon d'énergie bien spécifique, ce qui lui permet de passer à un niveau excité d'énergie supérieure.

**Transitions lié-libre (bound-free) :** Un électron lié absorbe un photon d'énergie supérieure au potentiel d'ionisation et devient libre.

**Transitions libre-libre (free-free) :** Un électron libre absorbe un photon et acquière une énergie cinétique plus grande. Le processus d'émission inverse est bien connu, c'est la Brehmsstrahlung dans lequel une particule chargée décélérée sous l'action d'un champs électrique émet un rayonnement. Ce processus est important dans les régions profondes où la plupart des électrons sont libres.

**Diffusion électronique (scattering) :** Il s'agit ici en quelque sorte de collisions élastiques entre électrons et photons. Après collision, le photon repart dans une autre direction, ce processus contribue donc à l'opacité du milieu.

Les transitions lié-lié et lié-libre dominant près de la surface de l'étoile où certains atomes ne sont pas encore complètement ionisés. Les transitions libre-libre et la diffusion électronique dominant dans les régions profondes de l'étoile où la matière est complètement ionisée.

Dans les étoiles, les photons sont continuellement absorbés et réemis par ces différents processus. Si on considère la distance moyenne parcourue par un photon entre une émission et sa réabsorption, c'est-à-dire le libre parcours moyen des photons, on trouve des valeurs de l'ordre du cm. C'est minuscule comparativement aux hauteurs d'échelle de variation des différentes quantité :  $|dr/d\ln T|$ ,  $|dr/d\ln P|$ , ... (la hauteur d'échelle est la distance radiale sur laquelle une quantité donnée change d'un facteur



e). Les étoiles sont donc opaques au rayonnement. Les photons reçus sur terre sont émis depuis la surface de l'étoile, ce qu'on appelle la **photosphère** mais ne nous donnent aucune information directe sur les intérieurs stellaires. Les absorptions et réémissions continues sur de toutes petites échelles spatiales conduisent rapidement à l'établissement d'un équilibre statistique dans l'occupation des différents états : on parle d'équilibre thermodynamique local. Pour les photons, la fonction décrivant cette occupation des différents états énergétiques est la fonction de Planck (voir Sect. 1.6.). L'intensité spécifique, c'est-à-dire l'énergie rayonnée par unité de temps, de fréquence, de surface et d'angle solide (voir cours de transfert radiatif) est également décrite par la fonction de Planck  $B_\nu(T)$  :

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/(kT)) - 1} \quad (41)$$

Et on a la loi de Stefan-Boltzmann pour l'intensité spécifique bolométrique :

$$I = B(T) = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi \quad (42)$$

Décrivons maintenant le transfert d'énergie par la radiation proprement dit.

### 3.6.1 Un modèle simple (mais approximatif)

Simplifions le problème en prenant la représentation schématique suivante du transfert par la radiation. Nous considérons 2 plaques de températures  $T$  et  $T + \delta T$  séparées par une distance correspondant à un libre parcours moyen  $\ell$ . La loi de Stefan-Boltzmann nous dit que le flux d'énergie émis vers le haut par la plaque inférieure est  $F^+ = \sigma T^4$ . Le flux émis vers le bas par la plaque supérieure est  $F^- = \sigma(T + \delta T)^4$ . Le bilan des deux nous donne donc un flux total d'énergie vers le haut  $F = F^+ - F^-$ . Un simple développement de Taylor limité au premier ordre, ce qui est parfaitement admissible ici vu la valeur minuscule du libre parcours moyen nous donne dès lors :

$$\begin{aligned} F &= F^+ - F^- \\ &= -\sigma((T + \delta T)^4 - T^4) \\ &\simeq -\sigma \frac{dT^4}{dr} \ell = -\frac{\sigma}{\kappa\rho} \frac{dT^4}{dr} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé pour la dernière étape la relation entre libre parcours moyen et opacité donnée par  $\ell = 1/(\kappa\rho)$ . Le raisonnement simple que nous avons fait ici permet

de comprendre de façon schématique l'origine du transfert d'énergie par la radiation. Comme  $dT/dr < 0$ , le flux est dirigé vers le haut et d'autant plus important que ce gradient de température est élevé. On voit aussi que l'opacité du gaz stellaire est un frein à ce mécanisme de transport de l'énergie. Cependant, cette représentation en 2 couches est très approximative. Faisons maintenant un calcul plus rigoureux :

### 3.6.2 Un modèle rigoureux du transfert radiatif

L'équation de transfert radiatif dans une stratification à plan parallèle est donnée par :

$$\frac{\mu}{\kappa_\nu \rho} \frac{dI_\nu}{dr} = -\mu \frac{dI_\nu}{d\tau} = B_\nu - I_\nu, \quad (43)$$

où  $I_\nu$  est l'intensité spécifique,  $\mu = \cos \theta$  ( $\theta$  étant l'angle entre la direction de propagation et la direction radiale),  $\kappa_\nu$  est l'opacité à la fréquence  $\nu$  et  $\tau$  est la profondeur optique ( $d\tau = -\kappa_\nu \rho dr$ ).  $B_\nu$  est la fonction source, à savoir la fonction de Planck sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local. L'intégration de cette équation donne la solution formelle suivante :

$$I_\nu(\tau) = \int_\tau^\infty B_\nu(T(\tau')) e^{-\tau'} d\tau' \simeq B_\nu(T(\tau)).$$

La dernière simplification dans cette expression résulte de la très petite valeur du libre parcours moyen comparativement à la hauteur d'échelle de température. En conséquence, une grande variation de  $\tau$  ne conduit qu'à une faible variation de température ;  $B_\nu(T(\tau))$  est donc une fonction variant bien plus lentement que l'exponentielle et elle peut être sortie de l'intégrale. Multiplions maintenant l'équation 43 par  $2\pi\mu$  et intégrons sur  $\mu$ . Utilisant  $I_\nu \simeq B_\nu$ , le membre de gauche donne :

$$2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{\kappa_\nu \rho} \frac{dI_\nu}{dr} d\mu \simeq 2\pi \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dr} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dr}. \quad (44)$$

Quant au membre de droite, le premier terme se simplifie car  $B_\nu$  ne dépend pas de  $\mu$ . Le deuxième terme vaut :  $-2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu = -F_\nu$ . En effet le flux monochromatique  $F_\nu$  est obtenu en projetant l'intensité spécifique sur la direction radiale (multiplication par  $\mu$ ) et intégrant sur toutes les directions. Nous avons donc :

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr}.$$

Intégrons maintenant sur toutes les fréquences, et nous trouvons :

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (45)$$

Dans cette expression, nous avons introduit la constante de radiation  $a$  telle que  $\sigma = ac/4$  et la moyenne de Rosseland définie par :

$$\kappa = \left[ \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right]^{-1}.$$

En multipliant l'équation 45 par  $4\pi r^2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} L_R &= 4\pi r^2 F \\ &= -\frac{16\pi r^2 acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}, \end{aligned} \quad (46)$$

qui est l'équation décrivant rigoureusement le transfert d'énergie par la radiation dans les étoiles,  $L_R$  étant la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon  $r$ . On appelle parfois celle-ci l'équation de la diffusion (radiative), car elle résulte du parcours Brownien de type "diffusif" des photons à travers l'étoile.

L'équation 46 est tout à fait analogue à la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur dans laquelle le flux de chaleur est également proportionnel au gradient de température. Le facteur  $4acT^3/(3\kappa\rho)$  fait donc office de coefficient de conduction thermique. Nous verrons dans une section ultérieure que  $dL/dr = 0$  dans les couches superficielles de l'étoile où aucune énergie n'est produite. Près de la surface, l'opacité devient très grande suite aux nombreuses transitions lié-lié et lié-libre possibles. En conséquence, la luminosité étant fixée, le gradient de température augmente fortement dans ces régions opaques pour que le transport de l'énergie soit possible. De même, des matériaux très isolant sur terre peuvent supporter de grands gradients de température sans perte de chaleur excessive.

### 3.6.3 Transport radiatif dans les étoiles en rotation rapide

Comme nous l'avons vu plus haut, les étoiles en rotation n'ont plus la symétrie sphérique. La généralisation de l'équation de transport par la radiation (equation 45) s'écrit alors :

$$\vec{F} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T. \quad (47)$$

En particulier, pour une étoile en rotation cylindrique, nous avons vu que pression, densité et température sont constants sur des equipotentiels  $\Psi = cst$ . On peut donc écrire dans ce cas :

$$\vec{F} = -\chi(\Psi) \frac{dT}{d\Psi} \nabla \Psi, \quad (48)$$

où  $\chi \equiv 4acT^3/(3\kappa\rho)$ . Les équipotentielles sont plus resserrées ( $|\nabla\Psi|$  plus élevé) au pôle qu'à l'équateur. Le long d'une équipotentielle, le flux décroît donc du pôle vers l'équateur. C'est en particulier le cas à la surface. Par définition, la température effective est reliée au flux de surface par  $T_{eff} = (F/\sigma)^{1/4}$ . Elle décroît donc elle aussi du pôle vers l'équateur. Dans la littérature scientifique, on appelle cela l'"assombrissement gravitationnel".

### 3.7 Transport d'énergie par la convection

Cependant, cette augmentation du gradient de température a ses limites dans les étoiles aussi bien que sur terre ; au-delà d'un certain gradient, le milieu peut devenir instable vis-à-vis de la convection. C'est par exemple le cas dans une casserole d'eau posée sur une plaque chauffante : si le chauffage est suffisamment intense, des mouvements convectifs commencent à apparaître dans l'eau. Nous verrons que ces mouvements permettent également de transporter de l'énergie. Quand la convection apparaît, la radiation n'est donc plus le seul processus de transport de l'énergie du coeur vers la surface des étoiles.

Pour comprendre l'origine de la convection, imaginons la situation suivante. Considérons un élément de matière de l'étoile puis déplaçons-le vers le haut. Je suppose que la vitesse de ce déplacement est nettement inférieure à la vitesse du son. Dans de telles conditions, l'élément a le temps d'équilibrer sa pression avec celle du milieu environnant. J'introduis les notations suivantes pour les densités, températures, pressions de l'élément déplacé et du milieu environnant :

$\rho, T, P$  : densité, température et pressions initiales (mêmes valeurs pour l'élément et le milieu),

$\rho + \Delta\rho_e, T + \Delta T_e, P + \Delta P_e$  : densité, température et pressions finales de l'élément déplacé,

$\rho + \Delta\rho_m, T + \Delta T_m, P + \Delta P_m$  : densité, température et pressions finales du milieu environnant.

Comme mentionné plus haut, je suppose que l'équilibre de pression est maintenu, ce qui me donne :  $\Delta P_e = \Delta P_m = \Delta P$ . Comparons maintenant les densités de l'élément déplacé et du milieu environnant à l'arrivée.

**1er cas :**

$$\rho_e > \rho_m \quad \text{ssi} \quad \Delta\rho_e > \Delta\rho_m \quad \text{ssi} \quad \frac{\Delta\rho_e}{\rho} > \frac{\Delta\rho_m}{\rho} \quad (49)$$

Dans une telle situation, la résultante des forces de contact (pression) exercées sur l'élément déplacé par le milieu environnant est inférieure à son poids. La force d'Ar-

chimède est donc dirigée vers le bas et tend à ramener l'élément à sa position de départ :

*La stratification du milieu est stable vis-à-vis de la convection.*

**2ème cas :**

$$\rho_e < \rho_m \quad \text{ssi} \quad \Delta\rho_e < \Delta\rho_m \quad \text{ssi} \quad \frac{\Delta\rho_e}{\rho} < \frac{\Delta\rho_m}{\rho} \quad (50)$$

Dans une telle situation, la résultante des forces de contact (pression) exercées sur l'élément déplacé par le milieu environnant est supérieure à son poids. La force (poussée) d'Archimède est donc dirigée vers le haut et pousse encore plus l'élément vers le haut :

*La stratification du milieu est instable vis-à-vis de la convection.*

Dans cette situation instable, des mouvements convectifs à grande échelle prennent naissance. La force motrice à l'origine de ces mouvements est la poussée d'Archimède.

Revenons aux conditions d'apparition de la convection. Pour simplifier les choses et bien que cela ne soit à nouveau pas indispensable pour la démonstration, je suppose que l'état du gaz est décrite par la loi des gaz parfaits  $P \propto \rho T / \mu$ . Cette loi permet de relier immédiatement les variations relatives de pression, température et densité. Pour ce faire, j'utilise un résultat mathématique simple obtenu en passant aux logarithmes et faisant un développement de Taylor limité au premier ordre (voir démonstration en annexe A), ce qui donne :

$$\frac{\Delta\rho_{e,m}}{\rho} = \frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta T_{e,m}}{T}. \quad (51)$$

Cette expression est valable aussi bien pour l'élément déplacé que pour le milieu moyen. Substituons cette équation dans l'inégalité 50 et rappelons nous que les  $\Delta P$  sont identiques pour l'élément et le milieu. On trouve donc que le milieu est instable vis-à-vis de la convection ssi :

$$\frac{\Delta T_e}{T} > \frac{\Delta T_m}{T}. \quad (52)$$

Ce résultat est d'ores et déjà très important. Il montre que dans la situation d'instabilité vis-à-vis de la convection,  $T_e > T_m$ . Les éléments déplacés vers le haut se trouvent donc plus chauds que le milieu environnant et ils transfèrent de la chaleur à celui-ci. Inversement il est facile de voir, en suivant exactement le même raisonnement, que les éléments déplacés vers le bas acquièrent une température inférieure à

celle du milieu environnant ; ils pompent donc de la chaleur au milieu. Le bilan est donc clair : de la chaleur est pompée dans les couches inférieures et transmise aux couches supérieures par ces mouvements. Ils génèrent donc un flux net de chaleur dirigé vers le haut.

Divisons maintenant l'inégalité 52 par  $\Delta P/P$  et passons à la limite pour des variations infinitésimales. Comme  $\Delta P < 0$ , le sens de l'inégalité change et nous trouvons comme condition d'instabilité vis-à-vis de la convection :

$$\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_e < \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_m. \quad (53)$$

Supposons maintenant que la vitesse des éléments convectifs soit suffisamment élevée pour qu'ils n'aient pas le temps d'échanger une quantité significative de chaleur avec l'environnement lors de leur déplacement. En d'autres mots, supposons une détente adiabatique du gaz lors de son déplacement. La transformation étant supposée réversible, elle est également supposée isentropique. Cette hypothèse simplifie les développements mais n'est en fait pas réellement nécessaire comme nous le verrons plus loin. La pression décroissant vers le haut, l'élément subit donc ici une détente adiabatique avec diminution de sa densité. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_e = \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right|_S \quad (54)$$

Dans la communauté scientifique, on adopte en général la notation :  $\nabla_{ad} \equiv \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right|_S$ , et on l'appelle le « gradient adiabatique ». Je rappelle que, pour un gaz parfait complètement ionisé sans radiation, le « gradient adiabatique » vaut par exemple :  $\nabla_{ad} = 2/5$ . De façon générale,  $\nabla_{ad}$  est une variable d'état ne dépendant que des conditions locales de température, densité et composition chimique. Le « gradient réel » correspondant à la stratification du milieu moyen est noté quant à lui

$\nabla \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_m$ . Avec ces notations, nous voyons que le milieu est instable vis-à-vis de la convection ssi :

$$\nabla > \nabla_{ad}. \quad (55)$$

Avant de continuer avec le critère d'instabilité, il est utile de préciser un point : que l'on soit dans une région instable vis-à-vis de la convection ou non, de toute façon un gradient de température est présent et conduit à un transport au moins partiel de l'énergie par la radiation. Partons de l'équation 46 et faisons-y apparaître le gradient réel en multipliant et divisant par  $d\ln P/dr = -\rho Gm/(Pr^2)$ , on trouve :

$$L_R = \frac{16\pi acGmT^4}{3\kappa P} \nabla, \quad (56)$$

ou encore en isolant  $\nabla$  :

$$\nabla = \frac{3\kappa P L_R}{16\pi a c G m T^4} \quad (57)$$

Revenons maintenant au critère d'instabilité vis-à-vis de la convection. Un critère écrit sous la forme de l'inégalité 53 n'est pas pratique. En effet, le gradient de température est en général une inconnue. Le problème se pose plutôt en ces termes : on connaît les conditions locales de température et densité, on veut transporter une quantité d'énergie  $L$  par unité de temps, et la question est : le milieu est-il stable ou instable vis-à-vis de la convection dans ces conditions ? Pour répondre à cette question, on introduit une nouvelle grandeur appelée le « gradient radiatif » et notée  $\nabla_{rad}$ . On obtient  $\nabla_{rad}$  en remplaçant la luminosité radiative  $L_R$  apparaissant dans l'équation 57 par la luminosité totale  $L = L_R + L_c$  ( $L_c$  est la puissance transportée par la convection) :

$$\nabla_{rad} \equiv \frac{3\kappa P L}{16\pi a c G m T^4} . \quad (58)$$

*Le gradient radiatif est donc le gradient (fictif) que devrait avoir le milieu pour qu'il soit capable de produire une luminosité  $L$  donnée.*

## Le critère de Schwarzschild

Partant de cette définition, on obtient le critère d'instabilité vis-à-vis de la convection appelé le « Critère de Schwarzschild » :

Le milieu est instable vis-à-vis de la convection ssi :

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} . \quad (59)$$

Démonstration du critère de Schwarzschild :

Supposons le milieu instable vis-à-vis de la convection. Donc  $\nabla > \nabla_{ad}$  (55). D'autre part on a vu que la convection transporte de l'énergie, on a donc  $L > L_R$  et la comparaison entre les équations 57 et 58 donne :  $\nabla_{rad} > \nabla$ . Donc  $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ .

Supposons maintenant que le milieu soit stable vis-à-vis de la convection, on a donc :  $\nabla \leq \nabla_{ad}$ . D'autre part, comme il n'y a pas de convection, toute l'énergie est transportée par la radiation :  $L = L_R$  et donc  $\nabla_{rad} = \nabla$ . Donc  $\nabla_{rad} \leq \nabla_{ad}$ .

## Le critère de Ledoux

Il est important de remarquer que dès le départ des développements conduisant au critère de Schwarzschild, nous avons supposé que le milieu est homogène en composition chimique. Plus précisément, nous sommes partis de l'équation des gaz parfaits et avons négligé les variations du poids moléculaire moyen pour obtenir l'inégalité 52. Cela n'est pas toujours acceptable. Un autre critère tenant compte des variations du poids moléculaire a été proposé, c'est le « Critère de Ledoux » du nom de Paul Ledoux, astrophysicien liégeois remarquable pouvant être considéré comme le père de la théorie des pulsations stellaires. Nous supposons une équation d'état tout à fait générale  $\rho = \rho(T, P, \mu)$ . Sa forme différentielle nous donne donc :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} + \phi \frac{d\mu}{\mu}. \quad (60)$$

Pour un gaz parfait, nous avons simplement  $\alpha = \delta = \phi = 1$ , mais nous travaillons ici en toute généralité. Partons de l'inégalité 50 et substituons l'équation 60 dans chaque membre. Notons également que la composition chimique de l'élément déplacé reste constante ( $\Delta\mu_e/\mu = 0$ ), on trouve donc :

$$\frac{\Delta T_e}{T} > \frac{\Delta T_m}{T} - \frac{\phi}{\delta} \frac{\Delta\mu_m}{\mu}. \quad (61)$$

Divisons cette équation par  $\Delta P/P$  et passons à la limite pour des variations infinitésimales, nous trouvons le critère d'instabilité :

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_e < \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_m - \frac{\phi}{\delta} \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_m. \quad (62)$$

La suite du raisonnement est similaire à ce qu'on avait déjà fait, et on trouve finalement le

**Critère de Ledoux :** *le milieu est instable vis-à-vis de la convection ssi :*

$$\nabla_{rad} - \frac{\phi}{\delta} \nabla_{\mu} > \nabla_{ad}. \quad (63)$$

Dans cette équation nous avons utilisé la notation  $\nabla_{\mu} = \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_m$ . Ce critère s'interprète facilement. Considérons une région de l'étoile où le poids moléculaire diminue vers la surface. Un élément déplacé vers le haut emporte avec lui son poids moléculaire qui se trouve donc plus élevé que le milieu environnant. A température et



pression fixée, cela le rend plus dense que ce qui l'entoure ; la force d'Archimède s'exerce vers le bas et il retombe. On voit donc que  $\nabla_{\mu} > 0$  a un effet stabilisateur contrant l'apparition de la convection ; c'est bien dans ce sens que va l'inégalité 63. Inversement, un poids moléculaire augmentant vers l'extérieur est favorable à l'apparition de la convection.

## Situations physiques conduisant à la convection

Revenons au critère de Schwarzschild. Celui-ci nous permet facilement de mettre en évidence les situations physiques favorables à l'apparition de la convection ; ce sont celles conduisant à de grandes valeurs du gradient radiatif (éq. 58).

**Coeur convectif** Dans les régions centrales des étoiles, nous verrons que des réactions nucléaires prennent place conduisant à une grande production d'énergie. Cette énergie produite doit être transportée et  $L$  y est donc élevée. Dans certains cas, cette production d'énergie se limite à une petite fraction de la masse de l'étoile proche du centre. Ceci est une conséquence de la très grande sensibilité du taux de production d'énergie par les réactions nucléaires vis-à-vis de la température. La masse concernée  $m$  est donc petite,  $L$  est grand, donc  $L/m$  est très grand, donc  $\nabla_{rad} \propto L/m$  est grand et devient supérieur au gradient adiabatique. Dans cette situation, l'étoile a un coeur convectif.

### Enveloppe convective

Dans les régions superficielles d'une étoile, l'opacité devient bien plus élevée. Ceci est une conséquence de l'état partiellement ionisé des éléments à ces « basses » températures. Ainsi, de nombreuses transitions lié-lié et lié-libre sont possibles, rendant le gaz nettement plus opaque. Cette région superficielle de grande opacité et relativement faible température est d'autant plus grande que la température effective de l'étoile est basse. Comme  $\nabla_{rad} \propto \kappa/T^4$ , il y devient supérieur au gradient adiabatique et une enveloppe convective est présente. Dans le cas de notre soleil ( $T_{eff} = 5777$  K), l'épaisseur de l'enveloppe convective est de l'ordre d'un tiers du rayon total. Pour des étoiles encore plus froides, celle-ci englobe presque tout leur volume.

## Caractéristiques physiques des régions convectives

Un nombre sans dimension bien connu permet de se rendre compte du degré de turbulence des mouvements convectifs, c'est le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (64)$$

où  $V$  est la vitesse typique,  $L$  la dimension caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique du milieu. Ce nombre donne le rapport entre effets inertiels et visqueux. Les écoulements sont laminaires à faible  $Re$  et turbulents quand  $Re$  devient supérieur à quelques milliers. Dans le cas des étoiles, les vitesses des mouvements convectifs sont élevées, la dimension caractéristique est gigantesque et la viscosité cinématique est faible ; on trouve des valeurs du nombre de Reynolds allant de  $10^{10}$  à  $10^{13}$ , c'est gigantesque !!

*Les mouvements convectifs sont donc extrêmement turbulents dans les étoiles.*

Ce caractère extrêmement turbulent rend la modélisation des mouvements convectifs extrêmement difficile. Pour y parvenir rigoureusement, des simulations numériques hydrodynamiques nécessitant des mois de calcul (pour quelques heures de temps réel) doivent être effectuées. Ce qui importe le plus ici pour pouvoir construire un modèle de structure de l'étoile est de déterminer le gradient de température dans les zones convectives. Se limitant à ce but pragmatique, un traitement analytique très approximatif mais beaucoup plus simple à mettre en oeuvre que des simulations hydrodynamiques est fréquemment adopté : la théorie de la longueur de mélange (MLT). Je ne détaillerai pas ici ce traitement. Dans les grandes lignes, tout le spectre spatial associé aux mouvements convectifs y est ramené à une échelle caractéristique : la longueur de mélange  $l$ . On paramètre habituellement  $l$  de la façon suivante :  $l = \alpha |dr/d\ln P|$ , où  $\alpha$  est appelé paramètre de longueur de mélange. On suppose que les éléments convectifs subissent une accélération (constante) due à la poussée d'Archimède sur une longueur de mélange, puis transmettent leur excès d'enthalpie au milieu environnant. Par définition, le flux convectif est le flux d'enthalpie provenant des mouvements convectifs. Supposant le maintien de l'équilibre de pression entre élément et milieu, nous avons :

$$F_c = \rho c_p \langle V_{c,r}(T_e - T_m) \rangle, \quad (65)$$

Les crochets signifient qu'une moyenne a été prise sur tous les éléments convectifs montants et descendants. Négligeant les pertes radiatives durant le déplacement de l'élément et considérant un gaz parfait, la théorie MLT donne l'expression analytique suivante pour le flux convectif en une couche donnée :

$$F_c = \rho c_p T (P/\rho)^{1/2} \alpha^2 (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2}. \quad (66)$$

Nous pouvons facilement comprendre l'origine des facteurs apparaissant dans cette expression. Le facteur  $\rho c_p T \alpha (\nabla - \nabla_{ad})$  est associé à la quantité d'enthalpie ( $\rho c_p (T_e - T_m)$ ) transmise après un déplacement  $l$  ; et le facteur  $(P/\rho)^{1/2} \alpha (\nabla - \nabla_{ad})^{1/2}$  est associé à la vitesse acquise par l'élément convectif accéléré par la force d'Archimède.

Nous voyons apparaître dans les équations 65 et 66 le facteur  $\rho c_p T$  qui est la densité d'enthalpie moyenne. Descendant dans les couches internes de l'étoile,  $\rho$  et  $T$

augmentent très rapidement. La densité d'enthalpie (la « capacité calorifique ») y devient donc gigantesque. Une très faible différence relative de température entre l'élément convectif et le milieu  $((T_e - T_m)/T)$  suffit donc pour conduire à un grand échange de chaleur. En d'autres mots, la puissance à transporter étant imposée, il suffit d'une valeur de  $\nabla - \nabla_{ad}$  très légèrement supérieure à 0 pour conduire au flux convectif requis. Dans les régions internes où la capacité calorifique est très grande, la convection est un moyen très efficace de transport de l'énergie. En conséquence, le gradient de température est à peine supérieur au gradient adiabatique :

$$dT/dr \simeq -\nabla_{ad} \frac{Gm\rho T}{r^2 P}. \quad (67)$$

Par contre,  $\rho$  et  $T$  deviennent bien plus faibles tout près de la surface de l'étoile. Pour pouvoir transporter la puissance requise,  $\nabla - \nabla_{ad}$  doit donc y être nettement supérieur à 0. La modélisation de cette région proche de la surface est, on s'en rend compte, le point le plus délicat. La théorie de la longueur de mélange n'en donne une description que très approximative.

### 3.8 Conservation de l'énergie

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'équilibre hydrostatique de l'étoile impose un contraste de température gigantesque entre le coeur et la surface. Ce dernier conduit obligatoirement à un transport massif de chaleur du coeur vers la surface. Comme nous le verrons en détail dans une section ultérieure, les températures très élevées au coeur des étoiles ( $\approx 15 \times 10^6$  K pour le soleil) conduisent à des réactions de fusion nucléaire. Celles-ci fournissent de l'énergie sous forme de chaleur au plasma stellaire. C'est cette énergie produite au coeur qui, dans la plupart des cas, est ensuite transportée vers la surface puis rayonnée par l'étoile. Il importe cependant de bien comprendre que ces réactions nucléaires ne sont pas la cause du rayonnement des étoiles. Pour clarifier ce point, considérons le soleil et imaginons que, par un coup de baguette magique, je stoppe instantanément toutes les réactions nucléaires. Que se passera-t-il instantanément ? Nous n'avons plus d'apport de chaleur par unité de temps, mais la capacité calorifique est gigantesque au coeur du soleil. La température n'est donc pas immédiatement modifiée. L'équilibre hydrostatique est donc maintenu et le rayon du soleil reste le même. La cause du transport de chaleur au sein du soleil est le gradient de température y régnant. Comme celui-ci n'est pas modifié, la luminosité de l'étoile reste la même. Les réactions nucléaires n'affectent donc pas de façon immédiate la structure de l'étoile. Il faudrait attendre des millions d'année pour se rendre compte que ces réactions ont été brusquement stoppées ! Les processus de production d'énergie sont, comme nous le verrons, centraux pour comprendre l'évolution à long terme des étoiles ; mais ils n'occupent qu'un

rôle secondaire dans la détermination de leur structure instantanée. Ceci étant dit, faisons un bilan des processus de production et de perte d'énergie au sein des étoiles.

On définit  $\epsilon_n$  comme le taux de production locale d'énergie par les réaction nucléaires par unité de temps et de masse. Considérons une coquille sphérique située à une distance  $r$  du centre de l'étoile, d'épaisseur  $\delta r$  et de masse  $\delta m$  petite. L'apport de chaleur à cette coquille sphérique par unité de temps provenant des réactions nucléaires en son sein est  $\epsilon_n \delta m$ .

Suite au gradient de température, un flux de chaleur convective et/ou radiative est présent aux deux interfaces de cette coquille. La puissance transportée à travers la sphère de rayon  $r$  et masse  $m$  est  $L(m)$ ; c'est un apport de chaleur par unité de temps à la coquille sphérique. A l'autre extrémité de la coquille, la puissance transportée à travers la sphère de rayon  $r + \delta r$  et masse  $m + \delta m$  est  $L(m + \delta m)$ ; c'est de la chaleur perdue par la coquille sphérique par unité de temps.

Je définis l'équilibre thermique local (à ne pas confondre avec l'équilibre thermodynamique local) comme une situation physique où le bilan entre chaleur fournie au gaz et chaleur perdue par celui-ci est nul en chaque couche de l'étoile. Faisons ce bilan pour notre coquille sphérique, nous avons donc à l'équilibre thermique :

Chaleur fournie :  $L(m) + \epsilon_n \delta m$  égale chaleur perdue :  $L(m + \delta m)$ . Nous avons donc :

$$\delta L = L(m + \delta m) - L(m) = \epsilon_n \delta m. \quad (68)$$

Divisons par  $\delta m$  et passons à la limite, nous trouvons

**l'équation de conservation de l'énergie à l'équilibre thermique :**

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon_n, \quad (69)$$

ou encore en utilisant l'équation 15 :

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon_n. \quad (70)$$

Nous voyons que, dans les couches de réactions nucléaires, la luminosité doit augmenter vers l'extérieur. L'équation 69 est facilement intégrée; se rappelant que la luminosité est nulle au centre ( $L(0) = 0$ ), nous trouvons la forme globale de l'équation de conservation de l'énergie à l'équilibre thermique :

$$L(M) = \int_0^M \epsilon_n dm. \quad (71)$$

La luminosité, c'est la puissance rayonnée par l'étoile est égale à la puissance produite par les réactions nucléaires dans l'entièreté de l'étoile.

Nous verrons que durant les phases de combustion nucléaire, l'équilibre thermique sera en général établi. Dans de telles situations, nous pouvons utiliser l'équation 69. Cependant, nous verrons aussi qu'entre chaque phase de combustion nucléaire, l'étoile passe par une phase transitoire hors équilibre thermique. Considérons donc maintenant ce cas de figure. Hors équilibre thermique, la chaleur fournie au gaz par unité de temps n'est pas nulle. Notons  $dq/dt$  la chaleur fournie par unité de temps et de masse au gaz. La première loi de la thermodynamique, nous donne pour une transformation réversible :

$$\frac{dq}{dt} = T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + P \frac{dv}{dt}. \quad (72)$$

La chaleur fournie au gaz conduit soit à une augmentation de son énergie interne, soit lui permet d'effectuer un travail de dilatation. D'autre part, le bilan des apports et pertes de chaleur effectué plus haut nous montre que la chaleur fournie par unité de temps à la coquille de masse  $\delta m$  est :

$$\frac{dq}{dt} \delta m = \epsilon_n \delta m + L(m) - L(m + \delta m). \quad (73)$$

Divisons cette équation par  $\delta m$ , passons à la limite et utilisons l'équation 72, nous trouvons l'équation de conservation de l'énergie hors équilibre thermique :

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + P \frac{dv}{dt} = \epsilon_n - \frac{\partial L}{\partial m}. \quad (74)$$

Une situation typique hors équilibre thermique correspond à la phase de proto-étoile précédant le déclenchement des réactions nucléaires.  $\epsilon_n = 0$  durant cette phase. Comme  $L$  doit nécessairement être positif à la surface et nul au centre,  $\partial L / \partial m > 0$ . L'équation 74 nous montre que  $du/dt + Pdv/dt$  doit être négatif. On verra que le terme  $Pdv/dt$  domine et l'étoile va se contracter durant cette phase.

Il est habituel de vouloir donner à l'équation de conservation de l'énergie une forme similaire, qu'on soit ou non à l'équilibre thermique. On définit alors  $\epsilon_{grav} = -Tds/dt$ . Avec cette définition, l'équation 74 se réécrit donc :

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon_n + \epsilon_{grav}. \quad (75)$$

Oubliant qu'on est en fait hors équilibre thermique, on pourrait voir  $\epsilon_{grav}$  comme l'apport d'énergie libéré par la contraction gravifique. Nous reviendrons en détail sur ceci plus loin dans le cours (théorème du Viriel).

### 3.9 Synthèse des équations de structure

Nous pouvons synthétiser comme suit les équations différentielles à résoudre pour décrire la structure d'une étoile. Nous considérons aussi bien le cas où la distance au centre  $r$  est choisie comme variable indépendante et le cas c'est la masse de chaque couche.

#### Masse de chaque couche :

Variable indépendante = rayon :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (76)$$

Variable indépendante = masse :

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (77)$$

#### Equilibre hydrostatique :

Variable indépendante = rayon :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho Gm}{r^2} \quad (78)$$

Variable indépendante = masse :

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (79)$$

#### Transfert de l'énergie :

a) Zone radiative :

Variable indépendante = rayon :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi r^2 acT^3} \cdot \quad (80)$$

Variable indépendante = masse :

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa L}{64\pi^2 r^4 acT^3} \cdot \quad (81)$$

b) Zone convective très efficace :

Variable indépendante = rayon :

$$\frac{dT}{dr} \simeq -\nabla_{ad} \frac{Gm\rho T}{r^2 P} \cdot \quad (82)$$

Variable indépendante = masse :

$$\frac{dT}{dm} \simeq -\nabla_{ad} \frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P}. \quad (83)$$

**Conservation de l'énergie :**

Variable indépendante = rayon :

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_n + \epsilon_{grav}). \quad (84)$$

Variable indépendante = masse :

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon_n + \epsilon_{grav}. \quad (85)$$

Faisons un bilan du nombre d'équations et d'inconnues dans ce système. Nous avons 4 équations différentielles. Les inconnues sont quant à elles au nombre de 7 :  $r$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $L$ ,  $\kappa$ ,  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_{grav}$ . Nous avons donc plus d'inconnues que d'équations, et il faut adjoindre d'autres équations au système pour que le problème mathématique à résoudre ait une solution unique. Ce sont tout d'abord les équations décrivant l'état de la matière stellaire. Nous avons vu plus haut l'équation d'état d'un gaz parfait (équation 38). Plus généralement, les équations d'état du gaz ont la forme algébrique :

$$\rho = \rho(T, P, X_i), \quad u = u(T, P, X_i), \quad s = s(T, P, X_i) \dots \quad (86)$$

où les abondances  $X_i$  définissent la composition chimique de l'étoile. L'opacité dépend également des conditions locales de température et pression ainsi que de la composition chimique. Son calcul est très complexe (voir section ultérieure), mais nous pouvons espérer obtenir finalement une équation de la forme :

$$\kappa = \kappa(T, P, X_i). \quad (87)$$

Finalement, le taux de production d'énergie par les réactions nucléaire peut également être déterminé pour des température, pression et composition chimique données (voir section ultérieure) :

$$\epsilon_n = \epsilon_n(T, P, X_i). \quad (88)$$

En substituant ces équations algébriques dans le système de 4 équations différentielles, nous avons maintenant autant d'équations que d'inconnues.

### 3.10 Conditions aux limites

Ayant 4 équations différentielles du premier ordre, 4 conditions aux limites doivent être adjointes au problème. Les 2 conditions à imposer au centre sont triviales, la masse du point central ainsi que la puissance qu'il produit sont nulles :

$$m(0) = 0 \ ; \quad L(0) = 0 . \quad (89)$$

L'obtention des conditions aux limites à la surface de l'étoile est par contre bien plus délicate. Les conditions physiques régnant dans l'atmosphère de l'étoile sont en effet complètement différentes. Le libre parcours moyen des photons y devient d'un coup considérable et il dépend très fortement de la fréquence lumineuse. On sépare donc généralement le problème du calcul de modèles de structure interne des étoiles du calcul de modèles d'atmosphère stellaire. Dans cette approche, les modèles d'atmosphère calculés préalablement fournissent les conditions aux limites nécessaires pour permettre un calcul de structure interne. Plus précisément, on impose un raccord continu entre l'intérieur et l'atmosphère. La couche où ce raccord continu est imposé est souvent la photosphère. En physique des intérieurs stellaires, on définit en général la photosphère comme la couche où la température locale est égale à la température effective de l'étoile. Par définition de la température effective, nous avons donc à la photosphère :

$$T = \left( L / (4\pi R^2 \sigma) \right)^{1/4} . \quad (90)$$

C'est la première des 2 conditions aux limites requises. Pour obtenir la deuxième, des calculs de modèle d'atmosphère sont requis. Les paramètres libres pour la construction d'un modèle d'atmosphère sont la température effective, la gravité et la composition chimique. Pour des valeurs données de ces paramètres, ces modèles fournissent entre autre la pression à la photosphère (point où  $T = T_{eff}$ ). Nous pouvons ainsi obtenir une fonction :

$$P = P(T_{eff}, \log g, X_i) \quad (91)$$

donnant la pression à la photosphère en fonction de  $T_{eff}$ ,  $\log g$  et  $X_i$ .

À la photosphère,  $T_{eff} = T$  et  $g = GM/R^2$ . L'équation 91 peut donc s'écrire en terme des variables du problème :

$$P = P(T, R, M, X_i). \quad (92)$$

Cette équation est la deuxième des 2 conditions aux limites à imposer au sommet du modèle de structure interne, à la photosphère.

Le problème mathématique à résoudre pour déterminer un modèle de structure interne d'étoile est donc bien défini. Notons qu'il est plus approprié de choisir la masse de chaque couche comme variable indépendante; en effet on peut souvent



supposer que la masse totale de l'étoile est conservée au cours de son évolution, c'est une donnée du problème. Par contre le rayon total est inconnu et variera au cours de l'évolution de l'étoile. Pour construire un modèle de structure interne, nous avons donc à résoudre un système de 4 équations différentielles avec 4 conditions aux limites.

Il est cependant très important de noter que la composition chimique du modèle doit être spécifiée car elle intervient de façon centrale dans les équations 86, 87, 88 et 92. La résolution de ce problème permet d'obtenir un modèle « statique » d'étoile de composition chimique donnée.

## 4 Etat de la matière stellaire

Nous avons brièvement considéré l'état de la matière stellaire précédemment. Nous y revenons maintenant en détail.

### 4.1 Composition chimique

La composition chimique affecte énormément l'équation d'état du plasma stellaire. Lors du Big Bang, seuls de l'hydrogène et de l'hélium ont pu être synthétisés. La composition chimique initiale des étoiles est donc en majorité de l'hélium et de l'hydrogène. Dans le cas de notre soleil, sa composition chimique en surface correspond à une fraction en masse d'hydrogène  $X \simeq 0.71$  et une fraction en masse d'hélium  $Y \simeq 0.28$ . Ces 2 valeurs ne sont pas très différentes pour la majorité des autres étoiles. Au fur et à mesure de leur évolution, les réactions de fusion nucléaire dans les régions centrales vont transformer cet hydrogène en hélium, puis l'hélium en carbone, ... Les astrophysiciens ont l'habitude d'appeler « métaux » tous les éléments autres que l'hydrogène et l'hélium. En fin de vie, l'explosion des étoiles massives en supernova va expulser ces nouveaux éléments synthétisés dans le milieu interstellaire. De nouvelles générations d'étoiles se formeront à partir de ce milieu modifié et la boucle recommence, conduisant à un enrichissement progressif en « métaux » du milieu interstellaire. Notre soleil s'est formé à partir d'une nébuleuse dont la fraction en masse de métaux est  $Z \simeq 0.01 - 0.015$ . Ceci en fait une étoile de population I. Au début de l'histoire de notre galaxie, les premières étoiles se sont formées dans un milieu nettement plus pauvre en métaux. Nous rencontrons par exemple ces vieilles étoiles dans les amas globulaires. Ce sont les étoiles de population II pour lesquelles  $Z \simeq 0.0001$  typiquement.

## 4.2 Gaz parfait et poids moléculaire moyen

Nous avons montré section 2.4 que l'ionisation du gaz stellaire conduit à la libération d'énormément d'espace libre entre les particules : la distance moyenne entre celles-ci est typiquement de l'ordre de  $10^5$  fois plus grande que la taille des noyaux. Ceci ne suffit cependant pas pour pouvoir conclure que ces particules se déplacent librement entre chaque collision. En effet, nous avons ici un plasma, c'est-à-dire un gaz de particules chargées. L'interaction coulombienne (à longue portée !) agit donc entre celles-ci. Pour nous rendre compte de son importance, comparons l'énergie cinétique des ions au potentiel électrostatique généré par ceux-ci. Dans les conditions typiques régnant dans les étoiles, nous trouvons :

$$E_{cin} \simeq \frac{3}{2}kT \approx keV > e^2/d, \quad (93)$$

$d$  étant la distance moyenne entre ions et  $e$  la charge de l'électron. Ceci résulte des très hautes températures (et donc très hautes énergies cinétiques d'agitation thermique) atteintes à l'intérieur des étoiles. L'interaction coulombienne affecte donc peu la trajectoire des particules entre 2 collisions. En conséquence, l'état du gaz sera en général raisonnablement bien décrit par l'équation d'un gaz parfait :

$$P_g = nkT = \frac{k\rho T}{\mu m_u}. \quad (94)$$

Nous voyons apparaître dans cette équation le nombre total de particules par unité de volume  $n$  et le poids moléculaire moyen  $\mu$  (défini ici de façon adimensionnelle). Rappelons comment celui-ci peut être déterminé, connaissant la composition chimique. Je suppose ici le gaz complètement ionisé. Il est donc composé d'électrons et de noyaux libres. La loi de Dalton me dit que la pression totale exercée par le gaz est égale à la somme des pressions partielles exercées par chaque constituant. Nous avons donc :

$$P_g = P_e + \sum_i P_i, \quad (95)$$

$P_e$  est la pression électronique et  $P_i$  la pression exercée par les ions  $i$ . De même, nous avons :

$$n = n_e + \sum_i n_i, \quad (96)$$

où  $n_e$  est le nombre d'électrons et  $n_i$  est le nombre d'ions  $i$  par unité de volume. La neutralité du gaz nous impose d'avoir autant d'électrons libres que de protons au sein des noyaux. Notons  $Z_i$  le nombre de protons dans le noyau  $i$ . Le nombre d'électrons égal au nombre de protons par unité de volume est donc :

$$n_e = \sum_i Z_i n_i. \quad (97)$$

En combinant ces 2 dernières équations, nous trouvons donc :

$$n = \sum_i (Z_i + 1)n_i. \quad (98)$$

Le nombre d'ions  $i$  par unité de volume est égale à leur densité  $\rho_i$  divisée par leur masse individuelle  $A_i m_u$ . Par définition de la fraction en masse, nous avons donc :

$$n_i = \frac{\rho_i}{A_i m_u} = \frac{\rho X_i}{A_i m_u}. \quad (99)$$

Combinant les équations 94, 98 et 99 nous trouvons donc :

$$P_g = nkT = kT \sum_i (Z_i + 1)n_i = \frac{k\rho T}{m_u} \sum_i (Z_i + 1)X_i = \frac{k\rho T}{\mu m_u}. \quad (100)$$

Nous voyons donc que le poids moléculaire moyen est donné par :

$$\mu = \left( \sum_i X_i (1 + Z_i) / A_i \right)^{-1}. \quad (101)$$

Il est important de noter la différence entre cette formule pour le poids moléculaire et celle correspondant à un gaz d'atomes (sans électrons libres). Pour un tel gaz atomique,  $Z_i$  devrait être remplacé par 0 dans l'équation 101.

Exercice :

Calculer les poids moléculaires des gaz complètement ionisés suivants :

a) hydrogène pur, b) hélium pur, c) hydrogène ( $X=0.7$ ) + hélium ( $Y=0.3$ ), d) hélium ( $Y=0.4$ ) + carbone<sub>12</sub> ( $X_C = 0.4$ ) + oxygène<sub>16</sub> ( $X_O = 0.2$ ).

### 4.3 Ionisation partielle

Il est cependant important de garder à l'esprit que le gaz n'est complètement ionisé que dans les couches suffisamment profondes de l'étoile. En dessous d'une certaine température, les électrons se recombinent progressivement avec les noyaux. Ces régions sont appelées « zones d'ionisation partielle ». Par exemple, pour une étoile de masse intermédiaire typique, la zone d'ionisation partielle de l'hydrogène ( $H^+ + e^- \leftrightarrow H$ ) se situe juste en-dessous de la photosphère, à des températures de 10000 – 20000 K. La 1ère zone d'ionisation partielle de l'hélium ( $He^+ + e^- \leftrightarrow He$ ) la chevauche à des température de 15000 – 25000 K. Enfin, la deuxième zone d'ionisation partielle de l'hélium ( $He^{++} + e^- \leftrightarrow He^+$ ) se situe un petit peu plus profond, à des températures de 35000-65000 K. Le potentiel d'ionisation augmente bien sûr

avec la charge des noyaux considérés, de sorte que les zones d'ionisation partielle des éléments les plus lourds sont situées encore plus profondément.

L'intérieur des étoiles est à l'équilibre thermodynamique. Dans une telle situation, un équilibre statistique s'établit entre les nombreuses ionisations et recombinaisons. Les outils puissants de la physique statistique permettent de déterminer la répartition entre ions, électrons libres et atomes, c'est l'équation de Saha (Meghnad Saha, 1920). Considérons pour simplifier le cas d'un gaz d'hydrogène pur. Je pose  $n_0$  le nombre d'atomes d'hydrogène (proton+électron liés),  $n_+$  le nombre d'ions (protons libres) et  $n_e$  le nombre d'électrons libres par unité de volume. L'équation de Saha s'écrit alors :

$$\frac{n_+ n_e}{n_0} = \frac{g}{h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2} e^{-\chi/kT}, \quad (102)$$

où  $g$  est une constante et  $\chi$  est le potentiel d'ionisation.

On note  $x_H$  le « degré d'ionisation » de l'hydrogène :

$$x_H = \frac{n_+}{n_0 + n_+}. \quad (103)$$

Pour un gaz parfait d'hydrogène pur, on a  $n_+ = n_e$ . L'équation d'état s'écrit donc :

$$P = (n_0 + 2n_+)kT = (1 + x_H)(n_0 + n_+)kT = (1 + x_H) \frac{k\rho T}{m_u}. \quad (104)$$

On voit que l'équation d'état est très sensible au degré d'ionisation. Plus la matière est ionisée, plus grand est le nombre d'électrons et donc de particules libres. A température et densité fixées, la pression augmente donc avec le degré d'ionisation. Combinant ces équations, on peut aisément déterminer  $x_H$  en fonction de la température et la pression :

$$\frac{x_H^2}{1 - x_H^2} = \frac{g}{h^3} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{P} e^{-\chi/kT} \quad (105)$$

Exercice : Porter en graphique le degré d'ionisation de l'hydrogène en fonction de la température, pour une pression fixée.

#### 4.4 L'intégrale de pression

Etablissons maintenant un résultat qui nous sera très utile par la suite. Etant donné un gaz de particules se déplaçant de façon isotrope, nous voulons déterminer la

pression de ce gaz, connaissant la distribution d'impulsion des particules.  
Rappelons tout d'abord que :

**La pression dans un gaz est donnée par le flux d'impulsion normale des particules.**

Ainsi, imaginons premièrement la situation simplifiée où toutes les particules auraient la même impulsion  $p$ , une vitesse de propagation  $v$ , un angle incident  $\theta$  par rapport à la surface traversée et notons  $n$  le nombre de particules par unité de volume. Dans ce cas, les composantes normales de l'impulsion et de la vitesse sont  $p \cos \theta$  et  $v \cos \theta$ , de sorte que la pression exercée sur la surface traversée serait :

$$P = n p v \cos^2 \theta \quad (106)$$

Considérons maintenant un cas plus général où toutes les particules n'ont pas la même impulsion et se propagent de façon isotrope dans toutes les directions. Notons  $n(p)dp$  le nombre de particules par unité de volume ayant une impulsion entre  $p$  et  $p + dp$ . La pression dans ce gaz est donnée par l'intégrale de pression suivante :

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty v p n(p) dp. \quad (107)$$

**Démonstration :**

Le nombre de particules par unité de volume se propageant dans les directions délimitées par l'angle solide  $d\omega$  et ayant une impulsion entre  $p$  et  $p+dp$  vaut  $n(p)dpd\omega/(4\pi)$ .

En particulier,  $n(p)dp \sin \theta d\theta/2$  nous donne le nombre de particules par unité de volume se propageant dans les directions d'angle entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  par rapport à la normale et ayant une impulsion entre  $p$  et  $p + dp$  (on a bien  $\int_0^\pi n(p) \sin \theta d\theta = 2n(p)$ ).

Utilisant l'équation 106, la pression exercée par ces particules, c'est-à-dire le flux de leur impulsion normale est donc :

$$dP = n(p) p v \cos^2 \theta (\sin \theta/2) dp d\theta. \quad (108)$$

Intégrons cette expression sur toutes les direction  $\theta$  et sur toutes les impulsions, nous trouvons :

$$P = \int_0^\infty n(p) p v dp \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta /2 = \frac{1}{3} \int_0^\infty v p n(p) dp. \quad (109)$$

## 4.5 Pression de radiation

Le gaz d'ions et électrons n'est pas le seul à exercer une pression dans les étoiles, la radiation aussi. Pour le comprendre, il suffit de se rappeler que tout photon de fréquence  $\nu$  a une impulsion  $|p| = h\nu/c$ . Ces photons sont continuellement absorbés et réémis, échangeant ainsi leur impulsion avec le gaz.

L'intérieur des étoiles est très opaque de sorte que le rayonnement y est quasiment isotrope. Nous pouvons donc appliquer le résultat établis précédemment au cas d'un gaz isotrope de photons à l'équilibre thermodynamique (loi de Planck). Le nombre de photons ayant une impulsion entre  $p$  et  $p + dp$  est  $n(\nu)d\nu$  où  $p = h\nu/c$  et leur vitesse est la vitesse de la lumière  $c$ . L'intégrale de pression nous donne donc :

$$P_{rad} = \frac{1}{3} \int_0^\infty h\nu n(\nu) d\nu = \frac{1}{3} \int_0^\infty E(\nu) d\nu, \quad (110)$$

où  $E(\nu)$  est la densité d'énergie radiative par unité de fréquence ; elle est donnée par la loi de Planck. Son intégrale sur toute les fréquences donne la densité d'énergie radiative ; c'est la loi de Stefan-Boltzmann qui s'écrit en terme de densité d'énergie :

$$\int_0^\infty E(\nu) d\nu = aT^4 \quad (111)$$

et nous trouvons le résultat final :

$$P_{rad} = \frac{1}{3} aT^4. \quad (112)$$

Nous voyons que la pression de radiation augmente comme la 4ème puissance de la température.

L'équation d'état d'un gaz parfait + radiation est donc donnée par :

$$P = P_g + P_{rad} = \frac{k\rho T}{\mu m_u} + \frac{1}{3} aT^4. \quad (113)$$

Nous y voyons que dans des conditions de très haute température et relativement faible densité, la pression de radiation devient significative comparativement à la pression du gaz d'ions et électrons.

## 4.6 Dégénérescence quantique du gaz d'électrons

Dans les sections précédentes, nous avons négligé un aspect important. Les électrons et les baryons sont des fermions et en conséquence, ils doivent obéir au

### Principe d'exclusion de Pauli :

2 fermions ne peuvent pas être dans le même état quantique.

Dans les condition de relativement faibles densité, ce principe n'implique pas de contrainte forte sur le gaz. Les fermions et en particulier les électrons ayant suffisamment d'espace libre autour d'eux, le nombre d'états quantiques accessibles est bien plus élevé que le nombre d'états effectivement occupés. Dans ce cas, l'équation d'état du gaz peut être décrite en raisonnablement bonne approximation par l'équation 113. Par contre, quand la densité augmente, le nombre d'états quantiques accessibles décroît et devient comparable au nombre d'états effectivement occupés. Dans ce cas, le principe d'exclusion de Pauli devient très contraignant, on dit que le gaz devient dégénéré.

Nous considérons ici un gaz de particules libres sans interactions entre elles (gaz parfait). Rappelons que l'espace de phase est l'espace à 6 dimensions donnant le vecteur position et le vecteur impulsion d'une particule. Nous nous concentrons ici sur le gaz d'électrons libres car nous verrons que c'est pour lui que cette dégénérescence peut apparaître. Les électrons étant des particules de spin  $1/2$ , 2 valeurs du spin sont possibles. Pour ceux-ci, le principe d'exclusion de Pauli s'énonce :

**Il ne peut y avoir plus de 2 électrons dans le volume d'espace de phase  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z = h^3$ .**

Pour comprendre comment cette contrainte va se manifester, rappelons tout d'abord la situation classique. Pour un gaz parfait classique à l'équilibre thermodynamique, la distribution des impulsion est donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f(p) = n_e \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right). \quad (114)$$

Dans cette expression,  $n_e$  est le nombre d'électrons libres par unité de volume et  $f(p) dp dV$  est le nombre d'électrons libres dans un volume  $dV$  ayant une impulsion de module compris entre  $p$  et  $p+dp$ . Cette distribution ne vérifie pas nécessairement le principe d'exclusion de Pauli, dans ces cas elle ne sera plus valide et il faudra plutôt utiliser la distribution de Fermi-Dirac sur laquelle nous reviendrons. Quantifions donc cette contrainte imposée par le principe d'exclusion. Le volume de l'espace de phase correspondant au volume spatial  $dV$  et à toutes les impulsions de module compris entre  $p$  et  $p + dp$  est :  $4\pi p^2 dp dV$  (volume de la coquille sphérique de rayon entre  $p$  et  $p + dp$ ).

Faisons une simple règle de trois : dans le volume  $h^3$ , le nombre d'électrons maximum est 2 ; dans le volume  $4\pi p^2 dp dV$ , le nombre d'électrons maximum est donc :  $8\pi p^2/h^3 dp dV$ . Par définition,  $f(p) dp dV$  est le nombre d'électrons dans ce volume. Le principe d'exclusion de Pauli impose donc :

$$f(p) \leq 8\pi p^2/h^3. \quad (115)$$

La distribution de Maxwell-Boltzmann ne vérifie pas toujours cette inégalité. Une première façon de la transgresser est de porter la densité électronique  $n_e$  (et donc la densité) à une valeur suffisamment haute. Une autre façon est d'abaisser suffisamment la température. En effet le maximum de cette distribution est donné par  $p_{max} = \sqrt{2m_e kT}$ , et pour  $T$  suffisamment petit  $f(p_{max}) > 8\pi p^2/h^3$ .

## Critère de dégénérescence

Nous pouvons quantifier précisément les conditions de température et densité où la dégénérescence va apparaître. Le raisonnement que nous ferons est approximatif mais le résultat final est rigoureux.

Le volume spatial disponible par électron est l'inverse du nombre d'électrons par unité de volume :

$$V_S = \frac{1}{n_e}. \quad (116)$$

On introduit ici le poids moléculaire par électron défini comme :

$$\mu_e \equiv \frac{\rho}{m_u n_e}. \quad (117)$$

On a donc :

$$V_S = \frac{\mu_e m_u}{\rho} \quad (118)$$

Le volume quantique occupé par un électron est donné par l'extension de sa fonction d'onde. Nous admettons ici que celui-ci est de l'ordre du cube de la longueur d'onde de de Broglie :

$$V_Q \simeq \lambda^3 = \frac{h^3}{(m_e v)^3} \quad (119)$$

Tant que le volume quantique est nettement inférieur au volume disponible par électron, la dégénérescence n'apparaît pas :

$$\begin{aligned} V_Q &< V_S \\ \Leftrightarrow \frac{h^3}{(m_e v)^3} &< \frac{\mu_e m_u}{\rho}. \end{aligned}$$



On a en moyenne  $m_e v^2 = 3kT$ , le critère pour être hors dégénérescence est donc :

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{(3m_e kT)^{3/2}} &< \frac{\mu_e m_u}{\rho} \\ \Leftrightarrow \frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} &< \frac{m_u (3m_e k)^{3/2}}{h^3}. \end{aligned} \quad (120)$$

Notons qu'une autre façon plus mathématique d'établir le critère de dégénérescence est d'imposer que la distribution de Maxwell-Boltzmann (équation 114) vérifie l'inégalité 115. Comme l'exponentielle tend vers 1 pour des petites impulsions, cette inégalité se ramène à :

$$\begin{aligned} n_e \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} &< 8\pi p^2 / h^3 \\ \Leftrightarrow \frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} &< \frac{2m_u (2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3}. \end{aligned} \quad (121)$$

A une constante de l'ordre de l'unité près, les inégalités 120 et 121 sont équivalentes.

Le critère habituellement pris pour l'apparition de la dégénérescence est (unités MKSA) :

$$\frac{\rho T^{-3/2}}{\mu_e} > 2.385 \times 10^{-5}. \quad (122)$$

Dans le membre de droite des inégalités 120 et 121, apparaît la masse des particules considérées. On voit donc que la dégénérescence apparaîtra avant tout pour le gaz d'électrons. Il faudrait des valeurs bien plus élevées de  $\rho T^{-3/2}$  pour qu'elle apparaisse pour les noyaux, l'unique cas extrême où il en est ainsi est celui des étoiles à neutrons. Par contre, la dégénérescence apparaît bien plus facilement pour le gaz d'électrons, ce qui a des conséquences très importantes dans l'évolution des étoiles.

## Gaz complètement dégénéré

Pour décrire les situations où le gaz est dégénéré, il faut utiliser la statistique de Fermi-Dirac. Celle-ci tend asymptotiquement vers la distribution de Maxwell-Boltzmann quand  $\rho T^{-3/2} \rightarrow 0$ . Il est intéressant d'étudier l'autre cas extrême où  $\rho T^{-3/2} \rightarrow \infty$ . On dit dans ce cas que le gaz est complètement dégénéré. Dans ce cas, la statistique de Fermi-Dirac tend asymptotiquement vers la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{8\pi p^2}{h^3} \quad \text{si } p \leq p_F \\ f(p) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

En d'autres mots, toutes les cases disponibles de l'espace de phase sont occupées par un électron jusqu'à l'impulsion  $p_F$  appelée **impulsion de Fermi**. Il est possible de déterminer analytiquement l'équation d'état du gaz dans ce cas extrême. Commençons par calculer le nombre total d'électrons par unité de volume.  $f(p) dp$  est le nombre d'électrons par unité de volume ayant une impulsion entre  $p$  et  $p+dp$ . Il suffit donc d'intégrer  $f(p)$  sur toutes les impulsion pour obtenir la densité électronique :

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u} = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3} \quad (123)$$

Calculons maintenant la pression électronique. Nous utilisons pour ce faire, l'intégrale de pression 107.

### **Gaz non-relativiste complètement dégénéré :**

Commençons par le cas d'un gaz non-relativiste. Dans ce cas, la vitesse est donnée par  $v = p/m_e$ . L'intégrale de pression s'écrit donc :

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{p^2 f(p)}{m_e} dp = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^4}{m_e h^3} dp = \frac{8\pi}{15h^3} \frac{p_F^5}{m_e}. \quad (124)$$

On peut facilement éliminer la pression de Fermi entre les équations 123 et 124. On obtient alors :

$$P_e = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} \left( \frac{3h^3}{8\pi m_u} \right)^{5/3} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} = K_1 \rho^{5/3}, \quad (125)$$

la pression varie comme la puissance 5/3 de la densité et est indépendante de la température.

### **Gaz extrêmement relativiste complètement dégénéré :**

Dans les cas d'extrême densité, les seules impulsions restant disponibles pour les électrons correspondent à des vitesses relativistes. Ceci sera le cas quand  $p_F > m_e c$ . On ne peut alors plus écrire  $v = p/m_e$ . Dans le cas extrêmement relativiste, la plupart des électrons ont une vitesse proche de la lumière. L'intégrale de pression donne alors :

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty p c f(p) dp = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi c p^3}{h^3} dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4. \quad (126)$$

A nouveau, on élimine facilement la pression de Fermi entre les équations 123 et 126. On obtient alors :

$$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} \left( \frac{3h^3}{8\pi m_u} \right)^{4/3} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} = K_2 \rho^{4/3}, \quad (127)$$

la pression varie comme la puissance 4/3 de la densité et est toujours indépendante de la température.

### Gaz partiellement relativiste complètement dégénéré :

Dans le cas intermédiaire où  $p_F \approx m_e c$ , il faut utiliser la relation de relativité restreinte :

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow v = \frac{p/m_e}{\sqrt{1 + (p/(m_e c))^2}}. \quad (128)$$

L'intégrale de pression donne alors :

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^4 dp}{m_e h^3 \sqrt{1 + (p/(m_e c))^2}}. \quad (129)$$

Dans tous ces cas complètement dégénérés, la pression exercée par les noyaux est négligeable comparativement à celle des électrons. Les expressions ci-dessus pour la pression électronique peuvent donc être utilisées pour obtenir la pression totale.

### Gaz partiellement dégénéré

Entre les cas extrêmes d'un gaz non-dégénéré et un gaz complètement dégénéré, on rencontre la situation d'un gaz partiellement dégénéré. Dans ce cas il faut utiliser la statistique de Fermi-Dirac :

$$f(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{1 + \exp(E/kT - \psi)}, \quad (130)$$

$\psi$  est le paramètre de dégénérescence ( $> 0$  pour un gaz dégénéré). Le comportement de cette fonction épouse la courbe  $8\pi p^2/h^3$  d'un gaz dégénéré pour les petites impulsions, ensuite elle décroît rapidement aux environs de l'impulsion de Fermi. Il est très important d'être conscient que, pour un gaz dégénéré, la température perd l'interprétation intuitive qu'on lui attribuait. Je rappelle que, hors dégénérescence,  $kT$  donne l'ordre de grandeur de l'énergie individuelle des particules du gaz. Ceci n'est plus du tout valable dans un gaz dégénéré. Considérons la fonction  $f(E)$  telle que  $f(E)dE$  est le nombre d'électrons d'énergie cinétique entre  $E$  et  $E + dE$ . Cette fonction épouse la courbe monotone ( $f(E) \propto \sqrt{E}$ ) d'un gaz complètement dégénéré

puis décroît rapidement aux environs de l'énergie dite de Fermi. La largeur de cette zone de décroissance rapide est de l'ordre de  $kT$ . Par contre l'énergie de Fermi où cette décroissance se produit est bien plus grande que  $kT$ . Dans un gaz dégénéré, la plupart des électrons ont une énergie cinétique bien plus grande que  $3/2 kT$ !

### Densité électronique et poids moléculaire par électron

Dans les développements précédents, apparaissent les grandeurs  $n_e$  et  $\mu_e$  telles que  $\mu_e = \rho/(m_u n_e)$ . Il est utile de déterminer leurs valeurs pour un gaz complètement ionisé donné. Dans un tel gaz, il y a autant d'électrons libres que de protons. Le nombre d'électrons libres par unité de volume est donc :

$$\begin{aligned} n_e &= \sum_i Z_i n_i \\ &= \frac{\rho}{m_u} \sum_i Z_i \frac{X_i}{A_i}, \end{aligned} \quad (131)$$

où  $i$  indice les différents types de noyaux,  $n_i$  est le nombre de noyaux  $i$  par unité de volume,  $X_i$  la fraction en masse des noyaux  $i$ ,  $Z_i$  et  $A_i$  leur nombre de protons et de baryons. Considérons un mélange d'Hydrogène (fraction en masse  $X$ ), Hélium (fraction en masse  $Y$ ) et d'éléments lourds (fraction en masse  $Z = 1 - X - Y$ ). Supposons en outre que pour les noyaux lourds, on ait en moyenne autant de protons que de neutrons. L'équation 131 donne dans ce cas :

$$n_e = \frac{\rho}{m_u} (X + Y/2 + (1 - X - Y)/2) = \frac{\rho}{m_u} \frac{1 + X}{2}$$

On trouve donc pour  $\mu_e$  :

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_u} \simeq \frac{2}{1 + X}. \quad (132)$$

Le facteur  $1 + X$  faisant apparaître la fraction en masse d'hydrogène conduit donc au nombre d'électrons libres. Ceci est important pour déterminer la relation entre pression et densité dans les gaz dégénérés. Cela l'est aussi dans l'étude de l'interaction matière-rayonnement (opacité). L'absorption et la diffusion des photons dans les étoiles se fait par changement d'état des électrons. Dans les couches profondes, tous les électrons sont libres et il importe de connaître leur densité pour connaître l'opacité du milieu.

## 4.7 Etat de la matière en fonction de $\rho$ et $T$

Il est important de savoir quel sera l'état de la matière dans des conditions données de densité et température.

Premièrement, nous avons vu (equation 113) que la pression de radiation est  $P_R = (1/3)aT^4$  et la pression d'un gaz parfait non-dégénéré :  $P_g = k\rho T/\mu m_u$ . La pression de radiation domine donc quand :

$$\frac{1}{3}aT^4 > \frac{k\rho T}{\mu m_u}$$

En prenant le logarithme, on trouve donc :

$$\log T > \frac{1}{3}\log \rho + cst.$$

La frontière entre les régions où la radiation et le gaz domine est donnée par une droite de pente 1/3 dans un diagramme  $\log \rho - \log T$  ; au-dessus de cette droite la radiation domine et en-dessous c'est le gaz qui domine.

Considérons maintenant la frontière entre les régions où le gaz d'électrons est ou non dégénéré. Il suffit de prendre le logarithme de l'inégalité 122, le gaz est dégénéré ssi :

$$\log T < \frac{2}{3}\log \rho + cst.$$

La frontière entre les régions où le gaz d'électrons est ou non dégénéré est donnée par une droite de pente 2/3 ; au-dessus de cette droite le gaz n'est pas dégénéré, en-dessous le gaz d'électrons est dégénéré.

Nous avons vu que, quand le gaz d'électrons est dégénéré, la vitesse des électrons peut être ou non relativiste, ce qui affecte grandement l'équation d'état (comparer les équations 125 et 127). Le gaz d'électrons dégénérés devient relativiste quand l'impulsion de Fermi  $p_F$  est plus grande que  $m_e c$ . Celle-ci est reliée à la densité via l'équation 123. La vitesse des électrons d'un gaz dégénéré devient donc relativiste quand :

$$\rho > \mu_e m_u \frac{8\pi}{3} \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3, \quad (133)$$

la frontière correspond ici à une droite verticale dans un diagramme  $\log \rho - \log T$ .

Notons pour terminer que dans des conditions de grande densité et très faibles températures (à l'échelle stellaire) l'état des ions change de phase et passe à l'état cristalin. Ceci se produit dans les naines blanches froides. Ces dernières sont composées de carbone et oxygène. L'étoile peut alors être vue comme un immense diamant de la masse du soleil !

## 5 Interaction matière - rayonnement : l'opacité

Une connaissance précise de l'interaction entre matière et rayonnement est indispensable pour modéliser le transfert de l'énergie assuré par la radiation dans les étoiles. Rappelons que l'opacité intervient immédiatement dans l'équation de diffusion décrivant ce transfert à l'intérieur des étoiles (voir section 3.6) :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi r^2 acT^3}.$$

Nous avons démontré (Sect. 3.6.2) que l'opacité  $\kappa$  apparaissant est l'opacité moyenne de Rosseland définie par :

$$\kappa = \left[ \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right]^{-1}. \quad (134)$$

N'oublions pas cependant que, physiquement, l'opacité du milieu dépend presque toujours de la fréquence du rayonnement. Comme nous le verrons, dans certaines gammes de fréquences le milieu peut être très opaque alors qu'il est plus transparent dans d'autres. Pour décrire l'intérieur des étoiles, nous n'avons besoin "que" de l'opacité moyenne de Rosseland. Ceci résulte du fait que le libre parcours moyen des photons ( $\approx$  cm) y est bien plus petit que la hauteur d'échelle de température  $|dr/d\ln T|$ . Cependant, pour obtenir cette moyenne, il faut calculer l'intégrale de l'équation 134 et donc connaître l'opacité en fonction de la fréquence. Cette détermination est loin d'être évidente et nécessite des moyens de calcul considérables. Seuls quelques groupes dans le monde sont à même de le faire pour les besoins de la physique stellaire. Ils fournissent des tables donnant l'opacité moyenne de Rosseland en fonction de la température et la densité pour différentes compositions chimiques. Ces tables sont ensuite utilisées par le reste de la communauté pour construire des modèles de structure interne d'étoiles.

Regardons de plus près l'intégrale de l'équation 134. Nous y voyons apparaître 2 facteurs. Le premier est la dérivée de la fonction de Planck  $\partial B_\nu/\partial T$ . La région du spectre ayant le plus de poids dans l'intégrale est celle où  $\partial B_\nu/\partial T$  est maximal. On peut facilement voir que cela correspond à la région où la fonction de Planck  $B_\nu$  elle-même est maximale, c'est à dire aux longueurs d'onde de l'ordre de  $\lambda(cm) \approx 0.29/T$ . Ceci se comprend facilement, ce que nous voulons ici c'est modéliser le transport d'énergie par les photons. Ce qui importe donc c'est la gamme du spectre où il y a beaucoup de photons ; en dehors le nombre de photons est trop restreint pour contribuer au transport. En allant de la surface vers le centre de l'étoile, la température augmente. La région du spectre contribuant le plus au transport d'énergie ( $\lambda \approx 0.29/T$ ) se déplace donc vers des longueurs d'ondes de plus en plus courtes.

L'autre facteur apparaissant dans l'intégrale de l'équation 134 est l'inverse de  $\kappa_\nu$ . La moyenne de Rosseland est donc une moyenne harmonique sur les opacités ; ou

encore c'est une moyenne sur la transparence ( $\kappa_\nu^{-1}$ ) du milieu qu'il faut effectuer. On le comprend à nouveau en se rappelant que nous voulons modéliser le transport d'énergie par la radiation. Pour un gradient de température donné, le flux d'énergie est d'autant plus grand que le libre parcours moyen des photons est grand, c'est à dire l'opacité est petite; nous avons démontré Sect. 3.6.2 que le flux monochromatique vaut :

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr},$$

avec une dépendance en  $\kappa_\nu^{-1}$ . Pour déterminer le transport d'énergie total par la radiation, il faut donc accorder le plus de poids aux régions du spectre où l'opacité est faible, ce qui est bien le cas avec une moyenne harmonique. En résumé :

*Ce qui importe pour la modélisation du transport d'énergie par la radiation est de connaître la transparence du milieu dans la région du spectre  $\lambda \approx 0.29/T$  où il y a le plus de photons.*

Considérons maintenant de plus près les sources d'opacité. Pour les valeurs de température typiques des étoiles,  $kT \approx 1 - 1000 \text{ eV}$ . En effet la relation  $E = kT$  en  $\text{eV}$  s'écrit  $E_{\text{eV}} = 8.62 \times 10^{-5} T(K)$ . Seules les transitions entre niveaux d'énergie des électrons sont de cet ordre de grandeur, ce sont donc elles qu'il faut regarder de près pour déterminer l'opacité du milieu. Par contre, les niveaux d'énergie nucléaires sont de l'ordre du MeV. C'est bien trop élevé pour une étoile comme notre soleil, l'interaction entre les noyaux et le rayonnement n'y joue donc pas de rôle. La seule exception concerne les phases ultimes de l'évolution des étoiles (explosion en supernova). Durant cette explosion, les températures centrales pourront atteindre des valeurs gigantesques de l'ordre de  $10^{10} \text{ K}$ , et donc des énergie individuelles de l'ordre du MeV, les photons auront alors l'énergie suffisante pour briser les noyaux. Nous n'en sommes pas là et nous pouvons nous restreindre ici aux transitions électroniques. Comme nous l'avons vu précédemment, les types de transition possibles sont d'un état lié à un autre état lié, d'un état lié à un état libre, d'un état libre à un état libre et enfin la diffusion électronique.

## 5.1 Transitions lié-lié

Dans une transition lié-lié, un électron absorbe un photon d'énergie  $\Delta E = h\nu$ , ce qui lui permet de passer d'un état lié d'énergie  $E_0$  à un état lié d'énergie supérieure  $E_1 = E_0 + \Delta E = E_0 + h\nu$ . Dans cette représentation simple du phénomène, on s'attendrait à ce qu'uniquement les photons de fréquence  $\nu_0 = \Delta E/h$  soient absorbés, et la section efficace  $\sigma(\nu)$  aurait la forme d'un  $\delta$  de Dirac à cette fréquence. Cependant différents effets vont élargir la gamme de fréquence permettant une transition donnée.

### Elargissement naturel :

Le premier de ces processus appelé élargissement naturel peut être associé à la relation d'incertitude temps-énergie. Comme tous les niveaux d'énergie ont un temps de vie  $\tau$  fini, leur énergie présente une incertitude d'autant plus grande que ce temps de vie est court. Au lieu d'un  $\delta$  de Dirac, la section efficace  $\sigma(\nu)$  est un profil Lorentzien centré sur  $\nu_0$  :

$$\sigma(\nu) \propto \frac{1}{1/(2\pi\tau)^2 + (\nu - \nu_0)^2}. \quad (135)$$

Cet élargissement naturel est toujours très petit par rapport aux autres contributions.

### Elargissement thermique :

Les particules du gaz présentent un spectre de vitesses donné par exemple par la distribution de Maxwell-Boltzmann hors dégénérescence. Du point de vue d'une particule en mouvement, le spectre d'une onde électromagnétique est décalé vers le bleu ou vers le rouge selon qu'elle se rapproche ou s'éloigne de la source émettrice, c'est l'effet Doppler. Pour des vitesses non-relativistes, ce décalage vaut  $\delta\nu/\nu_0 = V/c$  où  $V$  est la vitesse de rapprochement de la source. C'est évidemment la fréquence du point de vue de la particule qui importe pour l'absorption. Soit donc  $\nu_0$  la fréquence fixée par la mécanique quantique où s'effectue l'absorption du point de vue de la particule. Suite à l'agitation thermique, la particule a une certaine vitesse de composante  $V_z$  dans la direction de l'observateur. La fréquence du photon absorbé du point de vue de l'observateur est donc  $\nu = \nu_0(1 + V_z/c)$ . Hors dégénérescence, la distribution des vitesses  $V_z$  des particules de masse  $m$  suit une loi Gaussienne :

$$f(V_z) \propto \exp(-mV_z^2/(2kT)). \quad (136)$$

La distribution des fréquences permettant l'absorption du point de vue de l'observateur suit donc une telle loi : la section efficace d'absorption  $\sigma(\nu)$  est donnée par une gaussienne centrée sur  $\nu_0$  et d'écart type proportionnel à  $\sqrt{T}$ , c'est l'élargissement thermique.

### Elargissement collisionnel et effet Stark :

Lors d'une collision entre ions, leur potentiel est perturbé. On sait par exemple que les niveaux d'énergie des électrons liés sont perturbés lorsqu'un ion est plongé dans un champs électro-magnétique (effet Stark). Ce champs électro-magnétique peut par exemple résulter de la présence proche d'un autre ion lors d'une collision. Ce déplacement des niveaux d'énergie dépend des paramètres de la collision et varie donc d'un cas à l'autre. L'effet global du point de vue de l'observateur est un élargissement additionnel de  $\sigma(\nu)$  selon un profil Lorentzien.

La forme finale de la section efficace  $\sigma(\nu)$  associée à une transition donnée est obtenue par convolution de ces différents profils.



La complexité du problème se révèle maintenant dans le nombre considérable de transitions lié-lié possibles. On peut par exemple repérer par un ensemble de 3 indices  $(k, i, j)$  un élément donné dans un état donné : le premier indice désigne l'élément chimique, le 2ème son degré d'ionisation et le 3ème le niveau énergétique de l'électron qui va subir la transition. L'ensemble des transitions lié-lié possibles est dès lors un ensemble à 4 dimensions  $\{(k, i, j_1, j_2)\}$  où  $j_1$  et  $j_2$  désignent respectivement le niveau énergétique de départ et d'arrivée de l'électron. Comme on s'en rend compte facilement, le cardinal de cet ensemble est un nombre extrêmement élevé. Notons  $n_{k,i,j}$  le nombre d'éléments dans l'état  $(k, i, j)$  par unité de volume. Notons  $\sigma_{k,i,j_1,j_2}(\nu)$  la section efficace associée à une transition lié-lié donnée. L'opacité  $\kappa(\nu)$  résultant de toutes les transitions lié-lié est donnée par :

$$\kappa(\nu) = \rho^{-1} \sum_{k,i,j_1,j_2} n_{k,i,j_1} \sigma_{k,i,j_1,j_2}(\nu). \quad (137)$$

Connaissant les abondances respectives des différents éléments chimiques, les différents  $n_i$  peuvent être obtenus à l'équilibre thermodynamique. Premièrement, l'équation de Saha permet de déterminer l'occupation de chaque degré d'ionisation :

$$\frac{n_{I+1} n_e}{n_I} = \frac{g_{I+1}}{g_I} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_I/kT}, \quad (138)$$

où  $n_I$  et  $n_{I+1}$  sont les densités en nombre de l'élément considéré aux degrés d'ionisation  $I$  et  $I + 1$ ,  $n_e$  est la densité électronique et  $\chi_I$  est le potentiel d'ionisation correspondant. Deuxièmement, la formule d'excitation de Boltzmann permet de déterminer l'occupation de chaque niveau d'énergie :

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{G_i}{G_j} e^{-\Delta E_{ij}/kT}. \quad (139)$$

où  $n_i$  et  $n_j$  sont les densités en nombre de l'élément considéré aux niveaux d'excitation désignés par  $i$  et  $i + 1$  et  $\Delta E_{ij}$  est la différence d'énergie entre ces deux niveaux. Les sections efficaces doivent enfin être déterminées pour toutes les transitions possibles, on se rend compte du calcul que cela représente ...

Rappelons cependant que toutes ces transitions n'ont pas une égale importance. Celles qui importent le plus sont celles pour lesquelles il y a un nombre significatif de photons, c'est à dire pour une température donnée, celles pour lesquelles  $\Delta E \approx kT$ . Pour prendre un exemple, considérons les éléments du groupe du fer (fer, nickel, cobalt, manganèse). Plus précisément, considérons les transitions partant du 3ème niveau électronique  $M$  vers un niveau bien plus élevé. Les températures  $T = \Delta E/k$  correspondantes sont de l'ordre de  $T \approx 200\,000$  K. A une telle température, l'opacité est donc nettement plus importante, on rencontre un pic d'opacité dans cette région de l'étoile. Ce pic d'opacité est particulièrement marqué pour les étoiles de type B. Il conduit à leur oscillation : ce sont les étoiles variables pulsantes de type  $\beta$  Cep et SPB. De façon extrêmement sommaire, lors de la phase de contraction du cycle

d'oscillation, l'augmentation de la température conduit à une baisse de l'opacité en-dessous du pic d'opacité et une augmentation de l'opacité au-dessus de celui-ci. La chaleur est donc piégée dans cette zone et convertie en énergie mécanique entretenant les oscillations. Jusqu'au début des années 1990 les opacités disponibles pour la communauté scientifique ne permettaient pas d'expliquer ce mécanisme. De nouveaux calculs d'opacités plus précis (Iglesias & Rogers, ...) et incluant bien plus de transitions furent alors effectués, conduisant à un pic d'opacité du fer bien plus prononcé. Le mécanisme à l'origine des pulsations des beta Cephei put alors être expliqué sans difficulté. Cet exemple parmi d'autres permet de se rendre compte de l'importance et des incertitudes dans les calculs d'opacité, on peut encore s'attendre à des changements significatifs dans l'avenir.

Pour terminer, rappelons que les transitions lié-lié ne jouent un rôle que dans les régions de l'étoile où suffisamment d'éléments ont encore des électrons liés. A des température de moins de  $10^6$  K, ce nombre est suffisant et les transitions lié-lié contribuent jusqu'à 50 % de l'opacité totale. Par contre à des températures de l'ordre de  $10^7$  K, presque tous les éléments sont entièrement ionisés et les transitions lié-lié contribuent à moins de 10 % de l'opacité totale.

## 5.2 Transitions lié-libre

Dans une transition lié-libre, un électron lié absorbe un photon d'énergie plus élevée que son potentiel d'ionisation :  $\Delta E \geq \chi$ . L'électron arrive donc dans le continuum d'électrons libres, emportant avec lui le surplus d'énergie absorbée sous forme d'énergie cinétique. Les photons pouvant être absorbés sont donc, pour une transition lié-libre donnée, ceux de fréquence  $\nu \geq \chi/h$ . Au-delà de cette fréquence critique, les calculs de mécanique quantique montrent que le comportement de la section efficace  $\sigma(\nu)$  suit une loi en  $\nu^{-3}$ . Considérons par exemple un élément donné. Soient  $\chi_i$  les potentiels d'ionisation pour chaque couche électronique  $i$  allant de 1 à  $n$ . Pour  $\nu < \chi_n/h$ , impossible d'ioniser l'élément et la section efficace est nulle. Pour  $\chi_n/h < \nu < \chi_{n-1}/h$ , un électron de la dernière couche peut absorber le photon et être envoyé dans le continu. On a une augmentation discontinue de la section efficace à  $\nu = \chi_n/h$  puis la section efficace suit ensuite une loi en  $\nu^{-3}$ . Pour des fréquences plus élevées telles que  $\chi_{n-1}/h < \nu < \chi_{n-2}/h$ , des électrons de l'avant dernière couche peuvent également absorber le photon et être envoyés dans le continu. On a donc une nouvelle augmentation discontinue de la section efficace à  $\nu = \chi_{n-1}/h$  puis une loi en  $\nu^{-3}$ , et ainsi de suite. Le profil de section efficace et donc d'opacité  $\kappa(\nu)$  correspondant aux transitions lié-libre a donc la forme d'une fonction en dents de scie avec des discontinuités aux différentes fréquences d'ionisation  $\nu_i = \chi_i/h$ . Comme pour les transitions lié-lié, pour déterminer la contribution à l'opacité de toutes les transitions lié-libre, il faut considérer tous les éléments à tous les degrés d'ionisation et niveaux d'énergie et sommer toutes les sections efficaces multipliées par les densités en nombre, il s'agit donc ici aussi d'un calcul considérable.

Ici aussi cependant, toutes ces transitions n'ont pas une égale importance. Celles qui importent le plus sont celles pour lesquelles il y a un nombre significatif de photons, c'est à dire pour une température donnée, celles pour lesquelles la fréquence du photon absorbé est de l'ordre de  $\nu \approx kT/h$ . A la température considérée, il faut aussi qu'il y ait un nombre significatif d'éléments dans l'état de départ pour que la transition lié-libre correspondante se produise suffisamment souvent. A quels potentiels d'ionisation cela correspond-il ? Les transitions lié-libre telles que  $\chi \ll kT$  ne joueront pas car le nombre d'éléments dans l'état de départ est bien trop faible dans ce cas (voir équation de Saha 138). D'un autre côté, si  $\chi \gg kT$ , le nombre de photons permettant cette ionisation est bien trop faible. Donc, ce sont les transitions lié-libre de potentiel  $\chi \approx kT$  qui joueront le plus.

Une question importante est évidemment comment la contribution à l'opacité moyenne de Rosseland des transitions lié-libre va varier avec la température. Ce qui importe dans cette moyenne c'est le domaine spectral  $\nu \approx kT/h$ . Oubliant les discontinuités, l'opacité  $\kappa(\nu)$  varie grosso-modo comme  $\nu^{-3}$ . Pour  $\nu_0 \approx kT/h$ , on trouve  $\kappa(\nu_0) \propto T^{-3}$ , et on peut s'attendre à ce que  $\kappa_R$  varie de la même façon. La justification était ici très grossière, on représente parfois par la loi suivante la dépendance de  $\kappa_R$  en température, densité et composition chimique pour les transitions lié-libre :

$$\kappa_{bf} \simeq 4.34 \times 10^{25} Z(1 + X)\rho T^{-3.5} \text{ cm}^2/\text{g}. \quad (140)$$

Cette loi analytique est extrêmement approximative. On ne l'utilisera jamais pour construire des modèles réalistes d'étoile. Outre la dépendance en  $T^{-3.5}$ , on y note aussi le facteur  $Z$  (fraction en masse des éléments lourds). Les éléments lourds sont en effet les seuls ayant encore des électrons liés à des températures supérieures à  $10^5$  K, ce sont donc eux qui importent pour les transitions lié-libre en-dessous de ces couches.

Comme pour les transitions lié-lié, les transitions lié-libre contribuent de façon significative à l'opacité dans les régions superficielles de l'étoile ( $T < 10^6$  K). Plus profond, presque tous les éléments sont entièrement ionisés et il n'y a presque plus d'électrons liés pouvant subir ces transitions.

### 5.3 Transitions libre-libre

Dans une transition libre-libre ou Brehmstrahlung inverse, un électron libre absorbe un photon d'énergie donnée et repart dans une autre direction avec un surplus d'énergie cinétique correspondant à l'énergie du photon. Il s'agit donc en quelque sorte d'une collision inélastique entre un électron et un photon. Notons qu'une telle transition ne peut se produire qu'avec la complicité d'un ion. En effet, il est facile de voir qu'avec un électron seul à l'arrivée il est impossible d'assurer à la fois la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du système. Une autre façon

de se rendre compte du rôle de l'ion est de considérer le processus inverse de cette transition : il s'agit du Brehmstrahlung où un électron est décéléré par un champ électrique (généré par exemple par un ion) et émet en conséquence un photon.

Contrairement aux processus précédents, il n'y a ici aucune contrainte sur la fréquence du photon absorbé. Des calculs simplifiés de mécanique quantique font apparaître une dépendance  $\sigma(\nu) \propto v^{-1}\nu^{-3}$  de la section efficace correspondant à ces transitions (plus la vitesse initiale  $v$  de l'électron est grande moins il est facile de le dévier). Partant de ce comportement, il est facile d'estimer comment la contribution à l'opacité moyenne de Rosseland des transitions libre-libre va varier avec la température. Hors dégénérescence, la vitesse typique des électrons libres est proportionnelle à  $\sqrt{T}$ . Comme ce qui compte c'est la région du spectre  $\nu_0 \approx kT/h$ , on trouve donc  $\kappa_R \approx \kappa(\nu_0) \propto T^{-3.5}$ . On utilise parfois la loi suivante (loi de Kramers) pour la dépendance de  $\kappa_R$  en température, densité et composition chimique pour les transitions libre-libre :

$$\kappa_{ff} \simeq 3.68 \times 10^{22} (X + Y)(1 + X)\rho T^{-3.5} \text{ cm}^2/\text{g}. \quad (141)$$

Cette loi analytique est moins approximative que l'équation 140. On ne l'utilisera pas pour construire des modèles réalistes d'étoile mais elle permet de comprendre les tendances. Outre la dépendance en  $T^{-3.5}$ , on y note aussi le facteur  $(X + 1)$ . Ceci résulte de l'équation 132 pour la densité électronique. Plus  $X$  est grand plus élevée est la densité électronique, c'est à dire le nombre d'électrons pouvant subir une transition libre-libre. Ce facteur est très important. Nous verrons par exemple plus loin dans le cours qu'il affecte fortement l'évolution de la taille du coeur convectif dans les étoiles massives. Sommairement, les réactions de fusion de l'hydrogène au coeur des étoiles conduisent à une diminution de  $X$  et donc de l'opacité. Le gradient radiatif (équation 58) y diminue donc ce qui est défavorable à la présence d'un coeur convectif (critère de Schwarzschild 59). L'extension en masse du coeur convectif décroîtra donc en général avec le temps. Notons qu'une situation où la loi de Kramers ne s'applique plus du tout est celle d'un gaz dégénéré. Dans ce cas, un grand nombre de transitions libre-libre sont impossibles car la case d'arrivée dans l'espace de phase est déjà occupée par un autre électron. Ceci rend l'opacité plus faible dans les gaz d'électrons dégénérés.

Les transitions libre-libre contribuent de façon significative à l'opacité dans les régions profondes de l'étoile ( $T > 10^6$  K). En effet, presque tous les éléments y sont entièrement ionisés, conduisant à un grand nombre d'électrons libres pouvant subir ces transitions.

## 5.4 Diffusion électronique (electron scattering)

D'un point de vue microscopique, on peut voir le processus de diffusion électronique comme une collision élastique entre un électron libre et un photon. Après collision,

le photon et l'électron repartent avec la même énergie mais dans d'autres directions. Ce processus ne fait intervenir que l'électron libre (pas besoin de la participation d'un ion). Par ce changement de direction des photons, ce processus contribue donc à l'opacité du milieu. L'interprétation classique macroscopique de ce phénomène est la suivante : une onde électro-magnétique produit une variation périodique du champ électro-magnétique dans le milieu où se trouvent les électrons libres. Ceci conduit à un mouvement oscillatoire (même fréquence que l'onde) des électrons libres qui réémettent donc à cette fréquence dans d'autres directions (comme dans une antenne radio).

Quand la vitesse des électrons est non-relativistes, on parle de **diffusion Thomson**. Quand la vitesse des électrons est relativistes, on parle de **diffusion Compton**.

Dans la limite non-relativiste, la section efficace associée à ce processus est une constante indépendante des conditions de température et densité, elle vaut :

$$\sigma_{es} = 0.655 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 . \quad (142)$$

Ceci donne en terme d'opacité (utilisant l'équation 132) :

$$\kappa_{es} = \frac{n_e}{\rho} \sigma_{es} = \frac{0.4}{\mu_e} \simeq 0.2(1 + X) \text{ cm}^2/\text{g} . \quad (143)$$

A nouveau nous voyons la dépendance en  $X + 1$  associée au nombre d'électrons libre, importante pour comprendre ce qui se passe dans les couches profondes de l'étoile.

## 5.5 Conduction électronique

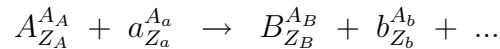
Bien qu'il ne s'agisse pas d'un processus résultant de l'interaction entre matière et rayonnement, il est utile de mentionner finalement le transport de l'énergie par les électrons libres. Dans les conditions de très grandes densités et relativement faibles températures, le gaz d'électrons devient dégénéré. Toutes les cases de faible énergie étant occupée, de très nombreux électrons ont une très grande énergie cinétique. Par collisions, cette énergie cinétique peut être transmise de proches en proches permettant un transfert de chaleur par un processus diffusif. C'est la conduction par les électrons libres. Comme pour le transport par les photons, le flux d'énergie transportée par cette conduction est proportionnel à  $-\nabla T$ . On mime en général cet effet comme une contribution supplémentaire à la transparence (inverse de l'opacité) du milieu. Donc lorsque la conduction électronique apparaît, tout se passe comme si l'opacité diminuait.

## 6 Les réactions nucléaires

Les réactions nucléaires jouent un rôle crucial dans l'évolution des étoiles. Premièrement, durant la majeure partie de cette évolution, elles sont la principale source d'énergie générée au cœur des étoiles. Si elles n'avaient pas lieu, les étoiles n'auraient d'autre choix que de puiser leur énergie rayonnée dans la libération d'énergie potentielle associée à leur contraction, c'est le théorème du Viriel que nous verrons plus tard dans le cours. L'histoire des étoiles serait en conséquence complètement différente. Pour modéliser la structure interne d'une étoile, un ensemble d'équations différentielles doit être résolu (voir Sect. 3.9). En particulier, le taux de production d'énergie par les réactions nucléaires  $\epsilon_n$  apparaît comme l'ingrédient central dans l'équation de conservation de l'énergie (éq. 85). Pour construire un modèle d'étoile, il importe donc de connaître comment varie ce taux en fonction des conditions thermodynamiques et de la composition chimique, c'est-à-dire connaître la fonction  $\epsilon_n(\rho, T, X_i)$ .

Deuxièmement, nous verrons que le moteur principal de l'évolution des étoiles est la variation de leur composition chimique. Celle-ci résulte pour l'essentiel des réactions nucléaires au cœur des étoiles. La connaissance des réactions nucléaires est donc essentielle pour comprendre l'évolution des étoiles au cours du temps. Nous verrons que différentes phases de réactions de fusion nucléaire s'enchaîneront au cours de la vie des étoiles : la fusion de l'hydrogène en hélium, la fusion de l'hélium en carbone, la fusion du carbone en oxygène, ... Les étoiles sont les usines de création de tous les éléments chimiques rencontrés dans l'univers (au-delà de l'hélium). En fin de vie, les étoiles les plus massives explosent en supernova et enrichissent le milieu interstellaire de ces nouveaux éléments. De nouvelles générations d'étoiles se forment ensuite à partir de ce milieu enrichi. C'est le cas en particulier de notre système solaire et c'est grâce à ce processus que nous trouvons sur terre tous les éléments indispensables à la vie. La discipline étudiant la synthèse des différents éléments chimiques dans l'univers s'appelle la nucléosynthèse.

Dans cette section, nous allons étudier de plus près à un niveau microscopique ces réactions nucléaires, oubliant temporairement la description globale des étoiles. Je commence par rappeler ici la forme générale d'une réaction nucléaire entre 2 noyaux :



## 6.1 Lois de conservation

Je rappelle pour commencer que, sauf exceptions, les réactions nucléaires obéissent à un certain nombre de lois de conservation.

### Conservation du nombre total de baryons

Ces baryons sont les protons et les neutrons. Désignons par  $A_X$  le nombre de baryons du noyau  $X$ . Pour la réaction ci-dessus, nous avons donc :

$$A_A + A_a = A_B + A_b + \dots$$

### Conservation de la charge totale

Les particules chargées intervenant dans les réactions nucléaires sont les protons, les électrons et les positons. Désignons par  $Z_X$  le nombre de protons du noyau  $X$ ,  $e_i^-$  et  $e_i^+$  le nombre d'électrons et positons capturés lors de la réaction,  $e_f^-$  et  $e_f^+$  le nombre d'électrons et positons émis lors de la réaction, nous avons :

$$Z_A + Z_a + e_i^+ - e_i^- = Z_B + Z_b + e_f^+ - e_f^- + \dots$$

### Conservation de la quantité de mouvement

Que nous nous placions dans le cadre de la mécanique classique ou de la mécanique quantique, la quantité de mouvement totale est une constante de mouvement. En termes simplifiés, dans toute réaction nucléaire la somme des quantités de mouvement initiales doit être égale à la somme des quantités de mouvement finales. Ceci conduit naturellement à se placer dans un référentiel dont l'origine est le centre de masse du système. Considérons la phase d'approche de 2 noyaux. Soient  $v_1$  et  $v_2$  leurs vitesses dans ce référentiel. Celles-ci vont varier au cours de l'approche (suite à l'interaction coulombienne) mais on aura toujours :

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) = m_\mu v.$$

Nous y voyons apparaître la masse réduite  $m_\mu$  et la vitesse relative  $v$ . L'équation de mouvement s'écrit alors pour des vitesses non-relativistes :

$$m_\mu \frac{dv}{dt} = -\nabla V(r) \quad (r = r_1 - r_2),$$

où  $V$  est le potentiel d'interaction (coulombienne).

En mécanique quantique, la position relative entre les noyaux est décrite par une fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  appelée *fonction d'onde de la particule relative*.  $|\psi(\vec{r})|^2$  nous donne la densité de probabilité que la position relative soit  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ . Dans la limite non-relativiste, cette fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_\mu} \nabla^2 \psi + V \psi. \quad (144)$$

La position du centre de masse du système est quand à elle décrite par une autre fonction d'onde caractéristique d'une particule libre (une onde plane par exemple), ce qui exprime la conservation de la quantité de mouvement dans le cadre quantique.

### Conservation du moment cinétique

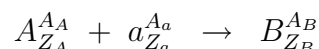
Le moment cinétique est également une constante de mouvement. En termes simplifiés, la somme des moments cinétiques orbitaux et des spins initiaux est égale à la somme des moments cinétiques orbitaux et des spins finaux. Dans la majorité des réactions de fusion nucléaire que nous considérerons ici, le moment cinétique orbital initial sera nul (collision frontale). Une exception importante sera cependant les réactions résonnantes pour lesquelles la probabilité de fusion peut être significative avec un moment cinétique orbital initial non-nul.

### Conservation du nombre leptonique

La conservation du nombre leptonique importe dans les désintégration  $\beta$  et capture électronique. L'émission d'un électron s'accompagne toujours de l'émission d'un anti-neutrino ; l'émission d'un positon ou la capture d'un électron s'accompagne de l'émission d'un neutrino.

## 6.2 Energies de réactions

Les aspects énergétiques sont comme nous l'avons dit essentiels. Regardons donc de plus près une réaction de fusion nucléaire générale :



La relation d'Einstein  $E = Mc^2$  établit une correspondance fondamentale entre masse et énergie. Dans les réaction nucléaires, il se fait que la somme des masse des noyaux initiaux n'est pas égale à la somme des masses finales. La différence entre les deux se traduit par un dégagement (réaction exothermique) ou une absorption (réaction endothermique) d'énergie. Plus précisément, pour la réaction de fusion l'énergie transmise au milieu sous forme de chaleur vaut :

$$Q = (M_A + M_a - M_B)c^2. \quad (145)$$

Il est utile d'introduire ici la notion d'excès de masse d'un noyau  $a$  donné :

$$\Delta\mathcal{M}_a \equiv (M_a - A_a m_u) c^2 = 931.478 (M_a/m_u - A_a) \text{ MeV}. \quad (146)$$

L'opposé de l'excès de masse est l'énergie de liaison du noyau, c'est à dire le travail à effectuer pour amener chacun des nucléons qui le composent à l'infini. Ceci conduit naturellement à la notion d'énergie de liaison par nucléon définie par :

$$f_a \equiv -\Delta\mathcal{M}_a / A_a. \quad (147)$$



On peut facilement exprimer la chaleur de réaction en fonction de ces grandeurs. Utilisant la conservation du nombre de baryons, on trouve :

$$Q = \Delta\mathcal{M}_A + \Delta\mathcal{M}_a - \Delta\mathcal{M}_B = A_B \left[ f_B - \left( \frac{A_A}{A_B} f_A + \frac{A_a}{A_B} f_a \right) \right]. \quad (148)$$

La courbe  $f(A)$  donnant l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre baryonique est fondamentale pour comprendre les aspects énergétiques des réactions nucléaires. Elle croît rapidement pour des noyaux légers, présente un maximum global au niveau du noyau de fer  $\text{Fe}^{56}$ , puis décroît lentement pour des noyaux plus lourds. On y remarque aussi des maximums locaux correspondant à des noyaux particulièrement stables :  $\text{He}^4$ ,  $\text{Be}^8$ ,  $\text{C}^{12}$ ,  $\text{O}^{16}$  (multiples de particules  $\alpha$ ). Dans l'équation 148, on voit que  $(A_A/A_B)f_A + (A_a/A_B)f_a$  est une moyenne pondérée par leur masse des énergies de liaison par nucléon des 2 noyaux initiaux.

Considérons la fusion entre 2 noyaux plus légers que le fer. Comme  $f(A)$  est une fonction croissante dans cette région, on a :  $(A_A/A_B)f_A + (A_a/A_B)f_a < f_B$ . L'équation 148 nous dit que  $Q > 0$ , il s'agit donc d'une réaction exothermique. **Les réactions de fusion entre noyaux plus légers que le fer sont exothermiques.**

Au contraire, considérons maintenant la fusion entre 2 noyaux plus lourds que le fer. Comme  $f(A)$  est une fonction décroissante dans cette région, on a :  $(A_A/A_B)f_A + (A_a/A_B)f_a > f_B$ . L'équation 148 nous dit que  $Q < 0$ , il s'agit donc d'une réaction endothermique. **Les réactions de fusion entre noyaux plus lourds que le fer sont endothermiques.**

### 6.3 Sections efficaces et taux de réactions

Introduisons maintenant la notion de taux de réaction nucléaire. Soit une expérience où des noyaux cibles  $a$  (nombre par unité de volume :  $N_a$ ) sont bombardés par des noyaux incidents  $A$  (nombre par unité de volume :  $N_A$ ) arrivant avec une vitesse  $v$  fixée, et pouvant produire une certaine réaction nucléaire. Le taux de réactions  $r_v$  est le nombre de réactions nucléaires se produisant par unités de temps et de volume. Celui-ci s'exprime par l'équation suivante :

$$r_v = \sigma(v) v N_A N_a, \quad (149)$$

où on voit apparaître une grandeur fondamentale, la **section efficace** de réaction  $\sigma(v)$ . Cette équation s'interprète facilement. Plus la vitesse relative  $v$  est grande et plus le nombre de couples de particules par unité de volume<sup>2</sup>  $N_A N_a$  est grand, plus nombreuses seront les collisions par unité de temps conduisant éventuellement à une réaction nucléaire. Notons ici que, si les 2 noyaux initiaux sont identiques, il faut mettre  $N_A^2/2$  au lieu de  $N_A N_a$  dans l'équation 149. Quand à la section efficace, on peut s'en donner la représentation suivante. On place en pensée sur chaque noyau

cible un disque de surface  $\sigma(v)$  perpendiculaire à la direction incidente. La réaction nucléaire aura lieu chaque fois qu'un noyau incident traverse l'un de ces disques. Toute la difficulté du problème réside évidemment dans la connaissance de cette section efficace qui dépendra fortement de  $v$ .

Avant d'y venir, rappelons-nous que la vitesse relative entre noyaux dans le plasma au coeur des étoiles n'est pas fixée mais suit une distribution bien spécifique résultant de l'agitation thermique. Pour y obtenir le taux de réaction, c'est à dire le nombre de réactions par unité de volume et de temps, il faut donc effectuer une moyenne des  $r_v$  pondérée par cette distribution. Comme  $N_A N_a$  ne dépend pas de  $v$ , nous devons juste considérer la moyenne des  $\sigma(v)v$ , ce que nous notons  $\langle \sigma(v) v \rangle$ . On a donc pour le taux de réaction :

$$r = \langle \sigma(v) v \rangle N_A N_a . \quad (150)$$

Nous verrons que seules de grandes vitesses relatives résultant d'une grande température permettent à ces réactions de se produire. Dans cette situation où les réactions nucléaires résultent de l'agitation thermique, on parle de **réactions thermonucléaires**. Nous verrons plus tard qu'il est utile de travailler en terme d'énergie plutôt que de vitesse relative. L'énergie cinétique totale, somme des énergies cinétiques des 2 noyaux dans le repère du centre de masse, appelée aussi *énergie cinétique de la particule relative* est donnée dans la limite non-relativiste par :

$$E = (1/2) m_\mu v^2 . \quad (151)$$

Pour un gaz non dégénéré, la distribution d'énergies cinétiques des particules relatives est celle de Maxwell-Boltzmann :

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) . \quad (152)$$

La moyenne des  $\sigma v$  vaut alors :

$$\langle \sigma(v) v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v(E) f(E) dE , \quad (153)$$

avec  $v(E) = \sqrt{2E/m_\mu}$  dans la limite non-relativiste.

Ayant défini le taux de réaction  $r$ , voyons maintenant comment on en déduit le taux de production d'énergie par unité de masse par les réactions nucléaires  $\epsilon$ . Pour une réaction donnée de taux  $r_k$  et produisant une énergie  $Q_k$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= Q_k r_k / \rho = Q_k \langle \sigma(v) v \rangle_k N_A N_a / \rho \\ &= \frac{Q_k}{M_A M_a} \rho X_A X_a \langle \sigma v \rangle_k , \end{aligned} \quad (154)$$

où  $X_A$  et  $X_a$  sont les fractions en masse des noyaux,  $M_A$  et  $M_a$  leurs masses, et nous avons utilisé la relation  $N_A = \rho X_A / M_A$ . Pour obtenir le taux total de production d'énergie par les réactions nucléaires, il faut ensuite sommer sur toutes les réactions :

$$\epsilon = \sum_k \epsilon_k . \quad (155)$$

Attaquons-nous maintenant au coeur du problème, à savoir la détermination des sections efficaces. Différents facteurs vont y contribuer.

### 6.3.1 Facteur géométrique

La première condition pour qu'une réaction nucléaire puisse avoir lieu est que les noyaux entrent en collision. Dans une vision simplifiée où on voit les noyaux comme des sphères rigides (boules de billard), la section efficace associée au phénomène de collision entre elles est  $\pi d^2$  où  $d$  est la somme des rayons des 2 noyaux. Nous savons aussi que dans cette vision classique, le changement de direction après collision dépend du paramètre d'impact  $b$ , relié au moment cinétique par  $L = bp$ . Il est facile de voir que la section efficace correspondant au phénomène "*Arriver avec un paramètre d'impact entre  $b$  et  $b + \delta b$* " est

$$\sigma_{\delta b} = \pi((b + \delta b)^2 - b^2) = \pi \delta b (2b + \delta b), \quad (156)$$

c'est en effet l'aire de l'anneau de rayons compris entre  $b$  et  $b + \delta b$ .

La représentation qu'en donne la physique quantique n'est pas aussi simple. Mais on peut aussi se poser la question : quelle est la section efficace correspondant au phénomène "*Collision entre deux noyaux avec un moment cinétique caractérisé par le nombre quantique  $\ell$* "? La réponse donnée par la mécanique quantique est :

$$\sigma_\ell = (2\ell + 1)\lambda^2/4\pi, \quad (157)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la particule relative. On peut interpréter ce résultat par le raisonnement semi-classique suivant. Les moments cinétiques possibles ne forment pas un continuum mais sont quantifiés aux valeurs  $L = \ell\hbar$ . Adoptant la formule  $L = bp$ , on en déduit que les valeurs du paramètre d'impact sont quantifiées aux valeurs  $b = \ell\hbar/p$ . En outre, la relation de de Broglie nous donne :  $p = 2\pi\hbar/\lambda$ . On trouve donc pour la quantification de  $b$  :

$$b = \ell\hbar/p = \ell\lambda/2\pi. \quad (158)$$

Suivant la formule 156 avec  $b = \ell\lambda/2\pi$  et  $\delta b = \lambda/2\pi$ , on obtient alors le résultat voulu :  $\sigma_\ell = \pi(\lambda/2\pi)(2\ell\lambda/2\pi + \lambda/2\pi) = (2\ell + 1)\lambda^2/4\pi$ .

On retiendra ici le résultat rigoureux donné par l'équation 157. La plupart des réactions nucléaires se produisent par collision frontale, c'est à dire avec un moment cinétique nul caractérisé par le nombre quantique  $\ell = 0$ . La section efficace associée au phénomène "*Collision frontale entre 2 noyaux*" est donc simplement donnée par :

$$\sigma_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{h^2}{4\pi p^2} = \frac{h^2}{8\pi m_\mu E} \propto E^{-1}, \quad (159)$$

Cette expression, fait apparaître le facteur dit géométrique :  $E^{-1}$ .

### 6.3.2 Facteur de Gamov

Il ne suffit bien-sûr pas que 2 noyaux entrent en collision pour qu'ils fusionnent. Le principal obstacle à cette fusion est la barrière de répulsion coulombienne. Les noyaux sont en effet des particules chargées positivement et ils doivent s'approcher très près ( $\approx 10^{-15}$  m) pour que l'attraction entre eux résultant de l'interaction forte (à portée finie) l'emporte sur la répulsion coulombienne (à portée infinie).

Commençons par aborder le problème dans le cadre de la mécanique newtonienne. Considérons les 2 noyaux se rapprochant avec un moment cinétique nul et une énergie cinétique totale à l'infini (énergie cinétique de la particule relative)  $E_\infty$ . Comme dans tout problème où la force d'interaction dérive d'un potentiel, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système est constante. A grande distance, seul le potentiel de répulsion coulombienne compte et on garde au cours du rapprochement :

$$\frac{1}{2} m_\mu v(r)^2 + \frac{Z_A Z_a e^2}{r} = E_\infty = cst. \quad (160)$$

La distance minimale de rapprochement (pour laquelle  $v(r_{min}) = 0$ ) est donc telle que :

$$\frac{Z_A Z_a e^2}{r_{min}} = E_\infty. \quad (161)$$

D'autre part, la distance de rapprochement nécessaire pour que l'attraction forte l'emporte et permette la fusion est  $r_0 \approx 10^{-15}$  m. L'énergie  $E_{Cb}$  nécessaire pour que la barrière coulombienne puisse être franchie est donc :

$$E_{Cb} = \frac{Z_A Z_a e^2}{r_0} \simeq Z_A Z_a Mev \quad (162)$$

Nous considérons ici des réactions thermo-nucléaires où la distribution d'énergie cinétique des particules relatives suit la distribution de Maxwell-Boltzmann (équation 152). En moyenne elle vaut  $\langle E_\infty \rangle = (3/2) kT \simeq 1$  kev. De l'équation

152, nous déduisons donc que la probabilité d'avoir  $E_\infty \approx 1$  Mev est de l'ordre de  $\exp(-1000)!!$  Dans toute l'étoile (et même dans tout l'univers à cette température), pas une particule n'a une telle énergie et le franchissement de la barrière coulombienne paraît impossible. Comme on a un rapport de l'ordre de  $10^{-3}$  entre l'énergie cinétique moyenne et la hauteur de la barrière, on voit immédiatement qu'on aura en moyenne un rapport de l'ordre de 1000 entre la distance minimale de rapprochement et la taille des noyaux.

Heureusement, le monde microscopique ne suit pas les lois de Newton. En particulier, un effet très important en mécanique quantique est l'effet tunnel.

### **L'effet tunnel va permettre à certains noyaux de franchir la barrière de répulsion coulombienne.**

Rappelons en quelques mots de quoi il s'agit. Considérons le cas uni-dimensionnel avec une barrière de potentiel carrée. Dans le cas stationnaire, la fonction d'onde est alors solution de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dr^2} + (E - V)\psi = 0. \quad (163)$$

Même si  $E < V$ , la solution n'est pas nulle sous la barrière. Pour une particule libre se déplaçant dans le sens des  $r$  croissant, on a sous la barrière :

$$\psi(r) = \exp(-kr) \quad \text{avec} \quad k = (1/\hbar)\sqrt{2m(V - E)}. \quad (164)$$

La probabilité de franchissement est donnée par le rapport des  $|\psi|^2$  aux 2 bornes :  $\exp(-2k\Delta r)$  où  $\delta r$  est la largeur de la barrière.

Le problème est ici plus compliqué que pour une barrière carrée car le potentiel varie avec la distance, et il n'y a pas de solution analytique exacte de l'équation 163 dans ce cas. Cependant, dans le cas limite où la longueur d'onde est beaucoup plus petite que la taille de la barrière, une solution analytique approchée peut être obtenue, c'est ce qu'on appelle l'approximation JWKB. Pour une particule relative se déplaçant dans le sens des  $r$  décroissant, cette solution approximative est donnée par :

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \exp\left(-\int_r^{r_{min}} k(r) dr\right), \quad (165)$$

où

$$k(r) = (1/\hbar)\sqrt{2m_\mu(Z_A Z_a e^2/r - E)}. \quad (166)$$

Voyons en quoi consiste cette approximation en calculant la dérivée seconde de l'expression 165. On trouve :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( - \left( k^{1/2} + \frac{dk/dr}{2k^{3/2}} \right) \exp\left(-\int_r^{r_{min}} k(r) dr\right) \right)$$

$$= \left( k^2 + \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sqrt{k} \right) \frac{1}{\sqrt{k(r)}} \exp \left( - \int_r^{r_{min}} k(r) dr \right). \quad (167)$$

En comparant au membre de droite de l'équation différentielle à résoudre, on voit que l'approximation JWKB consiste à négliger  $\frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \sqrt{k}$  devant  $k^2$ . Ceci est admissible si  $k(r)$  varie lentement sur l'intervalle  $\delta r = r_{min} - r_0$  considéré et  $k(r) \gg 1/\delta r$ .

La probabilité de franchissement de la barrière vaut alors approximativement (sans démonstration) :

$$\begin{aligned} P_G &\simeq \exp \left( -2 \int_{r_0}^{r_{min}} k(r) dr \right) \\ &\simeq \exp \left( -(Z_A Z_a e^2 \pi / \hbar) \sqrt{2m_\mu / E} \right) \\ &= \exp \left( -b E^{-1/2} \right). \end{aligned} \quad (168)$$

C'est le **facteur de Gamov** où :

$$b = 31.29 Z_A Z_a A_\mu^{1/2} \quad (keV)^{1/2} \quad \text{et} \quad A_\mu = \frac{A_A A_a}{A_A + A_a}. \quad (169)$$

Ce résultat s'interprète facilement. Le franchissement de la barrière par effet tunnel sera d'autant plus difficile que :

- $Z_A Z_a$  et donc la répulsion coulombienne est grande,
- l'énergie cinétique à l'infini  $E$  est faible,
- la masse réduite est grande (facteur  $m_\mu^{1/2}$  dans l'équation 166).

### 6.3.3 Facteur nucléaire

Des simplifications importantes ont été effectuées lors du calcul du facteur de Gamov. En outre, il ne suffit pas que la barrière coulombienne soit franchie pour que la fusion nucléaire ait lieu. Il arrive souvent que le noyau produit soit très instable, et si une transition vers un état stable ne se produit pas rapidement, les 2 noyaux initiaux se séparent et repartent sans avoir permis la fusion. Ceci conduit à introduire un facteur supplémentaire appelé **facteur nucléaire**  $S(E)$  dans la détermination de la section efficace. Ce facteur prend en compte le rôle de l'interaction forte et parfois faible (quand une désintégration  $\beta$  se produit) dans le processus de fusion. La section efficace pour une énergie  $E$  s'écrit alors :

$$\sigma(E) = \frac{S(E)P_G(E)}{E} = \frac{S(E)}{E} \exp(-b E^{-1/2}) \quad (170)$$

En général, ce facteur nucléaire  $S(E)$  varie lentement avec  $E$ , contrairement au facteur de Gamov. Plus précisément, il en est ainsi pour les réactions nucléaires non-résonnantes. Pour les réactions résonnantes par contre (voir Sect. 6.5),  $S(E)$  varie rapidement autour de la résonance et certaines simplifications que nous ferons dans la Sect. 6.4 ne seront plus admissibles.

En pratique, les calculs théoriques de physique nucléaire ne permettent pas encore de déterminer  $S(E)$  avec une grande précision. Sa détermination repose le plus souvent sur l'expérience. On bombarde les noyaux cibles par des noyaux incidents avec une énergie cinétique  $E$  fixée. On compte le nombre de réactions nucléaires ayant lieu ; on en déduit via l'équation 149 la section efficace, et donc  $S(E) = E P_G(E)^{-1} \sigma(E)$ . Le principal problème est que, contrairement aux étoiles, nous ne pouvons effectuer sur terre une expérience durant des milliards d'années ... Elle doit pouvoir conduire à un grand nombre de réactions nucléaires sur un petit intervalle de temps. Cela n'est possible que pour des grandes sections efficaces, c'est à dire de très grandes énergies  $E$ . La mesure de  $S(E)$  ne peut donc être effectuée qu'à des énergies  $E$  bien plus élevées que les énergies rencontrées au coeur des étoiles. Il faut ensuite extrapoler ces résultats vers les énergies stellaires, ce qui introduit des erreurs importantes.

## 6.4 Le pic de Gamov

Nous considérons ici des réactions thermo-nucléaires où la distribution d'énergie cinétique des particules relatives suit la distribution de Maxwell-Boltzmann (équation 152). Pour obtenir la section efficace  $\langle \sigma v \rangle$ , il faut donc effectuer une moyenne des  $\sigma(E)v(E) >$  pondérée par cette distribution. On a donc ici ( $v(E) = \sqrt{2E/m_\mu}$ ) :

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma v \rangle &= \int_0^\infty \sigma(E)v(E)f(E)dE \\
 &= \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} \exp(-b E^{-1/2}) \sqrt{\frac{2E}{m_\mu}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \\
 &= \left(\frac{8}{m_\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) dE. \quad (171)
 \end{aligned}$$

La fonction  $\exp(-f(E)) = \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right)$  apparaissant dans cette intégrale ne prend des valeurs non-négligeables que dans une gamme très restreinte d'énergies, c'est le **Pic de Gamov**. Nous considérons le cas hors résonance et supposons donc que  $S(E)$  varie beaucoup moins vite que le pic de Gamov. Nous pouvons donc sortir  $S(E)$  de l'intégration. Il apparaît alors que la plupart des noyaux permettant à la fusion nucléaire de se produire ont une énergie cinétique située au niveau du pic de Gamov. Ceci peut se comprendre aisément. Le pic de Gamov  $\exp(-f(E))$  résulte du produit des fonctions  $\exp(-E/kT)$  et  $\exp(-b/\sqrt{E})$ .

Si  $E$  est trop grand, le facteur  $\exp(-E/kT)$  est petit. A la température  $T$ , le nombre de noyaux ayant une énergie  $E \gg kT$  est négligeable. Ces noyaux ne sont donc pas assez nombreux pour contribuer de façon significative aux réactions nucléaires.

Si  $E$  est trop petit, le facteur  $\exp(-b/\sqrt{E})$  est petit. A cette énergie, la largeur de la barrière coulombienne est très grande et la probabilité de la franchir par effet tunnel est négligeable.

Le pic de Gamov résulte donc d'un compromis, il faut une énergie cinétique accessible à la température considérée, mais pas trop faible pour que le franchissement de la barrière par effet tunnel soit possible.

Vu son importance, il est utile de faire une étude de fonction détaillée du pic de Gamov  $\exp(-f(E))$ . Commençons par déterminer l'énergie  $E_0$  où  $\exp(-f(E))$  est maximale. Il suffit d'annuler la dérivée :  $f'(E_0) = 0$ , ce qui donne :

$$E_0 = \left( \frac{bkT}{2} \right)^{2/3}. \quad (172)$$

On trouve alors :

$$\tau \equiv f(E_0) = 3E_0/(kT) = 3 \cdot 2^{-2/3} b^{2/3} (kT)^{-1/3}. \quad (173)$$

Ayant la position et la hauteur du pic, déterminons maintenant sa largeur. Nous approximations pour ce faire le pic de Gamov par une fonction gaussienne. Plus précisément, nous faisons un développement de Taylor limité au 2ème ordre de  $f(E)$  autour de  $E_0$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(-f(E)) &\simeq \exp(-f(E_0) - f''(E_0)(E - E_0)^2/2) \\ &= \exp(-f(E_0)) \exp\left(-\left(\frac{E - E_0}{\Delta E/2}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (174)$$

où

$$\Delta E = \sqrt{8/f''(E_0)} = 4\sqrt{E_0 kT/3} \propto b^{1/3} T^{5/6}. \quad (175)$$

$\Delta E/2$  est l'écart type de la gaussienne.

Ce qui nous intéresse, c'est surtout  $\langle \sigma v \rangle$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &\propto T^{-3/2} \Delta E e^{-f(E_0)} \\ &\propto T^{-3/2} T^{5/6} e^{-\tau} \\ &\propto \tau^2 e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (176)$$



Il est utile de pouvoir quantifier les paramètres du pic de Gamov en terme d'unités usuelles dans les étoiles. Notons  $T_7 \equiv T(K)/10^7$ . On introduit le paramètre :

$$W \equiv Z_A^2 Z_a^2 \frac{A_A A_a}{A_A + A_a}, \quad (177)$$

d'autant plus grand que la répulsion coulombienne est grande. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \tau &= 19.721 W^{1/3} T_7^{-1/3} \\ E_0 &= 5.665 \text{ keV} \cdot W^{1/3} T_7^{2/3} \\ \Delta E &= 4.249 \text{ keV} \cdot W^{1/6} T_7^{5/6} \end{aligned} \quad (178)$$

Un aspect très important est la sensibilité du taux de réaction nucléaire vis-à-vis de la température. On introduit pour ce faire le paramètre  $\nu$  défini par :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle}{\partial \ln T} = \frac{\tau}{3} - \frac{2}{3} \\ &\simeq 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3}. \end{aligned} \quad (179)$$

Le taux de production d'énergie  $\epsilon_k$  associé à une réaction particulière est proportionnel à  $\langle \sigma v \rangle_k$ . On a donc aussi :

$$\nu = \frac{\partial \ln \epsilon_k}{\partial \ln T}. \quad (180)$$

Au voisinage de la température considérée,  $\epsilon_k$  suit donc une loi de puissance :

$$\epsilon_k \propto T^\nu. \quad (181)$$

L'examen de l'équation 179 nous montre que  $\nu$  peut prendre des valeurs très élevées.

Ainsi pour les réactions de **fusion entre noyaux légers** ( $Z = 1$ ), on trouve :

$$\nu \approx 6.$$

Pour les réactions de **fusion entre noyaux plus lourds** :

$$\nu \approx 20 - 30 !!$$

Les taux de production d'énergie par les réactions nucléaires sont toujours extrêmement sensibles à la température. Cela a de nombreuses conséquences sur l'évolution, la structure et la stabilité thermique des étoiles. Un exemple est le mécanisme de contrôle de la température par les réactions nucléaires sur lequel nous reviendrons plus loin. En quelques mots, dans des conditions normales, les réactions nucléaires agissent comme un thermostat très précis. Une très légère variation de la température centrale conduit à une très grande variation du taux de production d'énergie. En conséquence, le cœur de l'étoile réajuste sa structure (dilatation ou contraction) pour revenir à la température de départ.

## 6.5 Les réactions résonnantes

Nous avons jusqu'à maintenant discuté le cas des réactions nucléaires non-résonnantes. Discutons maintenant l'autre cas des réactions résonnantes. Pour les comprendre, il faut commencer par évoquer les **modèles en couche** (shell-model) pour la structure des noyaux. L'idée est qu'il reste hors de portée de résoudre en toute rigueur, dans le cadre quantique, le problème à  $N$  corps au sein des noyaux. Une approximation souvent utilisée est de supposer que chaque nucléon se déplace dans le potentiel moyen stationnaire généré par les autres nucléons. La résolution de l'équation de Schrödinger associée à ce potentiel moyen est bien plus simple. Ces solutions font apparaître un ensemble discret d'états possibles pour les nucléons, comme pour les électrons dans les atomes. Mentionnons cependant que les couplages entre orbitales des nucléons sont considérablement plus importants que ceux des électrons. Un noyau est alors construit en remplissant les différents niveaux. Comme pour les électrons, les niveaux des nucléons se regroupent par paquets. Ceci explique l'existence de noyaux particulièrement stable quand toute une orbitale est remplie. L'exemple le plus simple correspond au remplissage de l'état fondamental. Cela nous donne le noyau d'hélium avec 2 protons et 2 neutrons (2 chaque fois pour les 2 valeurs du spin). L'ajout des orbitales  $\ell = 1$  donne 3  $(2\ell + 1)$  fois 2 (spins) états supplémentaires. On obtient ainsi le noyau d'oxygène avec 8 protons et 8 neutrons. On parle pour ces noyaux de nombres magiques (2, 8, ...) de protons et neutrons. Leur grande stabilité rendra plus difficile leurs fusions, ce qui se traduira par un important seuil de température comparativement à la réaction précédente.

En quoi tout cela est-il important pour les réactions nucléaires ? Tout d'abord on voit qu'il n'y a pas juste un état stable pour un noyau donné mais une famille discrète d'états excités. On peut diviser en 2 familles ceux-ci.

D'une part, il y a les états d'énergie plus petite que la valeur du potentiel à l'infini. Ce sont les **états stationnaires**.

D'autre part, il y a les états d'énergie plus grande que la valeur du potentiel à l'infini. Ce sont les **états quasi-stationnaires**.

Quand un noyau se trouve dans un état quasi-stationnaire, il y a une probabilité non-nulle qu'une de ses composantes se détache, traverse la barrière de potentiel par effet tunnel et soit repoussée à l'infini par la répulsion coulombienne. Inversément, l'existence d'états quasi-stationnaires conduit aux réactions résonnantes. Lorsque 2 noyaux entrent en collision avec une énergie proche de l'énergie de résonance (et le bon moment cinétique), la fusion est beaucoup plus probable. Ce phénomène de résonance est tout à fait classique dans les problèmes aux valeurs propres. En physique quantique, il apparaît chaque fois qu'un ensemble d'états discret est couplé à un continuum. De façon tout aussi générale, la section efficace associée à une

résonnance a un profil Lorentzien autour de l'énergie de résonnance :

$$\sigma(E) \propto \frac{1}{(E - E_{res})^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (182)$$

C'est l'équivalent de l'élargissement naturel pour les raies spectrales. Il résulte du temps de vie fini du niveau quasi-stationnaire :  $\tau = \hbar/\Gamma$ . Si on représente la section efficace en fonction de  $E$ , on a donc en plus d'une variation douce, différents pics apparaissant aux résonnances, où les réactions de fusion sont beaucoup plus probables.

Il est important de se rendre compte que le calcul de  $\langle \sigma v \rangle$  est très différent pour les réactions résonnantes et le raisonnement conduisant à la mise en évidence du pic de Gamov ne s'applique plus. Il n'est plus du tout permis de sortir  $S(E)$  de l'intégrale dans l'équation 171. C'est le contraire,  $S(E)$  varie plus vite que  $\exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right)$  et c'est ce dernier facteur qu'on peut sortir de l'intégrale. Partant de l'équation 171, on a alors approximativement :

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &\simeq \sqrt{\frac{8}{m_\mu \pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E_{res}}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E_{res}}}\right) \int_0^\infty S(E) dE \\ &\propto T^{-3/2} \exp\left(-\frac{E_{res}}{kT}\right). \end{aligned} \quad (183)$$

On voit que la dépendance de  $\langle \sigma v \rangle$  (et donc  $\epsilon$ ) vis-à-vis de la température pour les réactions résonnantes est tout à fait différente du cas hors résonnance (en  $\exp(-cst./T^{1/3})$ , voir équations 173, 176 et 178).  $\langle \sigma v \rangle$  varie ici encore plus vite avec  $T$ . Par exemple, pour la réaction  $3\alpha$  qui est une réaction résonnante (voir plus loin), la dépendance en  $T$  donne  $\nu \approx 40$ , c'est à dire  $\epsilon \propto T^{40}$  aux températures où cette réaction a lieu ( $T \approx 10^8$  K)! L'équation 183 s'interprète facilement. Pour les réactions résonnantes, la seule chose qui importe est d'avoir des noyaux ayant l'énergie cinétique relative correspondant à la résonnance. Le taux de réaction est donc proportionnel au nombre de noyaux à cette énergie, ce qui fait apparaître le facteur  $\exp(-E_{res}/kT)$  (distribution de Boltzmann), extrêmement sensible à la température.

Un dernier aspect qui distingue les réactions résonnantes des autres est qu'elles peuvent se produire pour des moments cinétiques non-nuls ( $\ell \neq 0$ ). Pour une énergie très proche de la résonnance, la section efficace peut même parfois saturer à la valeur maximale donnée par l'expérience de diffusion quantique :  $\sigma_\ell = (2\ell + 1)\lambda^2/4\pi$  (équation 157). Un noyau happe en quelque sorte tous les noyaux passant aux alentours à l'énergie de résonnance et au bon moment cinétique.

Rappelons aussi que pour des  $\ell \neq 0$ , l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{\hbar^2}{2m_\mu} \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left( E - \frac{Z_A Z_a e^2}{r} - \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2m_\mu r^2} \right) \psi = 0. \quad (184)$$

Le franchissement de la barrière coulombienne est donc modifié ici par le terme "centrifuge"  $\ell(\ell + 1)\hbar^2/(2m_\mu r^2)$ .

## 6.6 Fusion de l'hydrogène ( $T \approx 10^6 - 10^7$ K)

Faisons maintenant un petit tour des réactions nucléaires qui joueront un rôle important dans la vie des étoiles. Au fur et à mesure de son évolution, la température centrale d'une étoile va augmenter, elle passera ainsi par différentes phases où les réactions nucléaires caractéristiques de cette température assureront la production d'énergie. La première phase nucléaire correspond ainsi à la fusion de l'hydrogène en hélium, lorsque la température centrale atteint des valeurs de  $10^6 - 10^7$  K. Le bilan global est la création d'un noyau d'hélium 4 à partir de 4 protons :



L'énergie produite par cette réaction est :

$$Q_{glob} = (4M_H + 2m_{e^-} - M_{He^4})c^2$$

où les  $M$  désignent les masses nucléaires et  $m_{e^-}$  celle de l'électron. Négligeant l'énergie de liaison des électrons, on a :  $4M_H + 4m_{e^-} \simeq 4\mathcal{M}_H$  et  $M_{He^4} + 2m_{e^-} \simeq \mathcal{M}_{He^4}$  où les  $\mathcal{M}$  désignent les masses atomiques. On trouve dès lors :

$$Q_{glob} = (4\mathcal{M}_H - \mathcal{M}_{He^4})c^2 = 26.73 \text{ Mev}. \quad (186)$$

L'ingrédient essentiel dont nous avons besoin pour décrire la structure thermique interne de l'étoile est le taux de production d'énergie par les réactions nucléaires  $\epsilon$ . Nous avons vu son lien avec les taux de réactions (équation 154). Cependant, nous ne pouvons appliquer directement cette formule à 185 :

$$\epsilon \neq \frac{1}{4} \frac{Q_{glob}}{m_u^2} \rho X^2 < \sigma v >_{pp}. \quad (187)$$

<sup>1</sup> La première raison est que derrière 185 se cachent différentes réactions intermédiaires dont les cinétiques peuvent être différentes. Les relations 154 s'appliquent donc à chacune de ces réactions intermédiaires mais non au bilan global.

La deuxième raison est que certaines de ces réactions intermédiaires (essentiellement les désintégrations  $\beta$ ) conduiront à la production de neutrinos. Le  $\epsilon_n$  rentrant dans l'équation de conservation de l'énergie (équation 74) correspond à la **chaleur** fournie au gaz par les réactions nucléaires. Or les neutrinos n'interagissent quasiment pas avec la matière stellaire, ils s'échappent donc de l'étoile en emportant avec eux leur énergie. Si  $Q_k$  est l'énergie totale produite par la réaction  $k$  et  $Q_{\nu,k}$  l'énergie emportée par le neutrino émis, la chaleur fournie au gaz par réaction est :  $Q_k - Q_{\nu,k}$ .

La chaleur fournie par unité de temps et de masse au gaz par l'ensemble des réactions nucléaires est donc obtenue en sommant les taux de production d'énergie de chaque

---

<sup>1</sup>La division par 4 dans l'Eq. 187 vient du fait que les noyaux incidents (protons) sont identiques et 2 réactions p-p (Eq. 188) sont requises pour former un noyau d'hélium.

réaction moins celle emportée par les neutrinos :

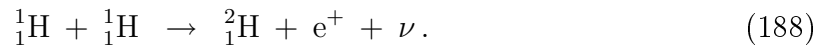
$$\epsilon_n = \sum_k \frac{Q_k - Q_{\nu,k}}{M_{1,k} M_{2,k}} \rho X_{1,k} X_{2,k} < \sigma v >_k$$

Examinons maintenant chacune des réactions intermédiaires cachée derrière 185. Selon la température, il y a 2 grands groupes de réactions intermédiaires. Le premier constitue ce qu'on appelle la chaîne proton-proton et le deuxième le cycle du carbone.

### 6.6.1 La chaîne proton-proton

Les réactions de la chaîne proton-proton ou chaîne p-p sont celles qui dominent au coeur de notre soleil.

#### Réaction p-p



Cette réaction est la plus difficile (plus petite section efficace) de la chaîne. Avant la découverte de sa possibilité par Hans Bethe (1939), les physiciens étaient confrontés à une impasse. En effet, dès les débuts de la physique nucléaire, il apparut que les noyaux de  ${}^2_2\text{He}$  et  ${}^5_3\text{Li}$  sont fortement instables à l'état fondamental. Les réactions de fusions nucléaire impliquant les 2 principaux éléments de l'univers,  ${}^1_1\text{H}$  et  ${}^4_2\text{He}$ , telles que  ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_2\text{He}$  et  ${}^1_1\text{H} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^5_3\text{Li}$  apparaissaient ainsi impossibles. La réaction 188 implique que juste au moment du franchissement de la barrière coulombienne par effet tunnel, l'interaction faible conduite à la désintégration d'un des protons en un neutron avec émission d'un positon et d'un neutrino. La transition faible correspondante est du type *transition de Gamow-Teller* durant laquelle le nucléon change de spin ; en effet les 2 protons doivent arriver avec des spins opposés (principe d'exclusion de Pauli) mais l'état stable du deutérium correspond à des spins alignés des 2 nucléons. Une telle transition faible est d'autant plus difficile que les fonctions d'ondes initiales et finales du nucléon sont dissemblables, ce qui est le cas ici car il passe d'un état libre à un état lié. On comprend donc pourquoi cette réaction a la section efficace la plus petite de la chaîne p-p. La cinétique de cette réaction s'écrit :

$$\frac{dH}{dt} = - < \sigma v >_{pp} H^2 \quad (189)$$

où  $H$  désigne l'abondance d'hydrogène (nb./cm<sup>3</sup>). On définit le temps de réaction  $\tau_H = (< \sigma v >_{pp} H)^{-1}$ . Sa valeur typique (coeur du soleil) est de l'ordre du milliard d'année.

Notons aussi que le positon émis s'annihile immédiatement avec un électron libre du plasma selon la réaction



Bien qu'elle soit la plus difficile, la réaction p-p est fort peu productive d'un point de vue énergétique. On trouve en sommant les apports de chaleur résultant des réactions 188 et 190 :

$$\begin{aligned} Q &= 2\Delta\mathcal{M}_H - \Delta\mathcal{M}_D - E_{neutrino} \\ &= 1.442 - 0.262 = 1.180 \text{ Mev} \end{aligned}$$

ce qui est bien plus petit que les 26/2 Mev de la chaîne entière.

### Fusion du deutérium



Cette réaction est bien plus aisée car elle ne nécessite que le franchissement de la barrière coulombienne. Son temps de réaction typique (coeur du soleil) est très petit :  $\tau_D = (\langle \sigma v \rangle_{pd} H)^{-1} \approx 1s$ . En conséquence, les noyaux de deutérium produits par la réactions p-p fusionnent quasi-instantanément avec un proton. Un équilibre entre production et destruction du deutérium s'établit donc et on a :

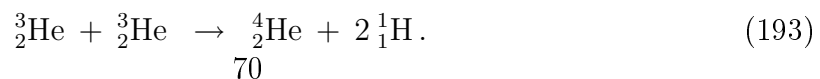
$$\begin{aligned} 0 &\simeq \frac{dD}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{pp} \frac{H^2}{2} - \langle \sigma v \rangle_{pd} HD \\ \Rightarrow \left(\frac{D}{H}\right)_{eq} &= \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{2 \langle \sigma v \rangle_{pd}} = \frac{\tau_D}{2\tau_H} \approx 10^{-17}. \end{aligned} \quad (192)$$

Ce rapport isotopique est considérablement plus faible que celui observé dans l'eau de mer  $(D/H)_T \simeq 1.5 \times 10^{-4}$ . On invoque habituellement le processus de spallation à la surface des étoiles pour expliquer la nucléosynthèse du deutérium jusqu'à de tels rapports isotopiques. La spallation est le processus au cours duquel un noyau lourd est "pelé" suite à son bombardement par des noyaux légers de très grande énergie, par exemple ici :  ${}^{56}_{26}\text{Fe} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{54}_{25}\text{Mn} + {}^1_1\text{H} + {}^2_1\text{H}$ .

A partir d'ici, il existe différentes sous branches à la chaîne p-p.

### Chaîne pp<sub>I</sub>

La chaîne pp<sub>I</sub> est la branche dominante à des température inférieures à  $1.5 \times 10^7$  K, comme par exemple au coeur de notre soleil. Elle correspond à la fusion de 2 noyaux de  ${}^3_2\text{He}$  pour former le noyau de  ${}^4_2\text{He}$  final :



Bien que la répulsion coulombienne entre les 2 noyaux soit plus importante, cette réaction reste plus aisée que la réaction p-p (188) car elle ne requiert pas de désintégration  $\beta$  simultanée. Au coeur du soleil, on trouve comme temps de réaction  $\tau_{33} = (\langle \sigma v \rangle_{33} {}^3_2\text{He})^{-1} \approx 10^6$  ans. La variation temporelle de l'abondance de  ${}^3_2\text{He}$  est donnée par sa production par 191 moins sa destruction par 193. Comme on est à l'équilibre pour le deutérium, on peut utiliser l'équation 192 et on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d({}^3_2\text{He})}{dt} &= \langle \sigma v \rangle_{pd} HD - \langle \sigma v \rangle_{33} ({}^3_2\text{He})^2 \\ &= \langle \sigma v \rangle_{pp} \frac{H^2}{2} - \langle \sigma v \rangle_{33} ({}^3_2\text{He})^2. \end{aligned}$$

A l'équilibre ( $d({}^3_2\text{He})/dt = 0$ ), on trouve donc :

$$\left( \frac{{}^3_2\text{He}}{H} \right)_{eq} = \sqrt{\frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{2 \langle \sigma v \rangle_{33}}}. \quad (194)$$

Pour voir comment l'abondance de  ${}^3_2\text{He}$  va varier en fonction de la profondeur dans l'étoile, rappelons-nous l'équation 179 donnant la dépendance de la section efficace vis-à-vis de la température pour une réaction non-résonnante :

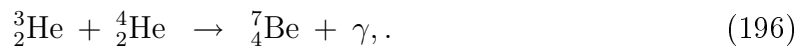
$\partial \ln \langle \sigma v \rangle / \partial \ln T \simeq 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3}$  où  $W = Z_A^2 Z_a^2 A_A A_a / (A_A + A_a)$ . Avec 2 fois plus de protons dans  ${}^3_2\text{He}$ ,  $W$  est nettement plus grand pour la réaction 193 que pour la réaction 188. On a donc

$$\frac{\partial \ln({}^3_2\text{He}/H)_{eq}}{\partial \ln T} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle_{pp}}{\partial \ln T} - \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle_{33}}{\partial \ln T} \right) < 0. \quad (195)$$

On voit donc que, partant du centre de l'étoile vers la surface, l'abondance de  ${}^3_2\text{He}$  doit augmenter. Mais ceci n'est valable que dans la mesure où l'équilibre entre sa production et sa destruction est atteint. Or cela n'est certainement pas le cas dans les couches superficielles de l'étoiles où la production de  ${}^3_2\text{He}$  devient de plus en plus petite et surtout son taux de destruction, proportionnel à  $({}^3_2\text{He})^2$  et variant plus vite avec  $T$ , devient formellement nul. Dans les couches superficielles, le profil d'abondance de  ${}^3_2\text{He}$  n'est donc plus donné par la relation 194. Dans ces régions, au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre, le taux de production de  ${}^3_2\text{He}$  décroît et il en va donc de même pour son abondance. Le résultat final est un profil de  $({}^3_2\text{He}/H)_{eq}$  présentant un maximum à  $\pm 1/3$  du rayon total de l'étoile et décroissant rapidement de part et d'autre.

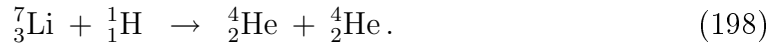
### Chaînes ppII et ppIII

Pour des températures supérieures à  $2 \times 10^7$  K, une autre réaction intermédiaire prime sur 193 :

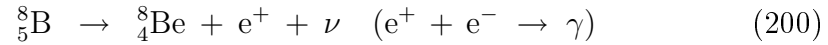


Après cette réaction, 2 branchements possibles constituent les chaînes ppII et ppIII.

**Chaîne pp<sub>II</sub> :**



**Chaîne pp<sub>III</sub> :**



La chaîne pp<sub>II</sub> domine pour des  $T \approx 2 \times 10^7$  K tandis que la chaîne pp<sub>III</sub> domine pour  $T > 3 \times 10^7$  K.

En lien avec le problème des neutrinos solaires que nous considérerons plus loin, il est utile d'examiner de plus près les réactions conduisant à l'émission d'un neutrino, à savoir 188, 197 et 200. L'énergie emportée par ces neutrinos diffère d'une réaction à l'autre. Pour les réactions 188 et 200, il y a un partage entre énergie cinétique du positon et celle du neutrino. Les énergies possibles du neutrino constituent dès lors un continuum centré autour de 0.263 MeV pour la réaction p-p et 7.2 MeV pour la désintégration du Bore. Quant à la capture électronique (197), elle se fait à des énergies bien spécifiques correspondant à 2 niveaux d'excitation du Lithium. L'énergie emportée par le neutrino y est dès lors fixée aux 2 valeurs possibles de 0.861 et 0.383 MeV.

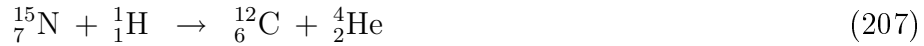
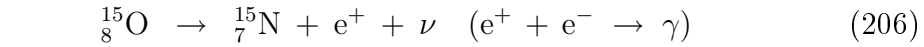
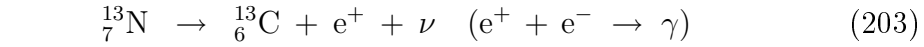
Examinons enfin la dépendance vis-à-vis de la température du taux de production d'énergie  $\epsilon$ . Nous avons vu plus haut (équation 179) que  $\nu = \partial \ln \epsilon / \partial \ln T \simeq 6.574 W^{1/3} T_7^{-1/3}$ , avec  $W = Z_A^2 Z_a^2 A_A A_a / (A_A + A_a)$ . Toutes les réactions de la chaîne p-p impliquent des noyaux légers, ce qui donne  $\nu_{pp} \approx 5 - 6$  selon la température. C'est déjà élevé mais on trouvera des valeurs encore bien plus grandes pour les autres réactions nucléaires.

### 6.6.2 Le cycle du carbone

Bien qu'initialement les étoiles soient constituées essentiellement d'hydrogène et d'hélium, d'autres éléments plus lourds sont aussi présents dans des proportions moindres. Ainsi, les éléments les plus abondants dans l'univers après H et He sont le carbone et l'oxygène. Ceux-ci peuvent servir de catalyseurs dans la nucléosynthèse de l'hélium à partir d'hydrogène, ce qui constitue le cycle du carbone ou cycle



CNO. Au-delà de  $T \approx 2 \times 10^7$  K et s'il y a suffisamment de carbone et oxygène initial (étoiles de population I), ce cycle prend le pas sur la chaîne p-p. Le cycle de réactions principal est le suivant :

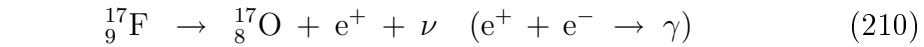


En fin de cycle, le noyau de carbone est restitué et on voit qu'il a simplement servi de catalyseur pour permettre la fusion de 4 protons en un noyau d'hélium.

Outre ce cycle principal, mentionnons aussi le sous-cycle secondaire suivant. Au lieu de 207, la réaction suivante se produit plus rarement (rapport de branchement de  $4 \times 10^{-4}$ ) :



Suivent alors les réactions suivantes :



A partir d'ici, le cycle principal est rejoint et les réactions 205, 206, ... peuvent suivre.

Deux régimes bien distincts peuvent s'établir au cours de la vie d'une étoile. Le premier est le **régime d'équilibre** où les vitesses des différentes réactions intermédiaires du cycle CNO sont égales. Dans ce cas, l'abondance de carbone, azote, oxygène et leurs isotopes reste constante au cours du temps et ils agissent simplement comme catalyseurs. En terme de nucléosynthèse, nous avons simplement production d'hélium à partir d'hydrogène. Et d'un point de vue énergétique, 26 Mev de chaleur est fournie au gaz par noyau d'hélium produit. Quant au sous-cycle 208, 209, 210, 211, il joue un rôle tout à fait négligeable dans ce régime étant donné son faible rapport de branchement.

L'autre situation est le **régime hors équilibre** se présentant typiquement durant les phases primordiales de la vie d'une étoile. Un aspect important du cycle CNO est que la réaction 205 a une section efficace bien plus petite que les autres. Initialement, la matière stellaire est majoritairement composée de  ${}^{12}_6\text{C}$  et de  ${}^{16}_8\text{O}$  (après H et He).

Quand la température atteint des valeurs de quelques millions de degrés, les réactions 202, 203 et 204 convertissant du  ${}^{12}_6\text{C}$  en  ${}^{14}_7\text{N}$  deviennent possibles. De même un peu plus tard, les réactions 209, 210 et 211 convertissent du  ${}^{16}_8\text{O}$  en  ${}^{14}_7\text{N}$ . Comme la réaction 205 a une section efficace trop petite, elle ne se produit presque pas et on a une augmentation progressive de l'abondance de  ${}^{14}_7\text{N}$  au détriment de celles de  ${}^{12}_6\text{C}$  et  ${}^{16}_8\text{O}$ . Ce régime hors équilibre a une durée courte comparativement à la durée de vie totale de l'étoile. En effet, la quantité de  ${}^{12}_6\text{C}$  et  ${}^{16}_8\text{O}$  disponible est bien plus petite que celle d'hydrogène. Le taux de la réaction 205 est donné par  $r_{14} = \langle \sigma v \rangle_{14} ({}^{14}_7\text{N}) ({}^1_1\text{H})$ . Au fur et à mesure de l'augmentation de l'abondance en  ${}^{14}_7\text{N}$ , ce taux augmente donc jusqu'à ce qu'il soit égal aux autres taux de réactions et le régime d'équilibre s'établit.

Remarquons toutefois que, dans les cas réels, cette distinction entre régime d'équilibre et régime hors équilibre n'est pas si simple. Si durant la plus longue partie de la vie d'une étoile, le régime d'équilibre est atteint d'un point de vue global, ce n'est en général pas le cas localement. En effet, comme nous allons le voir tout de suite, un coeur convectif est systématiquement présent quand le cycle CNO constitue la principale source d'énergie. Les réactions nucléaires n'ont lieu que tout près du centre mais presque pas dans les régions périphériques du coeur convectif. Les mouvements convectifs homogénéisent la composition chimique dans la région qu'ils englobent. En amenant continuellement du combustible frais de ces régions périphériques vers le centre, ils maintiennent dès lors artificiellement un déséquilibre au niveau local.

L'origine de ce coeur convectif réside dans la très grande sensibilité vis-à-vis de la température du taux de production d'énergie à travers le cycle CNO. Pour rappel (équation 179),  $\nu = \partial \ln \epsilon / \partial \ln T$  est d'autant plus élevé que la répulsion coulombienne entre noyaux est grande. Avec un nombre de protons de 6, 7 et 8 pour C, N et O, on trouve donc des valeurs particulièrement élevées pour le cycle CNO :  $\nu_{CNO} \approx 14 - 16$  selon la température. Il y a 2 conséquences très importantes à cette très grande sensibilité de  $\epsilon$  vis-à-vis de  $T$ .

Premièrement, comme  $\nu$  est très élevé et la température décroît du centre vers la surface, la région où  $\epsilon$  est significatif correspond à une toute petite région proche du centre de masse  $M_{nuc} \ll M_{tot}$ . Nous pouvons écrire en intégrant l'équation de conservation de l'énergie à l'équilibre thermique (69) :

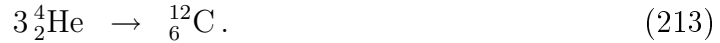
$$L(m) = \int_0^m \epsilon \, dm. \quad (212)$$

Du centre jusqu'à  $M_{nuc}$ ,  $L(m)$  croît rapidement. Au-delà,  $L(m)$  reste constante avec une valeur égale à la luminosité de surface. Dans les régions centrales,  $L(m)/m$  est dès lors très élevé. Le gradient radiatif (équation 58) qui est proportionnel à  $L/m$  est donc lui-même très élevé et supérieur au gradient adiabatique. Ces régions centrales sont donc instables vis-à-vis de la convection en vertu du critère de Schwarzschild (59).

La deuxième conséquence de la grande sensibilité de  $\epsilon$  vis-à-vis de  $T$  est le mécanisme de contrôle de la température par les réactions nucléaires. Ce mécanisme joue un rôle essentiel dans l'évolution de la structure des étoiles au cours du temps, nous y reviendrons en temps utile.

## 6.7 Fusion de l'hélium ( $T \approx 10^8$ K)

À des températures de l'ordre de  $10^8$  K, la nucléosynthèse de carbone à partir de l'hélium devient possible. Le bilan global est la formation d'un noyau de carbone à partir de 3 noyaux d'hélium (particules  $\alpha$ ), c'est la **réaction 3  $\alpha$**  :



La probabilité que 3 particules  $\alpha$  entrent simultanément en collision et fusionnent est, on peut s'y attendre, virtuellement nulle. En réalité, cette fusion se fait en 2 étapes.

Tout d'abord, 2 noyaux d'hélium fusionnent pour former un noyau de  $^8_4\text{Be}$  dans un état excité ( $^8_4\text{Be}^*$ ). Le noyau de  $^8_4\text{Be}$  excité est très instable et, presque tout le temps, se fissionne rapidement pour reformer les 2 particules  $\alpha$  initiales. Un équilibre thermodynamique s'établit donc entre fusion et fission :



Dans cette situation d'équilibre thermodynamique, on trouve :

$$\frac{(^8_4\text{Be}^*)}{(^4_2\text{He})^2} \propto T^{-3/2} \exp(-E_{2\alpha}/kT) \approx 1.87 \times 10^{-33} f_{2\alpha} T_8^{-3/2} \times 10^{-4.64/T_8}, \quad (215)$$

où  $T_8 = T(K)/10^8$ ,  $E_{2\alpha} = 92$  keV est la différence d'énergie entre  $^8_4\text{Be}^*$  et les 2  $^4_2\text{He}$ ,  $f_{2\alpha}$  est le facteur d'écrantage par les électrons et les abondances sont en nombre/cm<sup>3</sup>. À  $T_8 = 1$  et une densité typique (à ce stade de la vie d'une étoile)  $\rho = 10^5$  g/cm<sup>3</sup>, on obtient ainsi un noyau de  $^8_4\text{Be}^*$  pour  $10^9$  noyaux de  $^4_2\text{He}$ .

Bien que petit, ce nombre de  $^8_4\text{Be}^*$  est suffisant pour rendre possible la deuxième étape où un noyau de  $^8_4\text{Be}^*$  fusionne avec un noyau d'hélium pour former un noyau de carbone :



Les réactions de fusion 214 et 216 sont 2 réactions résonnantes. Bien que 214 soit endothermique, le bilan global correspondant à 213 est bien sûr exothermique. Le taux de la réaction 213 est égal à celui de 216 et suit la loi d'une réaction résonnante (équation 183) :

$$r_{3\alpha} \propto (^8_4\text{Be}^*)(^4_2\text{He}) T^{-3/2} \exp(-E_{\alpha\text{Be}}/kT). \quad (217)$$

La chaleur libérée par la fusion de 3 noyaux d'hélium en un noyau de carbone est donnée par :

$$Q_{3\alpha} = (3M_\alpha - M_C)c^2 = 7.275 \text{ MeV}. \quad (218)$$

C'est bien moins que les 26 MeV de la fusion de l'hydrogène. Nous verrons qu'en conséquence, cette phase de la vie des étoiles sera plus courte que la précédente. Le taux de production d'énergie par la réaction  $3\alpha$  s'obtient en combinant 215, 217, 218. On trouve en unités cgs et faisant apparaître la fraction en masse d'hélium  $Y$  :

$$\epsilon_{3\alpha} = 5.09 \times 10^{11} f_{3\alpha} \rho^2 Y^3 T_8^{-3} \exp(-44.027/T_8). \quad (219)$$

On voit dans cette équation apparaître une extrême sensibilité vis-à-vis de la température. Ainsi, à  $T_8 = 1$ , on trouve  $\nu = \partial \ln \epsilon / \partial \ln T \approx 40!!$  La fusion centrale de l'hélium s'accompagnera donc, comme pour le cycle du carbone, de l'apparition d'un coeur convectif.

### Captures $\alpha$

Les réactions 214 et 216 ne sont pas les seules durant cette phase de la vie d'une étoile. Au fur et à mesure de la diminution de l'abondance d'hélium et l'augmentation de celle de carbone résultant de 213, la réaction suivante prend peu à peu le pas sur 213 :



Enfin la capture  $\alpha$  par l'oxygène finit aussi par être possible, mais dans une nettement moindre mesure :

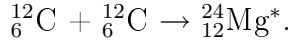


**En terme de nucléosynthèse, le bilan final de cette phase est la transformation d'hélium en carbone et oxygène dans des proportions comparables, ainsi que la nucléosynthèse d'un petit peu de néon.**

La découverte du niveau de résonance de  ${}^{12}_6\text{C}$  requis pour permettre la réaction 216 ne fut pas triviale (Hoyle 1954, Cook et al. 1957). Cela fut repris comme argument à l'appui du *principe anthropique* selon lequel les constantes de la physique doivent avoir des valeurs bien spécifiques pour rendre l'existence de l'homme possible ...

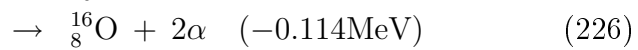
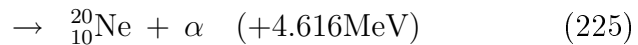
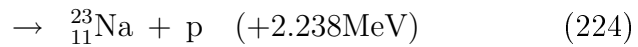
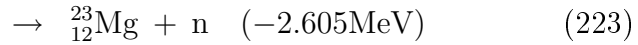
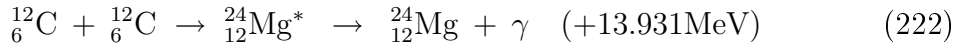
## 6.8 Fusion du carbone ( $T \approx 6 - 8 \times 10^8$ K)

À des températures de plus d'un demi-milliard de degrés, les énergies cinétiques des noyaux de carbones sont suffisantes pour rendre possible leur fusion :



À ces hautes températures, le pic de Gamov est plus large (loi en  $T^{5/6}$  dans l'équation 178). Il existe en conséquence un grand nombre de niveaux quasi-stationnaires du magnésium dans la gamme d'énergie correspondante. Bien que la réaction de fusion de carbone en magnésium soit résonnante, le facteur nucléaire  $S(E)$  varie donc lentement dans l'intervalle du pic de Gamov. Dès lors, la dépendance vis-à-vis de la température de cette réaction est similaire à celle d'une réaction non-résonnante avec une loi en  $\exp(-cT^{-1/3})$ .

Le noyau de magnésium formé est dans un état excité instable qui se désintègre rapidement selon un des branchements suivants :

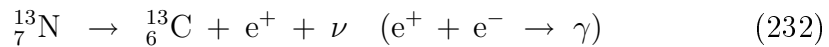


Parmi ces différents branchements, les plus probables sont les réactions 224 et 225.

À de si hautes températures, les protons, neutrons et particules  $\alpha$  ainsi émis sont immédiatement recapturés par d'autres noyaux (voir grille de réactions dans le point de vue du cours). Citons parmi d'autres les captures  $\alpha$  :



Citons aussi la suite de réaction intéressante suivante :



Nous avons déjà rencontré les 2 premières de ces réactions dans le cycle CNO. La troisième n'est possible qu'à ces hautes températures et conduit, ainsi que 223, à la

production de neutrons libres. Ceci est important, en effet les neutrons sans charge n'ont pas de barrière coulombienne à franchir. Ils sont donc facilement capturés pour former des noyaux de plus en plus lourds. Nous y reviendrons ultérieurement dans le cours (voir processus s).

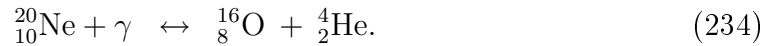
En terme énergétique, le bilan de toutes ces réactions est complexe ; on retiendra que, en moyenne, grosso-modo 13 MeV sont libérés par fusion de 2 noyaux de carbone. La dépendance vis-à-vis de la température du taux de production d'énergie suit approximativement une loi  $\epsilon_{CC} \propto \exp(-84.165/T_9^{1/3})$ , comme dans des réactions non-résonnantes (voir raisons mentionnées plus haut),  $T_9$  étant la température comptée en milliards de degrés.

**En terme de nucléosynthèse**, le bilan est complexe, **les produits finaux de toutes ces réactions sont du plus au moins abondant** :  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ ,  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$  et  ${}^{28}_{14}\text{Si}$ .

## 6.9 Photo-désintégration du Néon ( $T \approx 1.2 - 1.5 \times 10^9$ K)

A  $T = 1.2 \times 10^9$  K,  $kT = 0.1$  MeV. A une telle température, un nombre non complètement négligeable de photons correspondant à la queue de la distribution de Planck a l'énergie requise pour permettre la réaction de photo-désintégration du Néon :  ${}^{20}_{10}\text{Ne} + \gamma \rightarrow {}^{16}_8\text{O} + {}^4_2\text{He}$ . Par contre, la température et donc l'énergie des photons n'est pas encore suffisante pour permettre la photodésintégration des autres éléments plus stables précédemment synthétisés (O, Mg, ...).

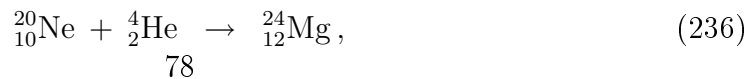
L'énergie requise pour cette réaction endothermique est  $Q = 4.73$  MeV. Cette fission se fait en 2 étapes. Un photon d'énergie  $h\nu = 5.63$  MeV est tout d'abord capturé pour amener le noyau de néon à un niveau excité. Ensuite, ce noyau instable se fissionne spontanément pour former un noyau d'oxygène et d'hélium, avec libération de la différence d'énergie (5.63-4.73 MeV) sous forme cinétique. Bien sûr, la réaction de fusion d'hélium et oxygène en néon est également possible à ces températures :



L'équilibre thermodynamique entre réactions directes et inverses conduit à un rapport d'abondance oxygène-hélium-néon de la forme tout à fait similaire à l'équation de Saha (138) :

$$\frac{He\ O}{Ne} \propto T^{3/2} \exp(-Q/kT), \quad (235)$$

avec  $Q = 4.73$  MeV,  $Q/(kT) = 54.89/T_9$ ,  $T_9 = T(K)/10^9$ . S'il n'y avait que cela, une fois cet équilibre atteint avec autant de réactions directes et inverse, le bilan énergétique serait nul. Il n'en est rien car, de temps en temps, un des noyaux d'hélium produit par photodésintégration du néon peut être capturé par un noyau plus lourd que l'oxygène :





Après les réactions à l'équilibre 234, c'est la réaction 236 dont le taux est le plus élevé. Combinée à la réaction de photodésintégration du néon, elle reconsume le noyau d'hélium précédemment produit et le bilan général s'écrit simplement :



Bien que la réaction de photodésintégration du néon soit endothermique, l'énergie libérée par 236 l'emporte et **le bilan énergétique de 238 et plus généralement de cette phase est exothermique**. L'apport de chaleur par gramme de néon ainsi consommé correspond approximativement au quart de celui de la phase de fusion du carbone. 238 dicte l'évolution de la composition chimique durant cette phase, ce qui donne :

$$\frac{dO}{dt} = \frac{dMg}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dNe}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{\alpha Ne} Ne He. \quad (239)$$

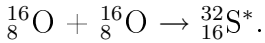
En substituant dans cette équation l'abondance d'hélium donnée par la relation d'équilibre 235, on en déduit le taux de production d'énergie  $\epsilon_{Ne}$  :

$$\epsilon_{Ne} \approx 8.54 \times 10^{26} T_9^{12} \frac{Y_{Ne}^2}{Y_O} \exp(-54.89/T_9), \quad (240)$$

où  $Y_{Ne}$  et  $Y_O$  sont les fractions en masse de néon et oxygène. **En terme de nucléosynthèse, on assiste donc durant cette phase à une diminution de l'abondance de néon, une augmentation de l'abondance de l'oxygène qui reste ainsi l'élément majoritaire, une production importante de magnésium et dans une moindre mesure de silicium.**

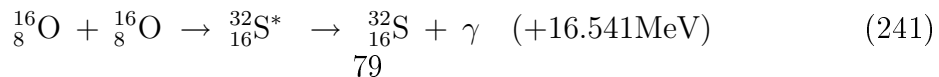
## 6.10 Fusion de l'oxygène ( $T \approx 2 \times 10^9$ K)

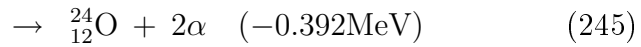
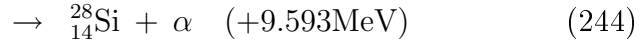
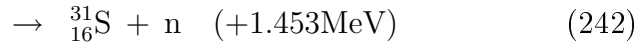
Le noyau d'oxygène est particulièrement stable étant donné son caractère doublement magique :  $Z = N = 8$ . En conséquence, il faut attendre des températures très élevées de l'ordre de 2 milliards de degrés pour que la réaction de fusion des noyaux d'oxygène devienne possible selon :



Pour les mêmes raisons que pour la fusion du carbone, la dépendance vis-à-vis de la température de cette réaction est similaire à celle d'une réaction non-résonnante avec une loi en  $\exp(-cT^{-1/3})$ .

Le noyau de soufre formé est dans un état excité instable qui se désintègre rapidement selon un des branchements suivants :





Parmi ces différents branchements, les plus probables sont les réactions 243 et 244.

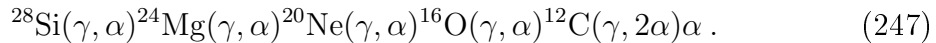
À de si hautes températures, le deutérium produit est immédiatement photodésintégré. Les protons, neutrons et particules  $\alpha$  émis sont quant à eux immédiatement recapturés par d'autres noyaux (voir grille de réactions dans le powerpoint du cours). En outre, un nombre croissant de réactions de photodésintégration devient possible, équilibrant les réactions de fusion inverses (par exemple  ${}_{14}^{29}\text{Si} + \gamma \leftrightarrow {}_{14}^{28}\text{Si} + \text{n}$ ,  ${}_{15}^{30}\text{P} + \gamma \leftrightarrow {}_{14}^{29}\text{Si} + \text{p}$ ).

En terme énergétique, le bilan de toutes ces réactions est complexe ; on retiendra que, en moyenne, grosso-modo 13 MeV sont libérés par fusion de 2 noyaux d'oxygène.

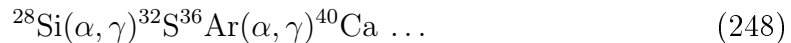
**En terme de nucléosynthèse, le bilan est complexe, les principaux produits finaux de toutes les réactions impliquées sont pour près de 90 % du silicium et du soufre. Viennent ensuite l'argon, le calcium, Ti et Cr**

## 6.11 “Combustion du silicium” ( $T \approx 3.3 \times 10^9 \text{ K}$ )

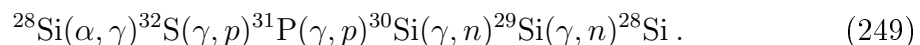
À des températures de l'ordre de 3 milliards de degrés, un nombre considérable de réactions nucléaires devient possible (voir grille de réactions dans le powerpoint). Parmi celles-ci, les photodésintégrations telles que celle du silicium et recaptures deviennent très nombreuses. Comme l'élément majoritaire au début de cette phase est le silicium, on parle de “combustion du silicium” ; la réaction de fusion correspondante n'a cependant pas lieu. Les réactions de photo-désintégration partant du silicium conduisent principalement à la production de noyaux d'hélium libres selon la chaîne :



Ces noyaux d'hélium libérés sont recapturés, permettant la synthèse de noyaux de plus en plus lourds partant du silicium :



Deux groupes de réactions en quasi-équilibre s'établissent. Le premier, autour du silicium, va jusqu'au  ${}^{48}\text{Ti}$ , avec par exemple les réactions suivantes :





Le deuxième groupe va du  $^{52}\text{Cr}$  au  $^{56}\text{Fe}$ . A l'interface entre ces 2 groupes en quasi-équilibre, les réactions de capture  $\alpha$  sont favorisées, ce qui se traduit par une destruction du silicium au profit d'éléments du groupe du Fe.

**En terme de nucléosynthèse, le bilan est complexe, les principaux produits finaux de toutes les réactions impliquées sont du plus au moins abondant : le fer, le nickel, Cr et Ti.**

## 6.12 Équilibre statistique nucléaire ( $T \approx 5 - 7 \times 10^9 \text{ K}$ )

Nous avons vu que le réseau de réactions nucléaires s'est considérablement complexifié au fur et à mesure de l'augmentation de température. Au-delà d'un certain seuil,  $kT$  devient non-négligeable comparativement aux énergies impliquées dans la plupart des réactions. Toutes les réactions de fusion et photodésintégrations deviennent ainsi possibles. Un équilibre statistique s'établit alors entre toutes les réactions directes et inverses. Les outils puissants de la physique statistique permettent alors de décrire la répartition statistique des différents noyaux par des fonctions simples dépendant essentiellement de la température, on parle d'**équilibre statistique nucléaire**. Nous avons déjà rencontré plus haut avec la photodésintégration du néon l'équivalent de l'équation de Saha régissant cet équilibre thermodynamique (équation 235). Ainsi, en considérant maintenant une réaction de capture - libération de neutron :



nous avons en désignant par  $N$  les abondances :

$$\frac{N_Z^{A-1} N_n}{N_Z^A} \propto T^{3/2} \exp(-Q_{A,Z,n}/kT), \quad (251)$$

avec

$$Q_{A,Z,n} = (M_n + M_Z^{A-1} - M_Z^A)c^2. \quad (252)$$

De même, nous pouvons écrire :

$$\frac{N_Z^{A-2} N_n}{N_Z^{A-1}} \propto T^{3/2} \exp(-Q_{A-1,Z,n}/kT). \quad (253)$$

Procédant de proche en proche jusqu'à séparer le noyau complet en chacune de ses composantes, puis multipliant les équations ainsi obtenues, nous trouvons finalement :

$$N_Z^A \propto N_p^Z N_n^{A-Z} T^{-3(A-1)/2} \exp(-\Delta\mathcal{M}_{A,Z}/kT), \quad (254)$$

où  $-\Delta\mathcal{M}_{A,Z}$  est l'énergie de liaison du noyau  ${}^A_Z\text{X}$ . L'équation 254 décrit l'abondance de chacun des noyaux. En pratique, ce ne sont pas les nombres de protons et neutrons libres  $N_p$  et  $N_n$  qui sont imposés mais le nombre total de baryons (libres ou

se trouvant dans un noyau). Sous cette contrainte, on peut montrer qu'à une température pas trop élevée ( $kT < -\Delta\mathcal{M}_{A,Z}$ ),  $N_Z^A$  prend une valeur maximale pour les noyaux ayant la plus grande énergie de liaison par nucléon :  $f_{AZ} \equiv -\Delta\mathcal{M}_{A,Z} / A$ . Si cette phase se passe suffisamment lentement, les désintégrations  $\beta$  ont le temps de ramener les noyaux vers le centre de la vallée de stabilité des noyaux. Dans ce cas, l'élément le plus abondant (maximum de  $f_{AZ}$ ) est  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ . Par contre, si elle se passe extrêmement rapidement (supernova de type Ia), les désintégrations  $\beta$  n'ont pas le temps d'avoir lieu, le rapport entre nombre total de protons et neutrons (libres ou non) reste inchangé et très proche de 1, et l'élément le plus abondant est  ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ .

La température centrale augmentant, l'équilibre régi par l'équation 254 se déplace dans le sens des photodésintégrations, et donc une augmentation de l'abondance des particules légères (hélium, protons, neutrons) au détriment des noyaux lourds. Le bilan énergétique devient alors endothermique, ce qui comme on le verra accélérera le collapse du coeur au moment de l'explosion de l'étoile en supernova de type II.

## 7 Modèles polytropiques

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les différents ingrédients physiques permettant de décrire rigoureusement la structure interne des étoiles. Dans ce chapitre, nous allons nous attacher à l'étude de modèles simplifiés dits modèles polytropiques. Par leur simplicité, ils se prêteront à une analyse plus complète, mettant en lumière certains aspects fondamentaux des étoiles tels que la masse limite de Chandrasekhar.

Un polytrophe est un fluide dans lequel pression et densité sont reliés par une loi de puissance de la forme suivante :

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (255)$$

dans laquelle  $n$  est appelé l'indice polytropique.

### 7.1 Equation de Lane-Emden

Le problème que nous allons étudier ici est la description de la structure d'une sphère à l'équilibre hydrostatique constituée par un fluide obéissant à une telle relation polytropique.

Partons donc de l'équation d'équilibre hydrostatique que nous écrivons ici sous la forme :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{Gm}{r^2} = \frac{d\phi}{dr}, \quad (256)$$

où  $\phi$  est le potentiel gravifique. Ce potentiel est solution de l'équation de Poisson :  $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ , ce qui sous notre hypothèse de symétrie sphérique s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (257)$$

En combinant les équations 255, 256 et 257, nous allons faire apparaître une équation toute simple décrivant la structure d'une sphère polytropicque. Commençons par développer le membre de gauche de l'équation 256 en tenant compte de 255. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \\ &= -K \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} \end{aligned} \quad (258)$$

On définit la surface du polytrophe par la condition  $P(R) = \rho(R) = 0$ . Comme tout potentiel,  $\phi$  est défini à une constante près et on peut choisir cette constante de façon à ce que  $\phi(R) = 0$ . Intégrons maintenant les 2 membres de 258 en tenant compte de cette condition. Nous trouvons alors :

$$\phi(r) = -K \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho(r)^{\gamma-1} = -K(n+1)\rho(r)^{1/n}, \quad (259)$$

ou encore :

$$\rho(r) = \left[ \frac{-\phi(r)}{K(n+1)} \right]^n \quad (260)$$

Substituant cette relation dans l'équation de Poisson, on trouve finalement :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho = 4\pi G \left[ \frac{-\phi}{K(n+1)} \right]^n \quad (261)$$

Pour des raisons qui paraîtront évidentes plus loin, il est utile de réécrire cette équation sous forme adimensionnelle. Pour ce faire, nous faisons le changement de variable suivants :

$$z = Ar \quad , \quad w = \frac{\phi}{\phi_c} = \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (262)$$

où  $\phi_c$  et  $\rho_c$  sont les valeurs centrales de  $\phi$  et  $\rho$  et

$$A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}. \quad (263)$$

Après quelques manipulations algébriques, l'équation 261 se ramène alors à la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0.$$

Cette équation différentielle bien connue est appelée **équation de Lane-Emden**. Au centre, nous avons :

$$w(0) = 1 \quad , \quad dw/dz(0) = 0.$$

On a ainsi à résoudre un problème de Cauchy. On procède donc par intégration numérique depuis le centre (par exemple suivant l'algorithme de Runge-Kuta), ce qui ne pose aucune difficulté. On arrête l'intégration au point noté  $z_n$  où  $w$  devient nul, ce qui définit la surface du polytrophe.

Les avantages de cette formulation adimensionnelle du problème sont les suivants. On voit que dans l'équation de Lane-Emden n'apparaît qu'un paramètre à spécifier : l'indice polytropique  $n$ . La solution étant calculée une fois pour toute, elle permet de décrire en dimensions réelles toutes les sphères polytropiques d'indice  $n$ .

## 7.2 Quelques polytropes ...

Pour 3 valeurs de  $n$  bien spécifiques, l'équation de Lane-Emden a une solution analytique :

$$\begin{aligned} n = 0 \quad (\rho \text{ cst.}) : \quad w(z) &= 1 - z^2/6 \\ n = 1 \quad (\gamma = 2) : \quad w(z) &= \sin z/z \\ n = 5 \quad (\gamma = 6/5) : \quad w(z) &= \left(1 + z^2/3\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$n = 0$  correspond aux modèles de densité constante. Quant au cas  $n = 5$ , nous voyons que  $w$  y tend asymptotiquement vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini. La solution complète a donc dans ce cas un rayon infini.  $n = 5$  est une valeur critique à ce niveau : pour  $n < 5$ , les solutions ont un rayon fini et pour  $n \geq 5$  le rayon est infini.

Plus généralement, au-delà de ces 3 cas ayant une solution analytique, considérons par ordre croissant différentes valeurs de  $n$  présentant un intérêt manifeste en physique stellaire.

### **n=0**

Ce cas correspond à un modèle de densité constante. Sa solution analytique est de type parabolique. Tout d'abord, nous avons pour la masse de chaque couche :

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3} \quad (264)$$

Quant à la densité constante, nous pouvons la sortir des intégrations et elle est égale à la densité moyenne :

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (265)$$

Ceci étant admis, nous pouvons calculer explicitement le profil de pression du centre à la surface :

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_r^R \frac{Gm\rho}{r^2} dr \\ &= \frac{3GM^2}{8\pi R^6} (R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que nous ayons affaire à un gaz parfait. Dans ce cas le profil de température est aussi parabolique :

$$T(r) = \frac{P}{\rho} \frac{\mu m_u}{k} = \frac{GM}{R^3} \frac{\mu m_u}{2k} (R^2 - r^2). \quad (266)$$

Dans un gaz parfait de densité constante, nous avons aussi immédiatement :

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = 1. \quad (267)$$

Or nous avons vu précédemment que le milieu est instable vis-à-vis de la convection si  $\nabla \equiv d \ln T / d \ln P > \partial \ln T / \partial \ln P|_s \equiv \nabla_{ad}$ . Dans un gaz parfait,  $\nabla_{ad} = 2/5$ . **Une sphère de gaz de densité constante est donc instable vis-à-vis de la convection.** Aux dimensions stellaires, une telle instabilité serait extrêmement violente. En effet, dans les couches profondes où la capacité calorifique est très grande, nous avons vu plus haut que des valeurs de  $\nabla$  très légèrement supérieures suffisent pour permettre le transport de l'énergie par les mouvements convectifs. Qu'advierait-il donc d'une étoile de densité constante? Le transport d'énergie colossal par la convection conduirait à son rapide refroidissement. L'étoile se dilaterait alors rapidement et le gradient de température diminuerait tout aussi vite jusqu'à ce qu'il soit proche du gradient adiabatique. En conséquence, le profil de densité résultant finirait par décroître du centre vers la surface. **Cette forte instabilité convective explique donc pourquoi, presque partout, la densité décroît du centre vers la surface des étoiles.**

Notons toutefois que nous avons fait ici un raisonnement à poids moléculaire  $\mu$  constant. Il peut arriver que, localement, le poids moléculaire décroisse très rapidement vers l'extérieur (par exemple juste au-dessus d'un coeur convectif). Dans ce cas, c'est le critère de Ledoux qui exprime la stabilité "dynamique" vis-à-vis de la convection. L'instabilité convective y est alors amoindrie (semi-convection) voire absente même si  $\rho$  augmente vers l'extérieur.

## **n=1 ( $\gamma=2$ )**

Nous avons vu que ce cas a la solution analytique  $w(z) = \sin z/z$ . Cette fonction possède un point d'inflexion à la surface ( $z_1 = \pi$ ). Pour  $n < 1$ ,  $d^2w/dz < 0$  dans tout le polytrophe. Pour  $n > 1$ , la fonction  $w(z)$  possède un point d'inflexion d'autant plus profond que  $n$  est élevé. Nous verrons aussi plus loin que  $n = 1$  est le cas limite entre modèles dont le rayon croît ou décroît avec la masse.

### **n=3/2 ( $\gamma=5/3$ )**

Ce cas est de grande importance car on peut lui associer 2 situations physiques souvent rencontrées dans les étoiles.

La première est celle d'un **gaz complètement dégénéré non-relativiste**. Nous avons vu dans le chapitre sur la dégénérescence du gaz d'électrons (équation 125) que dans ce cas limite, la pression largement dominée par celle des électrons dégénérés est donnée par :

$$P = K\rho^{5/3} \quad (268)$$

avec

$$K = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{5m_e(m_u\mu_e)^{5/3}}. \quad (269)$$

Notons que  $K$  ne fait intervenir ici que des constantes physiques fondamentales et le poids moléculaire par électrons ( $\mu_e$ ).

L'autre cas de figure est celui d'une région où la convection est très efficace. Nous avons vu que dans la majeure partie de l'intérieur d'une étoile, la capacité calorifique est très élevée suite aux grandes températures et densités. Si une zone convective y est présente, une stratification quasi-adiabatique suffit pour assurer le transport de l'énergie (voir détails dans le chapitre sur la convection). Supposons pour simplifier les choses qu'on ait un gaz parfait complètement ionisé où la pression de radiation est négligeable comparativement à la pression du gaz. Dans ce cas, on a dans cette zone convective :

$$\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \simeq \Gamma_1 \simeq \frac{5}{3} \quad (270)$$

En intégrant cette relation, nous trouvons à nouveau  $P = K\rho^{5/3}$ . Notons toutefois que  $K$  n'est ici plus fixé par les constantes fondamentales.  $K$  dépend par exemple ici de la masse et du rayon de l'étoile si on les considère comme des paramètres libres.

### **n=3 ( $\gamma=4/3$ )**

Ce cas est aussi de grande importance. Il correspond au cas limite d'un gaz complètement dégénéré extrêmement relativiste. Nous avons vu à l'équation 127 que dans ce cas limite, la pression largement dominée par celle des électrons dégénérés est donnée par :

$$P = K\rho^{4/3} \quad (271)$$

avec

$$K = 2\pi c (3h^3)^{1/3} \left(\frac{1}{8\pi m_u \mu_e}\right)^{4/3} = \frac{1.2435 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \text{ (cgs)} \quad (272)$$

Nous verrons plus loin en détail les propriétés très particulières de ce cas limite.

### **n $\simeq$ 3.25**

Ce cas est parfois invoqué comme approximation d'une enveloppe radiative. Le raisonnement est le suivant. Multipliant l'équation 57 par  $T/P$ , nous avons :

$$\frac{dT}{dP} = \frac{3 \kappa L}{64\pi\sigma G T^3 m} \quad (273)$$

Supposons en outre que l'opacité obéisse à une loi de puissance :

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b \quad (274)$$

Par exemple,  $a = 1$  et  $b = -4.5$  pour un loi de type Kramers (voir éqs. 141, 140). Enfin, nous nous restreignons à une portion superficielle de l'étoile où il n'y a pas de réactions nucléaires et donc  $L$  est constant et dont la masse est négligeable comparativement à la masse totale de l'étoile, de sorte qu'on peut aussi y supposer  $m$  constant. Avec ces simplifications, nous trouvons :

$$\frac{dT}{dP} \propto T^{b-3} P^a \frac{L}{m}$$

et donc

$$\frac{d(T^{4-b})}{d(P^{a+1})} \propto \frac{L}{M} = cste.$$

L'intégration de cette équation nous donne donc :

$$T^{4-b} = B \frac{L}{M} (P^{a+1} + C).$$

Si on considère une région suffisamment profonde, le poids des couches est déjà très grand et  $P^{a+1} \gg C$ , ce qui nous permet de négliger  $C$ . Pour  $a = 1$  et  $b = -4.5$ , on trouve alors pour un gaz parfait ( $P \propto \rho T$ ) :

$$T^{8.5} = B \frac{L}{M} (P^2 + C) \simeq B P^2 L/M \propto \rho^2 T^2 L/M$$

Regroupant les  $T$  et  $\rho$ , on trouve alors :

$$T^{3.25} \simeq C_0 \sqrt{L/M} \rho \quad (275)$$

ou encore en terme de pression et densité :

$$P \simeq C_1 (L/M)^{\frac{1}{6.5}} \rho^{1+\frac{1}{3.25}} \quad (276)$$

### **n=5 ( $\gamma=6/5$ )**

Nous avons vu que ce cas, dont la solution analytique est donnée au début de cette sous-section, correspond au seuil limite entre modèles de rayon fini et modèles de rayon infini.

### **n= $\infty$ ( $\gamma=1$ )**

Ce cas limite correspond à une sphère isotherme. En effet, nous avons pour un gaz parfait isotherme :  $P = kT/(\mu m_u)\rho = K\rho$ , ce qui correspond bien à  $n = \infty$ . L'équation de Lane-Emden ne peut plus s'écrire telle quelle dans ce cas limite ( $w^\infty$  ?). Repartons de l'éq. 258 avec  $\gamma = 1$  et intégrons cette équation. Après quelques manipulations, nous trouvons :

$$\frac{\rho}{\rho_c} = e^{-\phi/K}, \quad (277)$$

où nous avons plutôt choisi la constante d'intégration telle que  $\phi(0) = 0$ . Comme pour les autres polytropes, nous substituons ce résultat dans le membre de droite de l'équation de Poisson, ce qui nous donne une équation différentielle du 2ème ordre à résoudre avec  $\phi$  pour seule inconnue. Le changement de variable approprié pour adimensionaliser le problème est alors plutôt :

$$w = \phi/K, \quad z = Ar, \quad A^2 = 4\pi G\rho_c/K \quad (278)$$

Moyennant ce changement de variable, l'équivalent de l'équation de Lane-Emden s'écrit, pour une sphère isotherme :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{dw}{dz} \right) = e^{-w}. \quad (279)$$

Les conditions aux limites à imposer sont ici :  $w(0) = 0$ ,  $dw/dz(0) = 0$ . Comme les autres polytropes avec  $n \geq 5$ , la sphère isotherme a un rayon infini. La solution de ce problème est par construction régulière au centre.

Notons toutefois qu'une solution singulière au centre est aussi souvent utilisée en dynamique stellaire et astrophysique extragalactique en raison de sa simplicité. Avec nos notations, elle s'écrit :  $w(z) = 2 \ln(z) - \ln(2)$ . On vérifie aisément qu'elle est solution de l'éq. 279. Son profil de densité est tout simplement donné par :

$$\rho(r) = \frac{K}{2\pi G} \frac{1}{r^2} = \frac{kT}{2\pi\mu m_u G} \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (280)$$

Les calculs numériques montrent que la solution régulière au centre se comporte asymptotiquement comme la solution singulière pour  $z \gg 1$ .



### 7.3 Relation masse-rayon

Nous avons vu au tout début du cours que la masse d'une sphère de rayon  $r$  est donnée par :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \quad (281)$$

Les notations 262 nous donnent  $\rho(r) = \rho_c w(z)^n$  et  $r^2 dr = (1/A)^3 z^2 dz$ , de sorte que

$$m(r) = 4\pi \frac{1}{A^3} \rho_c \int_0^z w^n z^2 dz = 4\pi \frac{r^3}{z^3} \rho_c \int_0^z w^n z^2 dz \quad (282)$$

Nous utilisons maintenant l'équation de Lane-Emden 264, ce qui nous donne :

$$m(r) = -4\pi \frac{r^3}{z^3} \rho_c \int_0^z \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{dw}{dz} \right) dz = -4\pi r^3 \rho_c \frac{1}{z} \frac{dw}{dz}. \quad (283)$$

En intégrant sur toute l'étoile, nous avons donc en particulier :

$$M = -4\pi R^3 \rho_c \frac{1}{z_n} \frac{dw}{dz}(z_n). \quad (284)$$

Pour le rayon total, nous avons bien sûr (éq. 262) :

$$R = \frac{z_n}{A} = z_n \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \quad (285)$$

Substituant cette relation dans l'éq. 284, nous trouvons donc :

$$M = -4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} z_n^2 \frac{dw}{dz}(z_n) \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \quad (286)$$

Ces 2 dernières équations relient la masse et rayon totaux de l'étoile à  $\rho_c$ . On peut donc éliminer  $\rho_c$  entre ces 2 équations, ce qui nous donne la relation suivante entre masse totale et rayon total :

$$R \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}.$$

Cette relation est fondamentale, c'est la **relation masse-rayon des polytropes**. Notons en particulier que la constante de proportionnalité dans ... dépend de l'indice polytropique  $n$  et de la constante  $K$ . Cette équation relie donc masse et rayon **pour une famille de polytropes de mêmes  $n$  et  $K$** .

Cette relation fait apparaître deux situations très différentes selon la valeur de  $n$ . Si  $n < 1$ , l'exposant de  $M$  dans 287 est positif. Le rayon du polytrope augmente donc si on augmente sa masse. Par contre, si  $1 < n < 3$ , l'exposant de  $M$  est négatif et le rayon du polytrope décroît quand on augmente sa masse. Enfin, le cas limite  $n = 3$

nécessitera un examen tout particulier. Il est facile de comprendre cette tendance en faisant l'expérience de pensée suivante. Considérons un modèle polytropique de départ donné. Il est caractérisé par  $n$ ,  $K$ , un rayon total  $R$  et une masse totale  $M$ . Tout en gardant maintenant  $n$ ,  $K$  et  $R$  constants, multiplions la masse de chaque couche par un facteur constant  $q > 1$ . Désignons par des " ' " la nouvelle structure. On a donc :

$$m(r) \rightarrow m'(r) = q m(r) \quad (287)$$

Comme le volume reste constant :

$$\rho(r) \rightarrow \rho'(r) = q \rho(r) \quad (288)$$

Pour la pression, utilisant la relation polytropique (éq. 255), nous avons :

$$P(r) \rightarrow P'(r) = K(\rho')^{1+1/n} = q^{1+1/n} P(r). \quad (289)$$

Quant au poids de la colonne de gaz, on a  $Poids(r) = \int_r^R (Gm\rho)/r^2 dr$  et donc :

$$Poids(r) \rightarrow Poids'(r) = \int_r^R (Gm'(r)\rho'(r))/r^2 dr = q^2 Poids(r). \quad (290)$$

On voit donc que si  $n < 1$  (et  $q > 1$ ) :  $P'(r) > Poids'(r)$ . La pression a plus augmenté que le poids de la colonne de gaz. La résultante des forces est donc vers l'extérieur et l'étoile se dilate. Une augmentation de la masse conduit donc ici à une dilatation de l'étoile. Inversement, si  $n > 1$  : le poids des couches a augmenté plus que la pression ( $P'(r) < Poids'(r)$ ). La pression étant moins élevée que le poids de la colonne de gaz, la résultante des forces est donc vers le centre et l'étoile se contracte.

Considérons maintenant différents cas physiques d'importance. Le premier est celui d'un polytrophe  $n = 3/2$  correspondant à un **gaz complètement dégénéré non-relativiste**. L'éq. 287 nous donne alors :

$$R \propto M^{-1/3} \quad (291)$$

Ce cas est représentatif des **naines blanches**. Les naines blanches obéissent donc à une relation masse rayon de ce type : plus leur masse est grande, plus petit est leur rayon. Lors de cette phase finale de la vie des étoiles ayant une masse du même ordre que notre soleil, il n'y a plus de production d'énergie par les réactions nucléaires. L'étoile se refroidit donc lentement. Comme la masse de l'étoile reste constante (sauf pour les systèmes binaires proches avec échanges de matière), le rayon reste donc aussi constant en vertu de la relation masse-rayon. La luminosité et la température effective de l'étoile décroissent donc progressivement avec  $L \propto T_{\text{eff}}^4$  en vertu de la relation de Stefan-Boltzmann à  $R$  constant.

Un autre cas présentant un certain intérêt est celui de la **sphère isotherme**. Après quelques développements similaires à ceux faits plus haut pour  $n$  fini, mais nous basant cette fois-ci sur l'éq. 279 avec les notations 278, nous trouvons :

$$m(r) = \frac{kT}{\mu m_u G} w \frac{dw}{dz} r \simeq \frac{2kT}{\mu m_u G} r, \quad (292)$$

la dernière égalité étant acceptable pour  $z \gg 1$ , quand le profil tend asymptotiquement vers celui de la sphère singulière ( $\rho \propto r^{-2}$ ).

## 7.4 Masse limite de Chandrasekhar

L'autre cas fondamental est celui d'un polytrophe  $n = 3$  correspondant à un gaz complètement dégénéré extrêmement relativiste. Avec  $3 - n = 0$  au dénominateur, on voit qu'il n'est pas possible d'appliquer telle quelle l'équation 287. Il faut plutôt remonter à l'équation 286, ce qui donne pour  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} M &= -4\pi \left[ \frac{K}{\pi G} \right]^{3/2} z_3^2 \frac{dw}{dz}(z_3) \\ &= \left( \frac{2}{\mu_e} \right)^2 1.459 M_\odot. \end{aligned} \quad (293)$$

Ce résultat est fondamental, il montre que pour un polytrophe  $n = 3$  dont la constante  $K$  est fixée, sa masse doit avoir une valeur bien précise. Dans le cas des étoiles en fin de vie où le gaz d'électron est dégénéré, cette masse est appelée **la masse limite de Chandrasekhar**. Dans les phases avancées de la vie d'une étoile où cette situation peut se rencontrer, l'étoile est typiquement majoritairement composée d'hélium et/ou de carbone et oxygène. Dans ce cas,  $\mu_e \simeq 2$  et la masse limite de Chandrasekhar est  $M \simeq 1.459 M_\odot$ .

Pour interpréter ce résultat, il est utile de préciser une fois pour toute ce que nous entendons par **contraction homologue**, car nous en ferons de nombreux usages par la suite. A tout modèle stellaire, on peut associer la fonction  $r(m)$  reliant la masse et le rayon de chaque sphère du centre à la surface. De même, si la distance au centre de chaque couche varie au cours du temps, on peut définir la fonction  $r(m, t)$  décrivant cette variation. La contraction ou dilatation de l'étoile est dite homologue ssi :

$$r(m, t) = x(t) r_0(m). \quad (294)$$

En d'autre mot, l'étoile subit une transformation homothétique de sa structure.

Quant au rayon, il peut valoir ce qu'on veut. La relation 285 nous montre comment le rayon et la densité centrale (qu'on peut choisir arbitrairement) sont reliés. Commençons par interpréter ce résultat avant de revenir à la masse. Considérons un modèle polytropique  $n = 3$  de départ ayant la masse de Chandrasekhar et un certain rayon. Dilatons (ou contractons) maintenant ce modèle en multipliant la distance au centre de chaque couche par un facteur  $x$ . On a donc :

$$r(m) \rightarrow r'(m) = x r(m). \quad (295)$$

Comme la masse reste constante et le volume est proportionnel à  $r^3$  :

$$\rho(m) \rightarrow \rho'(m) = \rho(m)/x^3. \quad (296)$$

Pour la pression, utilisant la relation polytropique  $P = K\rho^{4/3}$ , nous avons :

$$P(m) \rightarrow P'(m) = K\rho'(m)^{4/3} = K\rho(m)^{4/3}/x^4 = P(m)/x^4. \quad (297)$$

Quant au poids de la colonne de gaz, on a  $Poids(m) = \int_m^M Gm dm/(4\pi r^4)$  et donc :

$$Poids(m) \rightarrow Poids'(m) = \int_m^M Gm dm/(4\pi r'^4) = Poids(m)/x^4. \quad (298)$$

Nous sommes partis d'une configuration à l'équilibre hydrostatique, c'est-à-dire telle que  $P(m) = Poids(m) \forall m$ . En dilatant ou contractant l'étoile, les équations 297 et 298 nous montrent que la pression et le poids des couches ont varié dans la même proportion ( $1/x^4$ ). La relation polytropique  $P = K\rho^{4/3}$  assure donc que l'équilibre hydrostatique soit automatiquement maintenu lors de contractions ou dilatations de l'étoile, le rayon vaut donc ce qu'on veut.

Revenons maintenant à la masse. Pourquoi sa valeur est-elle fixée? Pour le comprendre, faisons l'expérience de pensée suivante. Nous partons à nouveau d'un polytrope  $n = 3$  ayant la masse de Chandrasekhar à l'équilibre hydrostatique. Ajoutons ensuite à sa périphérie une "coquille" de matière. L'ajout de cette coquille augmente le poids de la colonne de gaz au-dessus de chaque point. Le poids étant ainsi devenu supérieur à la pression, la résultante des forces est vers le centre et l'étoile se contracte. Supposons pour simplifier les choses que cette contraction se fasse de façon homologue. Les relations ci-dessus restent alors valables en tout temps. En particulier, la pression et le poids varient au cours du temps dans les mêmes proportions ( $1/x(t)^4$ ). Etant parti d'une situation de déséquilibre des forces (poids  $>$  P), celui-ci se maintient donc et l'effondrement continue tant que les conditions physiques justifiant la relation polytropique restent valables. On peut faire le même type de raisonnement en retirant cette fois-ci une partie de l'enveloppe de l'étoile. En conséquence, le poids des couches est inférieur à la pression et l'étoile se dilate tant que  $P = K\rho^{4/3}$  reste valide.

Dans ce qui précède, nous nous sommes fixés dès le départ sur un polytrope  $n = 3$ . Il est important aussi de se rendre compte de ce qui se passe quand on part d'un polytrope tel que  $n < 3$  et  $M < M_{ch}$ , puis on augmente progressivement sa masse. Cette situation peut correspondre par exemple à une naine blanche accrétant de la matière de son compagnon dans un système binaire. Au fur et à mesure de l'augmentation de la masse de la naine blanche, son rayon diminue en vertu de la relation masse-rayon (par exemple, pour un polytrope  $n = 3/2$  :  $R \propto M^{-1/3}$ ). La densité augmente donc. Quand la masse devient proche de la masse de Chandrasekhar, la densité est devenue telle que la vitesse des électrons est relativiste. L'étoile a alors de plus en plus de mal à soutenir son propre poids ( $R \rightarrow 0$  et  $dR/dM \rightarrow -\infty$  quand  $M \rightarrow M_{ch}$ ,  $n \rightarrow 3$ ). Les suites sont alors extrêmement violentes, conduisant à l'explosion de l'étoile en supernova.

**Collapse homologue d'un polytrope  $n = 3$**

La première phase dans les supernovae de type II (fin de vie des étoiles très massives) est le collapse du coeur dégénéré. Pour simplifier les choses, nous pouvons décrire ce collapse comme une contraction homologue d'un polytrophe  $n = 3$ . Un collapse homologue est par définition tel que :

$$r(m, t) = x(t) r_0(m) \quad (299)$$

$$v(m, t) = \partial r / \partial t(m, t) = dx/dt(t) r_0(m) \quad (300)$$

$$a(m, t) = \partial^2 r / \partial t^2(m, t) = d^2 x / dt^2(t) r_0(m),$$

où  $v(m, t)$  et  $a(m, t)$  sont les champs de vitesse et d'accélération du collapse. Pour décrire, ce collapse, nous partons bien entendu de l'équation de mouvement qui s'écrit ici :

$$a(m, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (301)$$

Inspiré par les développements faits lors de l'établissement de l'équation ..., il est utile d'introduire l'enthalpie :

$$h = 4K \rho^{1/3},$$

qui est telle que  $dh = dP/\rho$ . L'équation de mouvement s'écrit donc :

$$a(m, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} \quad (302)$$

On a déjà vu que pour une contraction homologue :

$$\rho(m, t) = \frac{\rho_0(m)}{x(t)^3}$$

Combinant cette équation et la définition ... de  $h$ , nous trouvons donc :

$$h(m, t) = 4K \rho_0(m)^{1/3} / x(t) = h_0(m) / x(t)$$

De même nous avons pour le potentiel gravifique :

$$\phi(m, t) = \int^{r(m, t)} \frac{Gm}{r^2} dr = \int^{r_0(m)} \frac{Gm}{r_0^2} dr_0 / x(t) = \phi_0(m) / x(t)$$

En dérivant ces relations par rapport à  $r$  ( $dr = x(t) dr_0$ ), on trouve donc :

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, t) = \frac{1}{x(t)^2} \frac{dh_0}{dr_0}(r_0) \quad (303)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) = \frac{1}{x(t)^2} \frac{d\phi_0}{dr_0}(r_0) \quad (304)$$

Substituant les relations ..., ... et ... dans l'équation de mouvement, nous trouvons donc :

$$\begin{aligned} a(m, t) &= -\frac{1}{x^2(t)} \left( \frac{d\phi_0}{dr_0} + \frac{dh_0}{dr_0} \right) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}(t) r_0(m) \end{aligned} \quad (305)$$

Identifiant dans chaque membre les fonctions du temps et de  $m$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(t) x^2(t) &= cst. \\ \frac{d\phi_0}{dr_0} + \frac{dh_0}{dr_0} &= -x x^2 r_0 \end{aligned} \quad (306)$$

Comme d'habitude, le potentiel est défini à une constante près, nous la choisissons telle que  $\phi_0(0) + h_0(0) = 0$ . L'équation ... s'intègre alors immédiatement pour donner :

$$\phi_0(r_0) + h_0(r_0) = -\frac{d^2x}{dt^2} x^2 r_0^2/2$$

Finalement, nous substituons ces résultats (...) dans l'équation de Poisson (les indices 0 sont omis pour simplifier les écritures) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dh}{dr} \right) - 3 \frac{d^2x}{dt^2} x^2 = 4\pi G \rho = 4\pi G \left( \frac{h}{4K} \right)^3$$

Pour terminer, nous faisons le changement de variables :

$$w = h/h_c, \quad r = \left( \frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3} z$$

L'équation ... se réécrit alors :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^3 = \lambda.$$

Cette équation décrivant la structure d'un polytrophe  $n = 3$  en chute libre correspond tout simplement à l'équation de Lane-Emden mais avec un terme constant  $\lambda$  supplémentaire.  $\lambda$  est donné par :

$$\lambda = \frac{-3 \frac{d^2x}{dt^2} x^2}{4\pi G \rho_{c0}} \quad (307)$$

## 7.5 Energie potentielle d'un polytrophe

Cas général :

$$E_g = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (308)$$

Sphère isotherme singulière tronquée :

$$E_g = -\frac{GM^2}{R} \quad (309)$$

# 8 Calcul numérique de modèles stellaires

## 8.1 Calcul d'un modèle statique

Pour rappel, le système de 4 équations différentielles à résoudre pour construire un modèle de structure interne d'étoile rigoureux est donné par les équations 77, 79, 81 et 85. La masse de chaque couche est particulièrement adaptée comme variable indépendante car elle reste en général constante et la masse totale est une donnée du problème et non une inconnue comme le rayon. Posons :

$$\bar{Y} = (r, P, T, L).$$

Le système différentiel à résoudre s'écrit donc :

$$\frac{d\bar{Y}}{dm} = \bar{f}(\bar{Y}) \quad (310)$$

où la fonction  $f$  est **non-linéaire**, c'est là que réside toute la difficulté du problème.

A ce système, il faut adjoindre 4 conditions aux limites. Les 2 conditions au centre sont triviale :

$$L(0) = r(0) = 0. \quad (311)$$

Par contre, les 2 conditions en surfaces sont plus délicates. Elles sont obtenues en imposant un raccord continu avec un modèle d'atmosphère stellaire : équations 90 et 92.

La méthode numérique la plus souvent utilisée pour résoudre ce système est la méthode des différences finies. L'étoile est subdivisée en un certain nombre de couches :  $N$ . On va par exemple de la surface (couche 1) vers le centre de l'étoile (couche  $N$ ). Les masses de ces couches sont choisies :

$$m_1 = M_{tot} > m_2 > \dots > m_{N-1} > m_N = 0.$$

On adopte la notation  $\bar{Y}_i = \bar{Y}(m_i)$ . Plusieurs schémas numériques peuvent être adoptés pour résoudre le problème. Il s'agit toujours d'un compromis à trouver entre précision et stabilité numérique. Voici un exemple simple. La dérivée dans le membre de gauche de l'équation 310 est estimée par différence finie en un point intermédiaire entre les couches  $i$  et  $i + 1$  (noté  $i + 1/2$ ) :

$$\left(\frac{d\bar{Y}}{dm}\right)_{i+1/2} \simeq \frac{\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i}$$

Finalement, l'équation aux différences reliant les couches  $i$  et  $i + 1$  s'écrit :

$$\frac{\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{i+1} + \bar{Y}_i}{2}\right). \quad (312)$$

L'erreur introduite par cette approximation est de l'ordre de  $(m_{i+1} - m_i)^2$ . Il y a  $N - 1$  équations de ce type reliant les couches 2 à 2. Comme  $\bar{Y}$  est un vecteur à 4 composantes, on a donc  $4(N - 1)$  équations scalaires. A ceci, il faut joindre les 2 conditions aux limites de surface. Les conditions aux limites centrales étant triviales, nous les omettons, ainsi que les 2 variables correspondantes. Le problème à résoudre a donc maintenant la forme d'un système non-linéaire de  $4N - 2$  équations à  $4N - 2$  inconnues.

Comme le problème est non-linéaire, il ne peut être résolu que par une méthode itérative. On part d'une estimation  $\bar{Y}_{k,\cdot}$  de la solution ; l'algorithme dit alors comment on passe de cette estimation à une estimation meilleure :  $\bar{Y}_{k+1,\cdot} = \bar{Y}_{k,\cdot} + \delta\bar{Y}$ . (le “.” sous-entend toutes les couches allant de  $i = 1$  à  $i = N$ ). Nous faisons maintenant un développement de Taylor limité au 1er ordre de la fonction  $\bar{f}$  autour du point  $(\bar{Y}_{i+1} + \bar{Y}_i)/2$  :

$$\bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{k+1,i+1} + \bar{Y}_{k+1,i}}{2}\right) \simeq \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{k,i+1} + \bar{Y}_{k,i}}{2}\right) + J_{\bar{f}}(\delta\bar{Y}_{i+1} + \delta\bar{Y}_i)/2,$$

où  $J_{\bar{f}}$  est la matrice jacobienne ( $4 \times 4$ ) de  $\bar{f}$  au point  $(\bar{Y}_{k,i+1} + \bar{Y}_{k,i})/2$ . On a aussi :

$$\frac{\bar{Y}_{k+1,i+1} - \bar{Y}_{k+1,i}}{m_{i+1} - m_i} = \frac{\bar{Y}_{k,i+1} - \bar{Y}_{k,i}}{m_{i+1} - m_i} + \frac{\delta\bar{Y}_{i+1} - \delta\bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i}.$$

Substituons ces 2 dernières équations dans l'équation 312. Nous nous ramenons ainsi au problème linéaire suivant à résoudre :

$$\frac{\delta\bar{Y}_{i+1} - \delta\bar{Y}_i}{m_{i+1} - m_i} - J_{\bar{f}}(\delta\bar{Y}_{i+1} + \delta\bar{Y}_i)/2 = \bar{f}\left(\frac{\bar{Y}_{k,i+1} + \bar{Y}_{k,i}}{2}\right) - \frac{\bar{Y}_{k,i+1} - \bar{Y}_{k,i}}{m_{i+1} - m_i}. \quad (313)$$

La matrice de ce système linéaire est une matrice bande de taille  $(4N - 2) \times (4N - 2)$ . Différentes méthodes existent pour la résolution d'un tel système. Sa solution donne  $\delta\bar{Y}$  et donc l'estimation suivante  $\bar{Y}_{k+1,\cdot} = \bar{Y}_{k,\cdot} + \delta\bar{Y}$ . On itère sur  $k$  en résolvant à chaque étape un tel système jusqu'à convergence vers la solution du problème non-linéaire de départ (équation 312).



## 8.2 Calcul de l'évolution au cours du temps

La structure d'une étoile va évoluer au cours du temps, c'est à cette étude que s'attache précisément la théorie de l'évolution stellaire. L'évolution temporelle a 2 origines possibles.

Soit l'étoile est dans une phase hors équilibre thermique. Dans ce cas l'équation de conservation de l'énergie 74 introduit de façon explicite une dérivée temporelle ( $Tds/dt = du/dt + Pdv/dt$ ) dans le système à résoudre, les grandeurs physiques ne peuvent donc que varier au cours du temps.

Soit l'étoile est à l'équilibre thermique. Dans ce cas, le moteur de l'évolution de la structure est la variation de la composition chimique due par exemple aux réactions de fusion nucléaire au coeur de l'étoile. Rappelons que la composition chimique intervient de façon centrale dans l'équation d'état (à travers le poids moléculaire moyen) et dans l'opacité. Si celle-ci varie, les coefficients du système différentiel à résoudre varient et donc la solution.

Considérons ici le 2ème cas où l'évolution résulte de la variation de composition chimique. On procède alors ainsi. On part d'un modèle de structure au temps  $t_k$  et on veut calculer un modèle un peu plus évolué au temps  $t_{k+1} = t_k + \delta t$ . Pour ce faire on procède en 2 étapes. Tout d'abord, on calcule la variation de composition chimique en chaque couche (à nouveau le choix des masses  $m_i$  comme paramètres indépendants est adapté puisque la composition chimique est attachée aux éléments matériels et suit leurs mouvements). La variation de la composition chimique due aux réactions nucléaires se déduit de la cinétique de ces réactions. Attachons un index  $i$  à chaque noyau du gaz, et considérons de plus près le noyau  $i$  dont l'abondance va varier suite aux réactions. Indexons par  $j$  l'ensemble des réactions de fusion créant le noyau  $i$  ( $X_j + X_l \rightarrow X_i$ ) et notons  $r_{ji}$  les taux de réaction correspondants. Indexons par  $k$  l'ensemble des réactions de fusion faisant disparaître le noyau  $i$  ( $X_i + X_l \rightarrow X_k$ ) et notons  $r_{ik}$  les taux de réaction correspondants. Soit  $n_i$  le nombre de noyaux  $i$  par unité de volume et  $X_i$  sa fraction en masse. On trouve donc en une couche donnée de l'étoile :

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left( \sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right).$$

L'abondance de l'élément  $i$  au temps  $t_{k+1}$  dans la couche considérée est alors donnée par :

$$X_i(t_{k+1}) = X_i(t_k) + \frac{m_i}{\rho} \left( \sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right) \delta t. \quad (314)$$

Evidemment, les taux de réactions nucléaires dépendent fortement de la température, la variation de la composition chimique ne sera donc pas la même d'une couche à l'autre. Il importe de mentionner qu'une attention particulière est requise pour le

calcul numérique de ces variations d'abondances. Le plus simple est de prendre un exemple pouvant poser problème : le deutérium. La cinétique des 2 réactions de la chaîne p-p le produisant et le détruisant donne :

$$\frac{dD}{dt} = \langle \sigma v \rangle_{pp} \frac{H^2}{2} - \langle \sigma v \rangle_{pd} HD \quad (315)$$

La section efficace pour la destruction est considérable au coeur du soleil :  $\tau_D = 1/(\langle \sigma v \rangle_{pd} H) \approx 1s$ . Imaginons qu'on parte d'une abondance initiale de deutérium  $D_0$ . Pour obtenir l'abondance en  $t_0 + \delta t$ , on pourrait naïvement appliquer la formule :

$$D_1 = D_0 + (\langle \sigma v \rangle_{pp} H_0^2/2 - \langle \sigma v \rangle_{pd} H_0 D_0) \delta t \quad (316)$$

La durée de séjour de notre Soleil sur la séquence principale est de l'ordre de  $10^{10}$  ans. Pour suivre son évolution au cours du temps, on subdivise cet intervalle en typiquement 1000 pas temporels :  $\delta t \approx 10^7$  ans.

$\langle \sigma v \rangle_{pd} H_0 \delta t = \delta t / \tau_D \approx 10^7$  ans / 1 seconde est donc gigantesque.

L'abondance  $D_1$  obtenue est donc un nombre très négatif, ce qui est tout à fait inacceptable. C'est la manifestation d'une instabilité numérique associée au caractère extrêmement raide ("stiff" en anglais) du problème numérique étudié. Différentes solutions existent pour que l'algorithme numérique soit stable. Une première est d'utiliser en schéma numérique implicite. Par exemple pour le deutérium :

$$D_{k+1} = D_k + (\langle \sigma v \rangle_{pp} H_{k+1}^2/2 - \langle \sigma v \rangle_{pd} H_{k+1} D_{k+1}) \delta t \quad (317)$$

est numériquement stable comme on peut facilement le vérifier :  $0 < D_{k+1}/D_k \ll 1$ . Une autre solution est la mise à l'équilibre des réactions dont le temps de vie est beaucoup plus petit que le pas temporel. Par exemple pour l'abondance de deutérium, on prend alors :

$$\left(\frac{D}{H}\right)_{eq} = \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{2 \langle \sigma v \rangle_{pd}} \approx 10^{-17} \quad (318)$$

Mentionnons aussi un autre problème numérique particulièrement délicat en évolution stellaire : l'évolution de la taille des zones convectives. La frontière des zones convectives est déterminée par le critère de Schwarzschild ou de Ledoux. Le gradient radiatif y apparaissant fait intervenir l'opacité (équation 58), elle-même fortement dépendante de la composition chimique. Les zones convectives homogénéisent la composition chimique là où elles sont présentes. Le problème de l'évolution de la composition chimique y devient donc un problème non-local sur un domaine dont la taille variable dépend elle-même de la composition chimique. C'est un problème implicite délicat, dont aucune bonne solution assurant la convergence n'est connue. Les différents codes d'évolution stellaire existant dans la communauté scientifique utilisent chacun leur recette personnelle, aucune d'une robustesse à toute épreuve ...

# Evolution stellaire

Dans cette deuxième partie du cours, nous allons étudier comment les étoiles évoluent au cours du temps. Le théorème du Viriel ainsi que quelques relations d'homologie se révéleront très utiles par la suite. Commençons donc par les établir.

## 9 Théorèmes et relations utiles

### 9.1 Théorème du Viriel

Considérons une sphère de gaz à l'équilibre hydrostatique. Partons de l'équation d'équilibre hydrostatique  $dP/dr = -\rho Gm/r^2$ , multiplions les 2 membres par  $4\pi r^3$  et intégrons sur la masse. Pour le membre de gauche, une intégration par partie et l'utilisation de l'équation  $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$  nous donnent :

$$\begin{aligned}\int_0^m 4\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm &= 4\pi r^3 P(m) - \int_0^m 12\pi r^2 \frac{dr}{dm} P dm \\ &= 4\pi r^3 P(m) - 3 \int_0^m \frac{P}{\rho} dm.\end{aligned}\quad (319)$$

Nous trouvons donc finalement :

$$4\pi r^3 P(m) - 3 \int_0^m \frac{P}{\rho} dm = - \int_0^m \frac{Gm}{r} dm.\quad (320)$$

Si nous étendons le domaine d'intégration à toute l'étoile et supposons la pression de surface négligeable par rapport aux valeurs internes, nous trouvons alors :

$$3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \int_0^M \frac{Gm}{r} dm.\quad (321)$$

Pour un gaz parfait monoatomique non-relativiste, nous avons :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2}{3} u.\quad (322)$$

Pour établir cette relation, partons de l'intégrale de pression établie dans la première partie du cours (sect. 4.4, éq. 107). Notons  $E$  l'énergie interne par particule ayant une impulsion  $p$ . On voit immédiatement que l'éq. 107 avec  $vp = 2E$  implique  $P = 2/3 u_v$  et donc l'éq. 322,  $u_v$  étant l'énergie interne par unité de volume. Or  $vp = 2E$  est précisément vérifié pour un gaz parfait monoatomique non-relativiste. Notons que la dégénérescence éventuelle de ce gaz n'affecte pas la validité de l'éq. 322. Par contre, si la pression de radiation est non négligeable par rapport à la pression totale, l'éq. 322 n'est pas vérifié car le gaz des photons est on ne peut plus relativiste!...

Nous trouvons donc pour une sphère de gaz parfait monoatomique non-relativiste à l'équilibre hydrostatique :

$$E_G = -2 E_i, \quad (323)$$

où  $E_G = -\int_0^M Gm dm/r$  est l'énergie potentielle gravifique totale de l'étoile et  $E_i = \int_0^M (P/\rho) dm$  est l'énergie interne totale de l'étoile, càd ici la somme des énergies cinétiques de toutes les particules qui la composent. Supposons que l'étoile se contracte avec une libération d'énergie potentielle  $-\Delta E_g$ . L'éq. 323 nous donne :  $\Delta E_i = -(1/2)\Delta E_G$ . Autrement dit :

**Lors d'une contraction de l'étoile maintenant l'équilibre hydrostatique, la moitié de l'énergie potentielle libérée est convertie en augmentation de son énergie interne totale.**

## 9.2 Relations d'homologie

Les relations d'homologie sont un outil pédagogique très utile pour comprendre les grandes tendances de l'évolution stellaire. Différents modèles stellaires sont dit homologues sous les conditions suivantes. Pour chacun de ces modèles et chaque grandeur physique locale (notée  $y$ ), nous devons pouvoir écrire

$$y(r) = yy(x) f_y(M, R), \quad (324)$$

où  $x = r/R$  et  $yy(x)$  demeure la même fonction d'un modèle à l'autre. En d'autres mots, le profil du centre à la surface de chaque grandeur physique ne varie d'un modèle à l'autre que par un facteur multiplicatif. Sous cette condition d'homologie, il est aisé de déterminer analytiquement les fonctions  $f_y(M, R)$ . Commençons avec la fonction  $m(r)$ . Nous avons trivialement :

$$m(r) = mm(x)M. \quad (325)$$

Partant de la relation  $\rho = (dm/dr)/(4\pi r^2)$  pour la masse volumique et utilisant Eq. (325), nous trouvons simplement :

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi x^2} \frac{dmm}{dx} M/R^3 = \rho\rho(x) \frac{M}{R^3}. \quad (326)$$

Pour la pression, partant de l'équation d'équilibre hydrostatique intégrée et utilisant les Eqs.(325) et (326), nous trouvons :

$$P(r) = \int_r^R \frac{Gm\rho}{r^2} dr = \int_x^1 \frac{Gmm(x)\rho\rho(x)}{x^2} dx M^2/R^4 = PP(x) \frac{M^2}{R^4}. \quad (327)$$

Pour la température, supposons un gaz parfait non-dégénéré et sans radiation. Exprimons l'homologie pour le poids moléculaire moyen :  $\mu(r) = \mu\mu(x)\mu$ . Nous trouvons alors :

$$T(r) = \frac{m_u}{k} \frac{\mu(r)P(r)}{\rho(r)} = TT(x) \frac{\mu M}{R}, \quad (328)$$

le facteur  $\mu$  disparaissant si on compare des étoiles de même composition chimique interne. Enfin, intéressons-nous à la luminosité dans une zone radiative. Rappelons-nous l'équation de transport par la radiation (éq. 46) :

$$L = -\frac{16\pi r^2 acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (329)$$

Pour obtenir une solution analytique, nous simplifions encore plus le problème en supposant une loi de puissance pour l'opacité :  $\kappa = \kappa_0 \rho^b T^a$ . Les principaux facteurs de l'éq. 329 s'obtiennent immédiatement à partir des équations ci-dessus. Le seul justifiant notre attention est le gradient de température. Nous avons simplement :

$$\frac{dT}{dr}(r) = \frac{dT}{dx}(x) \frac{\mu M}{R^2}. \quad (330)$$

Nous trouvons alors :

$$L(r) = -\frac{16\pi ac}{3\kappa_0} \frac{x^2 T T(x)^3}{\rho \rho(x)} \frac{dT}{dx}(x) (\mu^4/\kappa) M^3 \propto (\mu^4/\kappa) M^3. \quad (331)$$

Nous pouvons aller encore plus loin dans les développements en supposant une loi de puissance pour l'opacité :  $\kappa = \kappa_0 \rho^b T^a$ , ce qui donne :

$$L(r) = LL(x) \mu^4 M^{3-a-b} R^{a+3b} = LL(x) \mu^4 M^{5.5} R^{-0.5}, \quad (332)$$

où nous avons supposé une loi de type Kramers ( $a = -3.5$ ,  $b = 1$ ) pour la dernière égalité. On constate la croissance rapide de la luminosité avec la masse, c'est la **relation masse-luminosité** sur laquelle nous reviendrons. Quant à la croissance rapide avec  $\mu$ , il faut la prendre avec des pincettes car elle se base sur l'hypothèse jamais vérifiée de modification homologue du poids moléculaire moyen.

## 10 Phase proto-stellaire : effondrement gravifique

Le disque de notre galaxie et des autres galaxies spirales est principalement composé de grandes régions gazeuses et d'étoiles. Son évolution résulte de l'interaction entre ces 2 composantes : les nébuleuses interstellaires subissent des effondrements gravitationnels locaux conduisant à la formation d'étoiles ; et en retour les étoiles enrichissent le milieu interstellaire en éléments lourds synthétisés en leur sein par leurs pertes de matière, particulièrement les plus massives et durant les phases ultimes de leur évolution (nébuleuse planétaire, supernovae). Commençons donc par rappeler dans les grandes lignes les 3 types de nuages interstellaires rencontrés dans le disque de notre galaxie.

## 10.1 Nuage primordial

### Nuages moléculaires

Comme leur nom l'indique, ils sont principalement composés de molécules d'hydrogène diatomique ( $H_2$ ). Leurs températures typiques sont de 10-15 K, ce qui n'est pas bien supérieure à celle du rayonnement cosmologique (3 K) et en fait les plus froides des nébuleuses. Quand la densité en nombre atteint une valeur de l'ordre de  $10^{10}$  molécules /  $m^3$ , les atomes d'hydrogène d'un gaz froid se combinent pour former des molécules. On comprend ainsi le lien de parenté entre nuages atomiques et moléculaires : suite à des contractions et refroidissements locaux, des portions de nuages atomiques peuvent se transformer en nuages moléculaires. Pour compléter leur carte d'identité, leurs masses sont typiquement de  $10^4$  à  $10^5 M_\odot$  et leurs tailles de 1 à 50 pc. C'est à partir de ces nuages moléculaires que les étoiles se forment, ce qui en fait des "pouponnières" d'étoiles. Leur étude est donc fondamentale pour comprendre le processus de formation des étoiles. Au vu de leurs très faibles températures, leur flux de rayonnement thermique est très faible (loi de Stefan) et situé dans le domaine radio (loi de Wien). En outre,  $H_2$  ne présente pas de raies aisément observables, ce qui constitue un obstacle à leur détection et caractérisation directe. Pour cartographier ceux-ci, on peut s'appuyer essentiellement sur l'émission radio à  $\lambda=2.6$  cm de la molécule  $CO$ . Certains nuages moléculaires n'en sont pas moins observables dans le domaine visible. Leur illumination par les jeunes et très lumineuses étoiles massives récemment formées en leur sein les fait apparaître dans toute leur splendeur (voir par exemple les impressionnantes images de la nébuleuse de l'aigle, ...). Des portions isolées de nuages moléculaires, les **globules de Bok** peuvent également être détectés grâce à leur qualité occultante cachant les étoiles situées derrière eux.

### Nuages atomiques : régions HI

Comme leur nom l'indique, ils sont principalement composés d'hydrogène atomique. Ils sont un peu plus chaud et moins denses que les nuages moléculaires :  $T \approx 30 - 80$  K,  $10^7 - 10^9$  particules /  $m^3$ . Ils constituent la plus grande contribution en masse au milieu interstellaire. Cependant, ils sont particulièrement difficiles à détecter : trop froids pour un rayonnement thermique significatif, trop peu denses et donc opaques pour occulter les étoiles situées derrière eux. La **raie hyperfine à 21 cm**, correspondant au changement de spin de l'électron au niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, constitue la principale source observationnelle pour les caractériser et cartographier.

### Nuages ionisés : régions HII

Comme leur nom l'indique, elles sont principalement composées d'hydrogène ionisé, c'est-à-dire de protons et électrons libres, constituant donc ce qu'on appelle un *plasma*. Comme dans tout plasma, leurs températures sont très élevées, ici de l'ordre

de 8000 K. Par contre, leurs densités sont minuscules :  $10^2 - 10^6$  particules /  $m^3$ , c'est-à-dire un facteur  $\approx 10^{-25}$  par rapport à l'air ! Ces régions résultent de l'interaction entre le milieu interstellaire et le rayonnement très énergétique issu des étoiles massives environnantes. Ce rayonnement chauffe le gaz à de telles températures, ionise les atomes et/ou porte leurs électrons à des niveaux d'énergie supérieurs. Le retour des électrons à des niveaux d'énergie plus faible produit de fortes raies en émission dans le domaine visible.

## 10.2 Instabilité gravitationnelle, effondrement isotherme et fragmentation

Si les nuages que nous observons dans le ciel ne s'effondrent pas sur eux-même, c'est parce que leur auto-gravité, c'est-à-dire l'attraction gravifique entre leurs parties, est tout à fait négligeable du fait de leur très faible masse. Toute tentative de déstabilisation produit un gradient de pression en leur sein s'opposant aisément à un effondrement.

La situation est totalement différente pour les nuages moléculaires et globules de Bok. Leur masse et donc auto-gravité très élevées les situe dans un état d'équilibre précaire (par là j'entends à la limite de l'instabilité). Ceci peut être quantifié au travers d'un critère bien connu, le critère de Jeans.

### 10.2.1 Critère de Jeans

Nous avons vu que ce qui distingue fondamentalement un nuage stable dans le ciel d'un nuage moléculaire dans l'univers, ce sont leurs tailles et masses. Le critère de Jeans nous donne les tailles et masses limites au-delà desquelles un nuage devient instable du fait de sa trop grande auto-gravité.

#### Critère en taille :

Un nuage moléculaire dont la taille  $R$  dépasse significativement la longueur de Jeans  $R_J$  est gravitationnellement instable, avec

$$R_J = \left( \frac{27}{16q\pi G \langle \rho \rangle} \right)^{1/2} v_s \approx \tau_{ff} v_s \quad (333)$$

$\langle \rho \rangle$  étant la masse volumique moyenne,  $v_s^2 = \partial P / \partial \rho|_T \simeq P / \rho = kT / (\mu m_u)$  le carré de la vitesse du son isotherme,  $\tau_{ff} = \sqrt{\pi / (G \langle \rho \rangle)}$  est le temps de chute libre, de l'ordre du temps dynamique déjà rencontré au tout début du cours et  $q$  est un paramètre inférieur à 1 sur lequel nous reviendrons.

**Critère en masse :**

Un nuage moléculaire dont la masse  $M$  dépasse significativement la masse de Jeans  $M_J$  est gravitationnellement instable, où

$$M_J = \frac{27}{16} \left( \frac{3}{\pi q^3} \right)^{1/2} \left( \frac{k}{\mu m_u G} \right)^{3/2} T^{3/2} < \rho >^{-1/2} . \quad (334)$$

Les conditions initiales typiques d'un nuage moléculaire nous donnent  $M_J \approx 400 M_\odot$ .

Différentes façons d'établir ce critère peuvent être trouvées dans la littérature, les résultats ne différant entre eux que par un facteur numérique de l'ordre de l'unité. Je me contente ici de l'approche qui me paraît la plus réaliste. Approximons le nuage moléculaire par une sphère de gaz parfait isotherme à l'équilibre hydrostatique. Considérons plus précisément l'ensemble des sphères isothermes ayant une densité moyenne et une température fixées (mais des masses et rayons variables) et démontrons le critère de Jeans pour cet ensemble. Nous supposons que l'extérieur exerce sur chacune de ces sphères une pression la maintenant à l'équilibre hydrostatique (rappelons qu'une pression surfacique nulle impliquerait un rayon infini, voir Sect.7). Le théorème du Viriel (éq. 320) nous donne la valeur de cette pression :

$$\begin{aligned} P_S &= \left[ 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \right] / (4\pi R^3) \\ &\simeq \frac{c_v T M}{2\pi R^3} - q \frac{GM^2}{4\pi R^4} , \end{aligned} \quad (335)$$

où nous avons fait l'hypothèse d'un gaz parfait isotherme. Nous avons vu précédemment (éq. 309) que le paramètre  $q$  que nous venons d'introduire dans l'expression du potentiel gravifique est égal à 1 pour la sphère isotherme singulière. Dans le cas régulier,  $q < 1$ . Faisons subir à l'une de ces sphères une contraction (par exemple par une légère augmentation de la pression externe). Supposant que l'équilibre hydrostatique est maintenu, l'éq. 335 reste valable en tout temps. La masse étant fixée lors de cette contraction, cette équation nous montre explicitement comment la pression de surface varie au fur et à mesure de la diminution du rayon total. Une simple étude de la fonction  $P_S(R)$  nous montre qu'elle a un maximum en

$$R_{max} = \frac{4q \mu m_u GM}{9 k T} . \quad (336)$$

Supposons maintenant que  $R > R_J$ . Remplaçant  $< \rho >$  par  $3M/(4\pi R^3)$  dans l'expression de  $R_J$  (éq. 333) et isolant  $R$  dans cette inégalité, nous en déduisons  $R < R_{max}$ . L'éq. 335 nous dit que  $P_S(R)$  croît avec  $R$  dans ce régime. La contraction conduit donc à une diminution de la pression de surface. Etant ainsi inférieure à la pression exercée par l'extérieur, la sphère réagit à la contraction initiale en se contractant de plus belle, ce qui caractérise un équilibre instable. On trouve immédiatement par le même raisonnement que l'équilibre est stable pour  $R < R_J$ . Le



critère en masse s'obtient simplement en portant au cube le critère en rayon, et multipliant par la densité moyenne.

Une hypothèse importante pour l'établissement du critère de Jeans a été de considérer un nuage isotherme et une contraction préservant ce caractère isotherme. Voyons ce qui justifie cette hypothèse. L'effondrement gravitationnel est un phénomène dynamique. L'échelle de temps qui lui est associée est donc le temps dynamique :

$$\tau_{dyn} = \sqrt{R^3/GM} \approx 1/\sqrt{G\rho} \quad (337)$$

que nous avons introduit au tout début du cours. Sur un intervalle de temps de l'ordre de  $1/\sqrt{G\rho} \approx 10^6$  ans, la taille du nuage en effondrement chute d'un facteur significatif. Nous introduisons Sect. 11.1.2, éq. 346 le temps de Helmholtz-Kelvin  $\tau_{HK}$  donnant l'échelle de temps associée aux déséquilibres thermiques. Le temps requis pour que la sphère de masse  $M_J$  et rayon  $R_J$  rétablisse l'équilibre thermique si on l'a brisé est de l'ordre de  $\tau_{HK} \approx GM_J^2/(R_J L)$ . Combinant les équations 333, 334,

$$L = 4\pi R_J^2 \sigma T^4, \quad (338)$$

nous trouvons pour des densités et températures typiques :  $\tau_{HK} \approx 100$  ans, ce qui est très nettement inférieur au temps de chute libre. Nous en concluons que, dans un premier temps, l'équilibre thermique caractérisé par une température constante est maintenu au cours du collapse. Avec une température constante et une densité augmentant, l'expression 334 nous dit que la masse de Jeans décroît lors de cette phase. Des sous-portions de masse de plus en plus faible s'effondrent donc sur elles-mêmes, c'est le **processus de fragmentation du nuage**.

## 10.2.2 Champs magnétique et turbulence

Le champs magnétique et la turbulence ont été négligés dans les discussions précédentes. Or, comme nous allons le voir, l'un et l'autre ont un effet stabilisateur sur le nuage, augmentant la masse de Jeans  $M_J$ . Commençons par le champs magnétique. Les observations nous indiquent que l'intensité du champs magnétique  $B$  dans le milieu interstellaire est inférieure à  $\approx 10 \mu G$ . Nous utilisons ici le Gauss, unité CGS pour  $B$ ,  $1 \text{ Gauss} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$ . Le champs magnétique produit des courants dans un fluide (équation de Maxwell-Ampère). Ces courants combinés au champs magnétique produisent une force de Lorentz agissant sur le fluide en mouvement. Cette force de Lorentz s'explique en 2 termes dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement : une tension magnétique s'opposant aux cisaillements et un gradient de pression magnétique  $\nabla P_B$ , avec

$$P_B = B^2/(8\pi). \quad (339)$$

Il est aisé de comprendre l'effet stabilisateur de cette pression magnétique. Tentons de contracter notre nuage, sa surface diminue et il en va donc ainsi du flux

magnétique  $\Phi$  la traversant. La loi d'induction magnétique nous dit alors qu'une force électromotrice est produite conduisant à une augmentation de  $B$  et donc de la pression magnétique s'opposant à l'effondrement du nuage.

Les mouvements sont très turbulents au sein des nuage en effondrement. En effet, les grandes vitesses et tailles combinées à la faible viscosité cinématique nous donnent un nombre de Reynolds très élevé. On peut deviner comment cette turbulence va affecter le mouvement moyen par analogie avec la théorie cinétique des gaz. Dans cette dernière, les mouvements individuels des particules produisent statistiquement un flux d'impulsion et donc une pression : la pression gazeuse. De même, les mouvements turbulents relativement au mouvement moyen produisent statistiquement un flux d'impulsion et donc une pression, c'est la pression de turbulence :  $P_{turb} = 1/3\rho|V_t|^2$ . Celle-ci a un caractère stabilisateur s'opposant également à l'effondrement du nuage sur lui-même.

Les modèles magnéto-hydrodynamiques de nuages moléculaires révèlent une turbulence affectant considérablement la dynamique de l'effondrement mais d'une façon bien plus complexe que l'image isotropique donnée par la théorie cinétique des gaz. En effet, cette turbulence étant hautement supersonique, le flot consiste en une séquence de chocs produisant de grandes variations locales de densité. Le champs magnétique semble jouer un rôle secondaire comparativement à la turbulence.

**En résumé, durant une première phase, une portion de nuage moléculaire de plusieurs centaines de masses solaires s'effondre sur elle-même tout en gardant une température plus ou moins constante. Celle-ci se fragmente en plusieurs morceaux qui constitueront les futures étoiles. La durée de cette phase est de l'ordre de  $10^6$  ans.**

### 10.3 Effondrement adiabatique

L'inégalité  $\tau_{dyn} \gg \tau_{HK}$  n'est pas éternellement maintenue. Pour s'en rendre compte, examinons l'évolution de ces 2 temps caractéristiques.  $\tau_{dyn} \approx 1/\sqrt{G\rho}$  chute rapidement suite à l'augmentation de la masse volumique. Quant à l'évolution du temps thermique, combinant les équations 333, 334 et 338, nous trouvons

$$\tau_{HK} \propto T^{-5/2}\rho^{1/2}, \quad (340)$$

ce temps augmente donc comme  $\rho^{1/2}$ . Arrive donc un moment où ces 2 temps deviennent du même ordre de grandeur, ce qui caractérise la fin de l'effondrement isotherme. Le temps thermique passant finalement au-dessus du temps dynamique, l'évacuation de l'énergie par le rayonnement devient nettement inférieure à l'énergie potentielle libérée lors de l'effondrement. Le nuage entre ainsi dans une phase **d'effondrement adiabatique**. La température se met donc à augmenter et la masse de Jeans cesse de chuter (Eq. 340). **La fragmentation est donc stoppée.** Egalant

les relations 337 et 340, nous trouvons  $\rho = k_1 T^{5/2}$ . Utilisant 334 et remplaçant les constantes par leurs valeurs numériques, nous trouvons donc une masse à la fin du processus de fragmentation isotherme :

$$M > M_J \approx 0.018 T^{1/4} M_\odot. \quad (341)$$

Avec  $T \approx 10$  K, cela nous donne une masse des plus petits fragments de l'ordre de  $0.03 M_\odot$ . On voit donc que des objets de masse nettement inférieure tels que les planètes ne peuvent se former par le processus d'effondrement gravitationnel que nous venons de décrire.

Pour un gaz parfait diatomique (5 degrés de liberté), les augmentations adiabatiques de température et pression sont simplement reliées par  $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma = (\rho/\rho_0)^{7/5}$ ,  $T/T_0 = (\rho/\rho_0)^{\gamma-1} = (\rho/\rho_0)^{2/5}$ . L'augmentation de pression centrale finit par compenser et même dépasser le poids de la colonne de gaz. Un ralentissement brusque de l'effondrement en résulte. On peut séparer le nuage protostellaire en deux parties. Dans les régions centrales où la vitesse d'effondrement est subsonique, **l'équilibre hydrostatique** est rapidement établi. Par contre, l'effondrement est supersonique dans les régions externes. La perturbation résultant du changement brusque de régime s'accumule donc au point sonique où la vitesse d'effondrement locale égale la vitesse du son, formant une **première onde de choc**.

Quand la température centrale atteint des valeurs  $T \approx 2000$  K, **les molécules d'hydrogène se dissocient**. Un peu plus tard, à  $T \approx 3000$  K, **l'hydrogène atomique s'ionise**. Ces 2 transformations sont endothermiques. Une partie importante de l'énergie potentielle libérée lors de l'effondrement est donc pompée par celles-ci. L'augmentation de l'énergie cinétique (et donc de  $T \approx E/k$ ) s'en trouve fortement amoindrie et il en va de même pour la pression. Plus quantitativement, l'exposant adiabatique  $\Gamma_1 \equiv \partial \ln P / \partial \ln \rho|_s$  passe en-dessous de la valeur critique  $4/3$ . On verra Sect. 12.1 que cela traduit une situation dynamiquement instable : l'augmentation de pression ne suffit pas à compenser l'augmentation du poids de la colonne de gaz et **le coeur s'effondre une 2ème fois**. Une fois que tout l'hydrogène est ionisé au coeur, ces réactions cessent et  $\Gamma_1$  remonte à  $5/3$  (gaz monoatomique, 3 degrés de liberté). Le deuxième effondrement cesse donc au coeur et une **deuxième onde de choc** apparaît entre le coeur complètement ionisé et la partie partiellement ionisée toujours en train de s'effondrer.

Insistons sur le très grand contraste de densité s'établissant entre le coeur et l'enveloppe durant l'effondrement. Le temps dynamique des régions centrales est donc beaucoup plus court que dans les régions externes du nuage proto-stellaire. Ainsi, alors que plusieurs phases ont pu s'enchaîner au coeur, les régions externes ont peu bougé et sont toujours en effondrement isotherme.

## 10.4 Disque d'accrétion

Tous les corps de l'univers ont un moment cinétique. Dans les nuages moléculaires denses, le moment cinétique par unité de masse est très élevé, avec des valeurs  $j \approx 10^{21-22} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Dans un référentiel en corotation, la force centrifuge particulièrement élevée à l'équateur s'oppose à l'attraction gravifique. Un disque d'accrétion équatorial en rotation se forme donc là où ces 2 forces se compensent. L'accrétion de matière se fait préférentiellement là où la force centrifuge (et le moment cinétique) sont négligeables, c'est à dire aux pôles de la proto-étoile. L'apport de moment cinétique résultant de cette accrétion aux pôles étant faible, le moment cinétique spécifique des étoiles descend bien en-dessous de celui du nuage primordial. Ainsi, pour une étoile de type T Tauri (caractéristique de cette phase), le moment cinétique spécifique prend des valeurs  $j \approx 10^{16-17} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . On dit que **le disque d'accrétion assure l'évacuation du moment cinétique**. Ce processus d'évacuation du moment cinétique est cependant plus complexe que la simple description donnée ici. Dans des binaires en formation, les effets de marées impliquent une diminution marquée du moment cinétique rotationnel au profit du moment cinétique orbital. Quant au champ magnétique, nous avons vu qu'il s'oppose à tout cisaillement. Il empêche donc l'établissement d'un trop grand contraste de fréquence de rotation entre l'étoile et le disque, amplifiant ainsi l'évacuation du moment cinétique de la proto-étoile, on parle de **couplage magnétique entre la protoétoile et son disque d'accrétion**. Le disque d'accrétion apparaît durant la phase d'effondrement adiabatique et se maintient durant une partie de la phase dite de pré-séquence principale que nous allons maintenant décrire.

## 11 Phase de Pré-Séquence Principale (PMS) : contraction à l'équilibre hydrostatique

L'établissement de l'équilibre hydrostatique au coeur de la future étoile marque le passage de la phase proto-stellaire d'effondrement gravitationnel à la phase dite de pré-séquence principale. Comme nous le verrons, l'établissement de l'équilibre hydrostatique ne stoppe pas la contraction de l'étoile mais la ralentit fortement. Dans un premier temps, le coeur à l'équilibre hydrostatique est entièrement caché par la portion de nuage moléculaire à partir duquel il s'est formé. La température initiale du nuage étant très faible, sa température effective l'est tout autant et son rayonnement thermique est cantonné aux grandes longueurs d'onde. Le gaz entourant l'étoile finit ensuite par se dissiper suffisamment pour la révéler. Pour plus de clarté, il est utile à ce stade de commencer par décrire ce qui se passerait si l'étoile conservait la même masse au cours du temps. Nous verrons ensuite comment l'accrétion de matière modifie ce simple scénario.

## 11.1 Evolution PMS à masse constante

### 11.1.1 La séquence de Hayashi

Lorsque l'étoile à l'équilibre hydrostatique se révèle à l'observateur, les modèles à masse constante nous prédisent qu'elle est entièrement convective. Ceci nous amène naturellement à la notion de séquence de Hayashi. Considérons **l'ensemble des modèles d'étoiles entièrement convectives ayant une masse  $M$  (et composition chimique) constantes**. Chacun de ces modèles peut être positionné dans le diagramme HR, le tout forme une courbe qui est appelée la séquence de Hayashi de masse  $M$ . Simplifions drastiquement le problème pour nous faire une idée mathématique simple de cette séquence de Hayashi. Nous supposons que la convection est si efficace que le gradient de température est proche du gradient adiabatique partout (en réalité, une telle approximation n'est valable que dans les régions suffisamment profondes). Les équations différentielles à résoudre pour obtenir ces modèles entièrement convectifs sont donc l'équation différentielle reliant masse et densité dans l'étoile : l'équation d'équilibre hydrostatique : et finalement l'équation caractérisant un gradient de température adiabatique. L'équation d'état nous permet d'exprimer  $\rho$  et  $\nabla_{ad}$  comme fonctions de la température et de la pression. Nous obtenons ainsi un simple système de 3 équations différentielles à 3 inconnues :  $r$ ,  $P$  et  $T$ . Reste à y adjoindre 3 conditions aux limites. Au centre, nous avons trivialement  $r(0) = 0$ . Définissant la photosphère comme la couche où température locale égale température effective et  $R$  son rayon, nous avons :

$$T(R) = (L/(4\pi R^2 \sigma))^{1/4} \quad (342)$$

La dernière condition s'obtient en imposant à la photosphère un raccord continu de la pression à celle issue d'un modèle d'atmosphère ayant les bonnes température effective et gravité. Notons que l'équation 342 a introduit une nouvelle grandeur dans le problème : la luminosité  $L$ . Pour chaque valeur de  $L$ , le problème mathématique a une solution distincte. À chacune de ces solutions correspond un point dans le diagramme HR. Si on laisse  $L$  varier continument, ces points constituent une courbe qui est, moyennant nos approximations, la séquence de Hayashi de masse  $M$ . Sous l'approximation d'un gaz parfait avec  $\nabla_{ad} = 2/5$ , la structure interne des étoiles entièrement convectives correspond à un polytrophe d'indice  $n = 3/2$  (Sect. 7.2). En raccordant ces polytropes à des modèles d'atmosphère fortement simplifiés modélisant l'opacité par une loi de puissance ( $\kappa \propto \rho T^a$ ), on montre que la séquence de Hayashi est alors une droite dans le diagramme HR.

Il est important de remarquer qu'à aucun moment dans notre raisonnement nous n'avons fait l'hypothèse d'équilibre thermique. Sauf exception, les étoiles entièrement convectives constituant les séquences de Hayashi de différentes masses **ne sont pas à l'équilibre thermique**. Ceci distingue fondamentalement la séquence de Hayashi de la séquence principale, cette dernière caractérisant des modèles de masses différentes à l'équilibre thermique.

Les séquences de Hayashi de différentes masses apparaissent du côté froid (à droite) du diagramme HR sous forme de courbes quasiment verticales proches entre elles. Celles-ci séparent le diagramme HR en 2 zones distinctes : une zone permise du côté chaud (gauche) et une zone interdite du côté froid (droit). On peut aisément s'en rendre compte en considérant le problème mathématique ci-dessus pour un gaz parfait avec une valeur fixée de  $\nabla = d \ln T / d \ln P$  différente de  $\nabla_{ad}$ . La solution est un polytrophe d'indice  $1/\nabla - 1$ . On montre que l'ensemble des solutions pour  $M$  et  $\nabla$  fixes constitue une droite parallèle à la séquence de Hayashi, du côté chaud (gauche) pour  $\nabla < \nabla_{ad}$  et du côté froid (droit) pour  $\nabla > \nabla_{ad}$ . Or, nous avons vu que la convection est très efficace au sein des étoiles. On voit alors qu'il est tout à fait irréaliste de rencontrer une étoile à droite de la séquence de Hayashi. Le gradient de température d'une telle étoile étant nettement supérieur au gradient adiabatique, en résulterait un gigantesque transport d'énergie par la convection du centre à la surface. Cette évacuation considérable d'énergie conduirait très rapidement à une chute du gradient de température et donc un retour de l'étoile vers la séquence de Hayashi. Par contre, nous savons que les zones radiatives sont caractérisées par  $\nabla < \nabla_{ad}$ . Il est donc tout à fait acceptable de rencontrer des étoiles à gauche de la séquence de Hayashi, il s'agit simplement d'étoiles partiellement radiatives.

### 11.1.2 Descente sur la séquence de Hayashi de l'étoile entièrement convective

A quelques exceptions près, il n'y a pas encore de réactions nucléaires durant cette phase de l'évolution des étoiles en raison des trop faibles températures. Et s'il y en a, leur contribution à la puissance rayonnée est très faible :  $\int_M \epsilon dm \ll L$ . L'étoile passe donc par une phase entièrement convective, à l'équilibre hydrostatique, mais dans une situation de déséquilibre thermique. C'est ce déséquilibre thermique qui dicte à ce stade l'évolution temporelle de sa structure. Le théorème du Viriel nous permet de quantifier rigoureusement ce lien. Nous avons démontré Sect. 9.1 que  $\Delta E_i = -(1/2)\Delta E_G$ , ce qui nous donne en passant à la limite :

$$dE_i/dt = -(1/2)dE_G/dt. \quad (343)$$

Faisons maintenant un bilan énergétique global du système., la loi de conservation de l'énergie totale s'écrit ici :

$$dE_{tot}/dt = \int_M \epsilon dm - L. \quad (344)$$

Avec  $E_{tot} = E_i + E_G$ , ces 2 équations nous donnent donc :

$$L - \int_M \epsilon dm = dE_i/dt = -(1/2)dE_G/dt. \quad (345)$$

Or, nous avons mentionné plus haut que  $L - \int_M \epsilon dm > 0$  durant cette phase. Nous avons donc  $dE_G/dt < 0$  : **l'étoile doit se contracter suite au déséquilibre**

**thermique** et  $dE_i/dt > 0$  : **son énergie interne totale doit augmenter**. En l'absence de toute réaction nucléaire ( $\epsilon = 0$ ), l'équation 345 nous précise les parts de gâteau : **durant la phase de contraction sans réactions nucléaires, la moitié de l'énergie potentielle libérée conduit à une augmentation de l'énergie interne et l'autre moitié est rayonnée par l'étoile**. Comme elle est entièrement convective, elle ne peut donc que descendre le long de la séquence d'Hayashi correspondant à sa masse.

L'échelle de temps de cette phase de déséquilibre thermique est facilement évaluée. L'énergie potentielle gravifique est de l'ordre de  $GM^2/R$ . La libération d'énergie potentielle et l'augmentation d'énergie interne par unité de temps sont de l'ordre de grandeur de la luminosité. Le temps nécessaire pour que le rayon diminue, l'énergie interne augmente et l'énergie potentielle de l'étoile diminue de façon significative sont donc de l'ordre de :

$$\tau_{HK} \equiv \frac{GM^2}{RL}, \quad (346)$$

on l'appelle le **temps de Helmholtz-Kelvin** ...

Au fur et à mesure de la descente de l'étoile sur la séquence de Hayashi, son énergie interne augmente. Tant que le gaz d'électrons reste non-dégénéré<sup>2</sup>, cette augmentation de l'énergie interne s'accompagne d'une augmentation de la température. Nous avons mentionné Sect. 5, éqs. 140 et 141, les lois de Kramers pour l'opacité. Leur dépendance en  $T^{-3.5}$  nous indique donc que l'opacité des régions centrales diminue avec le temps. Nous avons établi Sect. 3.7, éq. 59 le critère de Schwarzschild pour l'instabilité convective :  $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ . Suite à la diminution de l'opacité, le gradient radiatif finit par passer en-dessous du gradient adiabatique et le coeur de l'étoile devient radiatif. Ceci marque la fin de la descente sur la séquence de Hayashi.

### 11.1.3 Déplacement sur la séquence de Heney de l'étoile partiellement radiative

On a vu plus haut que les étoile dont le gradient de température moyen est inférieur au gradient adiabatique se situent du côté chaud de la séquence de Hayashi correspondant à leur masse. L'établissement d'un coeur radiatif conduit donc à un virage vers le côté chaud (gauche) du diagramme HR. On appelle parfois séquence de Heney la trajectoire suivie alors par l'étoile. Lors de ce virage, l'étoile passe par un minimum de luminosité d'autant plus élevé qu'elle est massive. Pour comprendre pourquoi il en est ainsi, simplifions le problème en supposant que les étoiles au minimum de luminosité sont homologues entre elles. La relation 332 nous dit comment se comparent leurs luminosités dans leur coeur radiatif. Supposant que l'homologie s'étend à l'enveloppe convective, le rapport de luminosité entre la surface et le coeur radiatif est constant. Sous cette hypothèse, la relation 332 s'applique donc aussi à

---

<sup>2</sup>Nous reviendrons plus loin sur cette question clé de la dégénérescence électronique

la luminosité de surface. Nous pouvons y éliminer le rayon en utilisant la définition de la température effective,  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ , ce qui donne :

$$L_{min} \propto M^{5.5} R^{-0.5} \propto M^{5.5} L^{-1/4} T_{eff}. \quad (347)$$

Les températures effectives d'étoiles sur la séquence de Hayashi diffèrent peu entre elles, ce qui nous donne finalement en regroupant la luminosité dans le membre de gauche :

$$L_{min} \propto M^{4.4}.$$

On y voit la très grande sensibilité de  $L_{min}$  vis-à-vis de la masse. Les étoiles massives de pré-séquence principale ne descendent donc quasiment pas sur la séquence de Hayashi et deviennent rapidement partiellement, voire totalement radiatives. Cette tendance sera encore amplifiée pour des modèles avec accréation de matière (Sect. 11.2).

Avec l'apparition du coeur radiatif, la contraction du coeur s'accélère tandis que celle de l'enveloppe diminue et finit même par s'arrêter. Pour le comprendre, examinons l'ampleur du déséquilibre thermique à l'origine de cette contraction. On note habituellement  $\epsilon_{grav} = -T ds/dt$  le terme traduisant ce déséquilibre dans l'équation de conservation de l'énergie. La clé y est la variation d'entropie, ce qui nous amène à examiner son profil dans l'étoile. On trouve aisément que la différentielle de l'équation d'état  $T = T(s, P)$  s'écrit, à composition chimique constante :

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds}{c_p} + \nabla_{ad} \frac{dP}{P}. \quad (348)$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{ds}{dr} = c_p \frac{d \ln P}{dr} (\nabla - \nabla_{ad}) = -c_p \frac{\rho g}{P} (\nabla - \nabla_{ad}). \quad (349)$$

Dans l'essentiel de l'enveloppe convective, la convection est très efficace avec  $\nabla \simeq \nabla_{ad}$ , le gradient d'entropie spécifique y est donc négligeable. Au contraire, dans le coeur radiatif,  $\nabla < \nabla_{ad}$  et donc  $ds/dr > 0$ . Nous pouvons maintenant suivre étape par étape l'évolution du profil d'entropie.

1) Tant que l'étoile est entièrement convective, profil quasi-constant de l'entropie du centre jusqu'aux régions superficielles, décroissant avec le temps (contraction globale).

2) Lorsque le coeur devient radiatif, un gradient d'entropie  $ds/dr > 0$  s'y établit. Le plateau dans l'enveloppe convective bouge peu. Par continuité, cela ne peut qu'impliquer une chute rapide de l'entropie au coeur et donc une contraction rapide de celui-ci. Dit autrement, la chute d'opacité au coeur consécutive à l'augmentation de température y augmente fortement l'évacuation d'énergie par radiation, ce qui accélère sa contraction. Pendant que le coeur se contracte rapidement, l'enveloppe ne bouge presque pas, le rayon de l'étoile cesse donc de diminuer. Quant à la luminosité, elle réaugmente légèrement consécutivement à la libération importante d'énergie potentielle au coeur.



## 11.2 Evolution avec accrétion de matière : la ligne de naissance

Dans notre examen de la phase de pré-séquence principale, nous avons jusque maintenant négligé l'accrétion de matière par l'étoile. Or celle-ci ne s'arrête en général pas brusquement lorsque le nuage se dissipe et nous fait apparaître l'étoile. En l'absence de contraintes observationnelles suffisamment précises, l'accrétion de matière est en général modélisée par un taux d'accrétion constant. Nous pouvons alors définir la **ligne de naissance** comme la trajectoire suivie dans le diagramme HR par une étoile à l'équilibre hydrostatique accrétant de la matière à un taux constant donné. A différents taux d'accrétions correspondent différentes lignes de naissances. Par contre, la ligne de naissance est quasi-insensible à la masse initiale. Cette phase d'accrétion est caractérisée par une augmentation de la température effective et de la luminosité. Nous reviendrons sur le rayon quand nous évoquerons la combustion du deuterium. La modélisation de l'évolution d'une étoile qui aura une masse donnée au début de la phase de séquence principale se fait alors en 2 étapes. Durant une première phase, on suppose en général un taux d'accrétion donné. Le modèle d'étoile se déplace dès lors sur la ligne de naissance correspondant à ce taux jusqu'à ce qu'il atteigne sa masse de séquence principale. Ensuite, on poursuit la modélisation de l'évolution en maintenant cette fois la masse constante. L'étoile suit alors la trajectoire que nous avons décrite dans les sections précédentes. Les masses critiques qui suivent tiennent pour des étoiles de population I avec un taux d'accrétion de  $10^{-5} M_{\odot}/\text{an}$ . Si la masse à la fin de l'accrétion est inférieure à  $\approx 2.5 M_{\odot}$ , l'étoile est à ce moment entièrement convective. Dans le diagramme HR, elle se trouve à l'intersection entre la ligne de naissance et la séquence de Hayashi correspondant à sa masse et entreprend sa descente sur cette dernière. Par contre, pour  $2.5 M_{\odot} < M < 6 M_{\odot}$ , l'étoile a déjà un coeur radiatif quand l'accrétion cesse. Après la ligne de naissance, l'étoile poursuit son chemin sur la séquence de Henyey correspondant à sa masse. Enfin, pour des étoiles encore plus massives, le démarrage à proprement parler des réactions nucléaires et l'apparition correspondante d'un coeur convectif peuvent avoir lieu alors que l'étoile est toujours en phase d'accrétion.

## 11.3 Premières réactions nucléaires

### 11.3.1 Réactions nucléaires ou pas ?

Le principal défi pour que les réactions de fusion nucléaire puissent démarrer au coeur de l'étoile est le franchissement de la barrière de répulsion coulombienne entre noyaux entrant en collision. Ce franchissement par effet tunnel n'est possible que si l'énergie cinétique des noyaux et donc la température est très élevée. Il faudra ainsi attendre des températures centrales de l'ordre de  $10 - 15 \cdot 10^6$  K pour que la réaction

de base de la chaîne p-p :  $p+p \rightarrow D+e^++\nu_e$  devienne possible. Ceci nous conduit naturellement à nous intéresser à l'évolution de la température centrale lors de la phase de pré-séquence principale. Le théorème du Viriel nous a montré qu'en l'absence de réactions nucléaires l'étoile doit se contracter globalement. Et cette contraction doit nécessairement conduire à une augmentation de l'énergie interne totale (la moitié de l'énergie potentielle libérée pour un gaz parfait monoatomique non-relativiste). Nous arrivons maintenant à la question critique : cette augmentation d'énergie interne implique-t-elle automatiquement une augmentation de la température ? Pour un gaz parfait non-dégénéré, c'est évident car nous avons  $u = c_v T$ , mais est-ce toujours le cas en dehors de ce cas limite ? Pour répondre à cette question, considérons une contraction homologe infinitésimale d'une sphère de gaz quelconque. Les différentielles des éqs. 326 et 327 nous donnent à masse constante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{dR}{R}, \quad (350)$$

$$\frac{dP}{P} = -4\frac{dR}{R} = \frac{4}{3}\frac{d\rho}{\rho}. \quad (351)$$

Les grandeurs thermodynamiques de tout fluide vérifient une équation d'état. Pour une composition chimique fixée, celle-ci nous permet par exemple d'exprimer  $\rho$  comme fonction de  $P$  et  $T$ . Prenant la différentielle de cette expression, nous trouvons :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T} \quad (352)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\alpha}{\delta}\frac{dP}{P} - \frac{1}{\delta}\frac{d\rho}{\rho}, \quad (353)$$

où nous avons introduit les notations  $\alpha \equiv \partial \ln \rho / \partial \ln P$  et  $\delta \equiv -\partial \ln \rho / \partial \ln T$  pour simplifier les écritures. Éliminant  $dP/P$  via l'éq.351, nous trouvons finalement :

$$\frac{dT}{T} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta}\frac{d\rho}{\rho}. \quad (354)$$

Ce résultat répond à la question posée. 2 cas limites méritent notre attention.

L'équation d'état d'un gaz parfait non-dégénéré donne  $\alpha = \delta = 1$  et donc  $dT/T = (1/3)d\rho/\rho$ . La contraction s'accompagne donc bel et bien d'une augmentation de la température dans ce cas.

Par contre, pour un gaz complètement dégénéré non-relativiste, la différentielle de la relation polytropique  $P = K\rho^{5/3}$  nous donne  $\alpha = 3/5$ ,  $\delta = 0$  et donc  $dT/T \rightarrow -\infty d\rho/\rho$ . La contraction d'une sphère dégénérée conduit donc à une chute considérable de sa température, et ce malgré l'augmentation de son énergie interne ! Ce résultat surprenant et important mérite qu'on s'y arrête. Dans un gaz d'électrons dégénéré, toutes les "cases" de faible énergie sont occupées par des électrons. Or la

contraction diminue le nombre de cases dans l'espace de phase. Les électrons privés de leur place initiale doivent donc être amenés aux hautes énergies où de la place subsiste. Ce prix énergétique est très élevé, supérieur à l'augmentation d'énergie interne totale résultant de cette contraction. Où trouver l'énergie manquante ? Le réservoir d'énergie interne du gaz peut être séparé en 2 contributions principales : l'énergie des électrons et celle des ions. Et il n'y a aucun obstacle à une diminution de l'énergie cinétique des ions car ils sont, eux, non-dégénérés. Nous voyons donc la solution : l'énergie manquante pour les électrons est puisée là où elle reste disponible, à savoir dans le réservoir thermique des ions. La contraction d'une sphère de gaz dont les électrons sont dégénérés conduit donc à une diminution de l'énergie cinétique des ions au profit de celle des électrons libres. Comme les ions sont non-dégénérés, leur énergie cinétique moyenne est  $E_i = 3/2kT$ . On comprend donc que la température doit diminuer et ce qui se cache derrière ce fait au niveau microscopique. Avec l'augmentation de l'énergie des électrons et la chute de celle des ions, on s'éloigne donc de plus en plus de l'équipartition d'énergie caractérisant les mélanges de gaz usuels.

Suivons maintenant l'évolution des conditions centrales dans un diagramme  $\log \rho - \log T$  pour des étoiles de différentes masses (voir diapositive). Sur base du critère de dégénérescence 120, nous pouvons séparer ce diagramme en 2 régions : l'une à haute température et relativement faible densité où le gaz est non-dégénéré et l'autre à basse température et haute densité où le gaz d'électrons est dégénéré. Au début de la phase de pré-séquence principale, le gaz d'électrons est toujours non-dégénéré en raison des faibles densités. A densité centrale fixée, au plus l'étoile est massive au plus la température centrale est élevée. On s'en rend compte immédiatement en combinant les relations d'homologie 326 et 328 :

$$T_c = TT(0) \frac{M}{R} = TT(0) \frac{M^{1/3}}{R} M^{2/3} \quad (355)$$

$$= TT(0) \left( \frac{\rho_c}{\rho \rho(0)} \right)^{1/3} M^{2/3}. \quad (356)$$

Plus intuitivement, à densité fixée, au plus la masse est élevée, au plus le poids de la colonne de gaz est élevé et donc aussi la température centrale.

Suivons le parcours d'une étoile massive dans ce diagramme. Nous partons donc à gauche avec une température centrale élevée, bien au-dessus de la limite de dégénérescence. La température ne cesse d'augmenter au cours de la contraction ( $dT/T = (1/3)d\rho/\rho$ ) et peut atteindre les valeurs requises pour les réactions de fusion nucléaire. A l'opposé, pour une étoile de faible masse, la limite de dégénérescence est rapidement franchie. En conséquence, la température centrale passe par un maximum puis chute, comme nous l'avons expliqué plus haut. Les réactions nucléaires nécessitant une température supérieure à ce maximum ne pourront donc jamais avoir lieu. La réaction critique au stade d'évolution auquel nous sommes arrivés est la fusion de 2 protons pour former un noyau de deutérium. Elle requiert des températures de l'ordre de  $10 - 15 \cdot 10^6$  K.

Les calculs rigoureux modélisant la phase de pré-séquence principale montrent que *si la masse de la proto-étoile est inférieure à  $0.08 M_{\odot}$ , la dégénérescence électronique empêche l'atteinte des températures requises pour la réaction p-p. De telles étoiles sont appelées **naines brunes**.*

Qu'advient-il de ces "étoiles ratées" ? Après combustion éventuelle d'éléments mineurs tels que le deutérium et le lithium si elles ont pu atteindre les températures requises ( $T \approx 1-2 \times 10^6$  K pour le deutérium,  $T \approx 2.5 \times 10^6$  K pour le lithium), la dégénérescence électronique apparaît et fait chuter leur température centrale, rendant toute réaction nucléaire impossible. L'utilisation des relations d'homologie permet de se faire une idée plus précise sur ce refroidissement. Nous assimilons dans ce qui suit le gaz d'ions à un gaz parfait usuel et supposons le gaz d'électrons complètement dégénéré non-relativiste. Commençons par estimer l'augmentation d'énergie des électrons dégénérés résultant d'une contraction infinitésimale. Notant  $E_e$  cette énergie, nous déduisons immédiatement des eqs. 322 et 125 :

$$E_e = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{P_e}{\rho} dm = \frac{3}{2} K_1 \int_0^M \rho^{2/3} dm$$

Pour une contraction homologue, nous en déduisons :

$$\frac{dE_e}{E_e} = \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Sous la même hypothèse, nous avons pour l'énergie potentielle gravifique  $E_g = - \int_0^M Gm dm/r$  :

$$\frac{dE_g}{E_g} = -\frac{dr}{r} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{\rho},$$

et donc en combinant ces 2 équations :

$$\frac{dE_e}{E_e} = 2 \frac{dE_g}{E_g}.$$

Supposant en outre que l'énergie cinétique des électrons domine largement celle des ions ( $E_e \gg E_i$ ) et utilisant le théorème du Viriel,  $E_g = -2(E_i + E_e)$ , nous trouvons :

$$dE_e = -\frac{E_e}{E_i + E_e} dE_g \simeq -dE_g.$$

Ce dernier résultat nous dit que **toute l'énergie potentielle libérée est convertie en augmentation de l'énergie des électrons**. Et donc par conservation de l'énergie, **toute l'énergie rayonnée est puisée dans le réservoir thermique des ions**. Cette séparation nette entre ce qui est pris en charge par le gaz d'électrons et ce qui l'est par les ions illustre bien le découplage résultant de cette dégénérescence.

### 11.3.2 Effets structurels du démarrage des réactions nucléaires

L'apparition des réactions nucléaires modifie la balance énergétique par un apport net de chaleur au coeur de l'étoile. Comment la structure de l'étoile va-t-elle réagir à ce changement ?

#### Chaleur spécifique gravito-thermique

Tout d'abord, examinons comment la température va varier suite à cet apport de chaleur. Pour une portion de masse unitaire, le 1er principe s'écrit :

$$dq = Tds = du + Pdv = c_v dT + (\partial u / \partial \rho|_T - P/\rho^2) d\rho. \quad (357)$$

Introduisant la notation  $\Gamma_3 - 1 = \partial \ln T / \partial \ln \rho|_s$ , nous trouvons donc pour la différentielle de l'équation d'état  $T = T(\rho, s)$  :

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds}{c_v} + (\Gamma_3 - 1) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (358)$$

Nous pouvons donc aussi écrire :

$$dq = c_v dT - c_v T (\Gamma_3 - 1) d\rho / \rho. \quad (359)$$

Comme nous l'avons déjà fait à maintes reprises, supposons maintenant pour simplifier que l'étoile réagisse à l'apport de chaleur par une contraction ou dilatation homologue. Comme le temps de Helmholtz-Kelvin reste nettement supérieur au temps dynamique, nous supposons en outre que l'équilibre hydrostatique est maintenu lors de cette modification structurelle. Avec ces 2 hypothèses, nous pouvons utiliser l'équation 354, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} dq &= c_v dT - c_v T (\Gamma_3 - 1) d\rho / \rho \\ &= c_v T \left( \frac{4\alpha - 3}{3\delta} - (\Gamma_3 - 1) \right) \frac{d\rho}{\rho} \\ &= c_v \left( 1 - \frac{3\delta(\Gamma_3 - 1)}{4\alpha - 3} \right) dT = c^* dT, \end{aligned} \quad (360)$$

où  $c^*$  est appelée "chaleur spécifique gravito-thermique". Examinons maintenant les 2 cas limites déjà rencontrés : celui d'un gaz parfait usuel et celui d'un gaz complètement dégénéré.

Pour un gaz parfait usuel,  $\alpha = \delta = 1$  et  $\Gamma_3 - 1 = 2/3$ . L'éq. 360 nous donne donc

$$dq = -c_v dT, \quad (361)$$

résultat pour le moins inattendu, **fournir de la chaleur à l'étoile conduit à une baisse de sa température!** Que s'est-il passé ? Un gaz au repos réagit toujours à un apport de chaleur net par une dilatation (si on lui en laisse la possibilité). Il en

sera toujours ainsi dans les étoiles. Le poids de la colonne de gaz étant considérable au sein de l'étoile, le travail de dilatation qui en résulte l'est tout autant, tellement qu'il surpasse l'apport de chaleur net. La chaleur fournie ne suffisant pas au travail, l'énergie manquante est puisée dans le réservoir d'énergie interne de l'étoile, ce qui produit une baisse de température. Plus quantitativement, pour un gaz parfait et une dilatation homologue maintenant l'équilibre hydrostatique, le travail de dilatation est égal au double de l'apport de chaleur :  $Pdv = 2dq = -2du$ . Ce résultat est le pendant local du théorème du Viriel. Notant dans l'équation 345 que  $\int_M \epsilon dm - L$  est l'apport global de chaleur à l'étoile par unité de temps, nous y voyons en effet que l'augmentation de l'énergie potentielle totale de l'étoile, c'est à dire le travail global effectué est égal au double de la chaleur fournie.

Considérons maintenant l'autre cas extrême d'un gaz complètement dégénéré. Nous avons cette fois  $\delta = 0$  et donc

$$dq = c_v dT, \quad (362)$$

relation correspondant à un apport de chaleur à volume constant, pourquoi ? Supposons qu'on tente de comprimer une sphère où la pression de dégénérescence des électrons domine. Le nombre de "cases" disponibles dans l'espace de phase diminue donc. Il faut donc amener les électrons ayant perdu leur place aux bien plus hauts niveaux d'énergie et d'impulsion encore disponibles. En résulte une augmentation importante de la pression, plus grande que l'augmentation du poids de la colonne de gaz. La résultante des forces est donc dirigée vers l'extérieur et l'étoile revient à sa configuration de départ. Inversement, si on tente de la dilater, le nombre de "cases" disponibles dans l'espace de phase augmente. De nombreux électrons des hauts niveaux d'énergie et d'impulsion s'empressent de remplir les bas niveaux ainsi libérés. En résulte une diminution importante de la pression, plus grande que la diminution du poids de la colonne de gaz. La résultante des forces est donc dirigée vers le centre et l'étoile revient à sa configuration de départ. Un raisonnement plus quantitatif éteillant ce qui vient d'être dit sera donné Sect. 12.1 (il suffit d'y remplacer  $\Gamma_1$  par  $5/3$ ). On comprend par celui-ci que **le volume d'une sphère où la pression de dégénérescence domine est figé**. Tout apport de chaleur, se fera donc à volume constant avec augmentation de température. Cette réaction très différente à un apport de chaleur, selon que le gaz soit ou non dégénéré rend l'étoile thermiquement stable dans le 1er cas et instable dans l'autre, comme nous le verrons Sect. 12.2.

### Réajustement structurel

Considérons maintenant la situation réelle où des réactions nucléaires démarrent au coeur non-dégénéré de l'étoile. Commençons par l'évolution des conditions centrales. Avant l'apparition des réactions nucléaires, l'étoile se contracte globalement et perd de la chaleur par son rayonnement. Le théorème du Viriel nous dit que son énergie interne et sa température augmente. Lorsque la température atteint la valeur requise, certaines réactions nucléaires démarrent. La chaleur fournie par ces réactions finit par dépasser la chaleur rayonnée par l'étoile ( $\int_M \epsilon dm > L$ ). Suite à cet apport de

chaleur net, la contraction du coeur est stoppée et il commence à se dilater. A ce stade, la température centrale continue temporairement à augmenter. Une partie de plus en plus importante du coeur se dilate, avec un travail correspondant finissant par dépasser l'apport de chaleur. L'énergie manquante pour produire ce travail est alors puisée dans le réservoir d'énergie interne. Celle-ci diminue donc ainsi que la température, comme nous l'avons vu plus haut pour une dilatation homologue. Les taux de réaction nucléaires très sensibles à la température chutent donc. La chaleur fournie par les réactions nucléaires passe en-dessous de l'énergie rayonnée ( $\int_M \epsilon dm < L$ ). Cette perte de chaleur stoppe la dilatation et le coeur recommence à se contracter. La température remonte dès lors légèrement et l'équilibre thermique finit par s'établir :  $\int_M \epsilon dm = L$ . Comme illustré dans les diapositives, ce réajustement structurel prend la forme d'une boucle parcourue par l'étoile dans un diagramme densité-température.

L'évolution de l'enveloppe de l'étoile et la trajectoire qu'elle suit dans le diagramme HR lors de cette phase sont moins aisés à expliquer.

Le réajustement de structure des régions centrales lors du démarrage des réactions nucléaires mobilise énormément d'énergie sous forme de travail de dilatation du coeur et modifie globalement le gradient de température dans le sens d'une diminution. En conséquence, **la luminosité de l'étoile chute lors du démarrage des réactions nucléaires**, résultat contre-intuitif appuyé par tous les codes numériques modélisant cette phase de l'évolution des étoiles. La température effective cesse d'augmenter, l'enveloppe de l'étoile se contracte et son rayon diminue suite à la diminution de  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ .

### Mise à l'équilibre du cycle CNO

Pour les étoiles de masses plus grandes que 1.5 masses solaires (pour une composition chimique solaire), le cycle CNO domine comme moyen de transformation d'hydrogène en hélium. Nous avons vu Sect. 6.6.2 qu'il y a 2 régimes pour ce cycle : la mise à l'équilibre puis l'équilibre proprement dit où les éléments tels que le carbone, l'azote, ... agissent comme des catalyseurs. Les deux réactions de fusion partant du carbone (202 et 204) et dans une moindre mesure celles partant de l'oxygène (209 et 211) ont une relativement grande section efficace. Par contre la réaction de fusion de l'azote avec un proton (205) a une beaucoup plus petite section efficace. Notons aussi qu'après l'hydrogène et l'hélium, l'oxygène ( $\approx 0.8\%$  en masse) puis le carbone ( $\approx 0.3\%$ ) sont les éléments les plus abondants de l'univers. Les premières réactions ayant un impact énergétique important dans l'étoile sont donc celles transformant le carbone puis l'oxygène en azote. L'apport de chaleur net qui en résulte conduit par les processus que nous venons de décrire à une dilatation du coeur, une contraction de l'enveloppe et une chute de la luminosité. En outre, les sections efficaces de ces réactions sont extrêmement sensibles à la température ( $\epsilon \propto \langle \sigma v \rangle \propto T^{15}$ ). Ces réactions ont donc uniquement lieu dans une petite sphère au coeur de l'étoile caractérisée par des températures proches de la température centrale. En conséquence,

$\nabla_{rad} \propto L/m$  y est élevé et passe au-dessus du gradient adiabatique. Le critère de Schwarzschild (59) nous dit donc que **le coeur de l'étoile devient convectif**. Cependant, le carbone et l'oxygène étant minoritaires par rapport à l'hydrogène et l'hélium, ils sont vite épuisés au profit de l'azote. L'apport de chaleur par ces réactions chute donc, le coeur redevient radiatif, se contracte, la température centrale y augmente et la luminosité recommence à croître en lien avec la libération importante d'énergie potentielle (théorème du Viriel). Lorsque la température centrale atteint des valeurs de l'ordre de  $20 \times 10^6$  K, la réaction de fusion de  ${}^7_7\text{N}$  (205) devient possible et le cycle CNO peut entrer dans son régime d'équilibre. L'apport de chaleur au centre redevient important, l'étoile réajuste en conséquence sa structure, ce qui se traduit observationnellement par une **2ème chute de sa luminosité**. Finalement, l'équilibre thermique s'établit ( $\int_M \epsilon dm = L$ ), marquant le début de la phase de séquence principale.

### Combustion du deutérium

Bien avant l'établissement de l'équilibre thermique pour les réactions de la chaîne p-p ou CNO, l'étoile est passée par une phase de combustion du deutérium quand  $T_c \approx 1 - 2 \times 10^6$  K (Sect. 6.6.1). Avec une abondance initiale  $(D/H) \approx 10^{-4}$ , on pourrait penser que le deutérium est rapidement consommé, que l'apport énergétique pèse peu dans la balance globale et qu'il n'en résulte pas de modification structurelle significative de l'étoile. C'est effectivement ce que prédisent des modèles à masse constante.

Cependant, l'accrétion de matière est significative durant cette phase, ce qui change complètement la donne. Les réactions nucléaires jouent toujours un rôle de thermostat contrôlant la température au sein des étoiles. Supposons une modification homologue de la structure de l'étoile, nous avons donc par 328  $T_c \propto M/R \approx cst$ , c'est-à-dire une augmentation linéaire du rayon avec la masse. Pour un taux d'accrétion constant de  $10^{-5} M_\odot/\text{an}$ , la combustion centrale du deutérium se termine quand l'étoile atteint une masse de l'ordre d'une masse solaire, son rayon a plus que doublé durant cette phase, atteignant des valeurs de l'ordre de 5 rayons solaires. Lorsque le coeur devient radiatif et que l'étoile atteint une masse de l'ordre de  $2.5 M_\odot$ , elle passe ensuite par une phase de combustion en couche du deutérium accrété et son rayon grimpe jusqu'à  $10 R_\odot$ . La zone convective superficielle finit ensuite par ne plus descendre suffisamment profond dans l'étoile pour y amener du deutérium fraîchement accrété et l'étoile repasse par une phase de contraction gravifique jusqu'au démarrage du cycle CNO.

## 12 Stabilité stellaire

La stabilité stellaire fait l'objet d'un autre cours dans le cadre de ce master. Il est cependant utile d'en évoquer quelques aspects basiques car l'impact de cette



problématique sur l'évolution des étoiles est très important. Deux types d'équilibre ont été considérés jusque maintenant : l'équilibre hydrostatique (résultante des forces nulle) et l'équilibre thermique (énergie produite par les réactions nucléaires égale énergie rayonnée). Nous nous demandons ici si ces équilibres sont stables. Je rappelle qu'un équilibre est dit linéairement stable si le système réagira à une perturbation infinitésimale en revenant vers cet équilibre.

## 12.1 Stabilité dynamique

Le premier cas qui nous intéresse est la stabilité dynamique. On considère ici une perturbation par rapport à l'équilibre hydrostatique. L'équilibre des forces est donc brisé et le système réagit à cette perturbation sur l'échelle de temps dynamique ( $\tau_{dyn} = \sqrt{R^3/GM}$ , éq. 27). Comme le temps dynamique dans les étoiles est toujours négligeable par rapport au temps de Helmholtz-Kelvin ( $\tau_{HK} = GM^2/RL$ , éq. 346), le gaz n'a pas le temps d'échanger une quantité significative de chaleur comparativement à son énergie interne et on peut supposer qu'il subit une transformation adiabatique. Nous établirons ici le critère de stabilité dynamique par une approche simple et approximative en supposant que la perturbation du système consiste en une contraction ou dilatation homologue de l'étoile. Comme nous l'avions déjà fait plus haut (éqs. 295, ...), nous pouvons donc écrire :

$$r(m) \rightarrow r'(m) = x r(m), \quad (363)$$

$$\rho(m) \rightarrow \rho'(m) = \rho(m)/x^3. \quad (364)$$

$$Poids(m) \rightarrow Poids'(m) = Poids(m)/x^4. \quad (365)$$

En lien avec la compression adiabatique, nous définissons  $\Gamma_1 \equiv \partial \ln P / \partial \ln \rho|_s$  que nous supposons ici constant. La pression se transforme donc comme suit :

$$P(m) \rightarrow P'(m) = P(m)(\rho'/\rho)^{\Gamma_1} = P(m)/x^{3\Gamma_1}. \quad (366)$$

En comparant les transformations suivies par la pression et le poids de la colonne de gaz, nous voyons que 2 cas de figure peuvent se présenter selon que  $\Gamma_1 < 4/3$  ou  $\Gamma_1 > 4/3$ .

Si  $\Gamma_1 > 4/3$ , lors d'une contraction ( $x < 1$ ), la pression augmente plus que le poids, la résultante des forces est donc dirigée vers l'extérieur et l'étoile se dilate pour revenir vers l'équilibre de départ. De même, suite à une dilatation initiale, la résultante des forces est dirigée vers le centre et l'étoile se contracte. On a clairement affaire à **un équilibre dynamiquement stable**.

Si par contre  $\Gamma_1 < 4/3$ , lors d'une contraction ( $x < 1$ ), la pression augmente moins que le poids, la résultante des forces est donc dirigée vers l'intérieur et l'étoile réagit en se contractant encore plus. De même, suite à une dilatation initiale, la résultante des forces est dirigée vers l'extérieur et l'étoile réagit en se dilatant encore plus. On a clairement affaire à **un équilibre dynamiquement instable**.

## 12.2 Stabilité thermique/séculaire

Un autre type de stabilité est la stabilité thermique, aussi appelée stabilité séculaire. On suppose ici une perturbation brisant l'équilibre thermique dans l'étoile. Celle-ci réagit donc à ce déséquilibre sur une échelle de temps donnée par le temps de Helmholtz-Kelvin. Comme il est bien plus élevé que le temps dynamique, l'étoile supposée dynamiquement stable a pleinement le temps de se maintenir à l'équilibre hydrostatique lors de sa modification structurelle. C'est le déséquilibre thermique et non pas un déséquilibre des forces qui est le moteur des transformations qu'elle va subir.

A nouveau, nous supposons pour simplifier une perturbation homologue de la structure de l'étoile. Nous adoptons la notation suivante pour cette transformation :

$$X(m) \rightarrow X'(m) = X(m)(1 + \delta X/X), \quad (367)$$

où  $X$  est n'importe quelle grandeur physique ( $T, P, \dots$ ) et  $\delta X/X$  ne dépend pas de la profondeur dans l'étoile. Développons l'équation de conservation de l'énergie intégrée sur toute l'étoile. Nous avons d'une part :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_0^M \epsilon' dm - L' = \int_0^M \delta\epsilon dm - \delta L = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \int_0^M \epsilon dm - \delta L = L \left( \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} - \frac{\delta L}{L} \right),$$

où nous avons utilisé le fait que la configuration de départ est à l'équilibre thermique ( $L = \int_0^M \epsilon dm$ ). D'autre part, nous avons par 360,

$$\frac{dQ}{dt} = \int_0^M c^* \frac{dT'}{dt} dm = \int_0^M c^* \frac{d\delta T}{dt} dm = \frac{d(\delta T/T)}{dt} \int_0^M c^* T. \quad (368)$$

Nous considérons pour simplifier une étoile radiative. Pour obtenir  $\delta L/L$ , nous perturbons donc

$$L = -\frac{64\pi^2 r^4 a c T^3}{3\kappa} \frac{dT}{dm}, \quad (369)$$

ce qui donne :

$$\frac{\delta L}{L} = 4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa}, \quad (370)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\delta T/T$  ne dépend pas de la profondeur :

$$\frac{\delta(dT/dm)}{dT/dm} = \frac{d(T(\delta T/T))/dm}{dT/dm} = \frac{\delta T}{T}. \quad (371)$$

L'opacité et les réactions nucléaires sont des variables d'état ne dépendant donc que de la température et la densité (à composition chimique fixée). Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\delta \kappa}{\kappa} = \kappa_T \frac{\delta T}{T} + \kappa_\rho \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \epsilon_T \frac{\delta T}{T} + \epsilon_\rho \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (372)$$

où  $\kappa_T = \partial \ln \kappa / \partial \ln T|_\rho$ ,  $\kappa_\rho = \partial \ln \kappa / \partial \ln \rho|_T$ ,  $\epsilon_T = \partial \ln \epsilon / \partial \ln T|_\rho$ ,  $\epsilon_\rho = \partial \ln \epsilon / \partial \ln \rho|_T$ .

En utilisant en outre les équations 350 et 354 (rappelons que l'hypothèse d'équilibre hydrostatique a été faite pour l'obtention de cette dernière), nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned} L \left( \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} - \frac{\delta L}{L} \right) &= L \left( \epsilon_T \frac{\delta T}{T} + \epsilon_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} - 4 \frac{\delta r}{r} - 4 \frac{\delta T}{T} + \kappa_T \frac{\delta T}{T} + \kappa_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \\ &= L \left( \epsilon_T + \frac{3\delta}{4\alpha - 3} \epsilon_\rho - 4 + \kappa_T + \frac{\delta}{4\alpha - 3} (4 + 3\kappa_\rho) \right) \frac{\delta T}{T} \end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{d(\delta T/T)}{dt} = \frac{L}{\int_0^M c^* T dm} \left( \epsilon_T + \frac{3\delta}{4\alpha - 3} \epsilon_\rho - 4 + \kappa_T + \frac{\delta}{4\alpha - 3} (4 + 3\kappa_\rho) \right) \frac{\delta T}{T}.$$

Considérons maintenant comme d'habitude les 2 cas limites d'un gaz parfait usuel et d'un gaz complètement dégénéré non-relativiste. Dans le premier cas, nous avons  $\alpha = \delta = 1$ ,  $c^* = -c_v$  et donc :

$$\frac{d(\delta T/T)}{dt} = - \frac{L (\kappa_T + 3\kappa_\rho + \epsilon_T + 3\epsilon_\rho)}{\int_0^M c_v T dm} \frac{\delta T}{T}. \quad (373)$$

Prenant une loi d'opacité de Kramers, acceptables si les transitions lié-libre dominant, on a  $\kappa_\rho \simeq 1$  et  $\kappa_T \simeq -3.5$ . Pour la fusion de l'hydrogène,  $\epsilon_\rho \simeq 1$ ,  $\epsilon_T \approx 5$  pour la chaîne p-p et  $\epsilon_T \approx 15$  pour le cycle CNO. L'éq. 373 nous dit donc que le système réagit à une augmentation initiale de température par une diminution de la température. **L'équilibre est donc thermiquement stable pour un gaz parfait.** Ce résultat s'interprète aisément : partant d'une augmentation de température et une contraction initiale, le taux de production d'énergie par les réactions nucléaires augmente fortement. L'opacité diminue et donc la luminosité augmente, mais l'évacuation de chaleur correspondante est nettement inférieure à l'apport par les réactions nucléaires. Ayant un apport de chaleur net à l'étoile, nous avons vu

Sect. 11.3.2 qu'elle y réagit en se dilatant avec en conséquence une diminution de la température. La stabilité thermique est donc assurée par la grande réactivité des réactions nucléaires. Les développements que nous venons de faire ici donnent une nouvelle lumière sur le réajustement structurel consécutif à l'apparition des réactions nucléaires.

Considérons maintenant le cas d'un gaz complètement dégénéré non-relativiste. Nous avons cette fois  $\alpha = 3/5$ ,  $\delta = 0$ ,  $c^* = c_v$  et donc :

$$\frac{d(\delta T/T)}{dt} = \frac{L(\kappa_T + \epsilon_T - 4)}{\int_0^M c_v T dm} \frac{\delta T}{T}. \quad (374)$$

Dans un gaz fortement dégénéré, le transport de chaleur par les électrons dégénérés est très efficace (voir Sect. 5.5). L'habitude est de mimer ce transport par une diminution correspondante de l'opacité et on trouve alors  $\kappa_T \simeq 2$ , ce qui traduit le fait que, quand la température augmente, la dégénérescence diminue légèrement et il en va donc de même pour le transport d'énergie par les électrons dégénérés.  $\epsilon_T$  est toujours très élevé, de l'ordre de 40 dans le cas typique de la fusion de l'hélium. L'éq. 374 nous dit donc que le système réagit à une augmentation initiale de température par une augmentation de température encore plus marquée. **L'équilibre est donc thermiquement instable pour un gaz dégénéré.** L'interprétation est très simple. Supposons une augmentation initiale de température. En conséquence, le taux de production d'énergie par les réactions nucléaires augmente très fortement. Mais le volume est figé par les électrons dégénérés (voir la discussion Sect. 11.3.2). On a donc un apport de chaleur à volume constant, ce qui conduit à une augmentation encore plus marquée de la température. Dans un milieu où la pression est assurée par les électrons dégénérés, le démarrage de réactions nucléaires conduit à un emballement thermique, avec une augmentation très marquée de la température jusqu'à ce que la dégénérescence soit levée. Ce sera par exemple le cas du **flash de l'hélium** discuté plus loin.

## 13 La phase de séquence principale

Après le réajustement structurel consécutif au démarrage des réactions nucléaires, un équilibre thermique stable s'établit où la puissance produite par les réactions nucléaires de fusion d'hydrogène en hélium est égale à la puissance rayonnée par l'étoile, c'est la phase de séquence principale. L'étoile étant à la fois à l'équilibre hydrostatique et à l'équilibre thermique, il n'y a plus de dérivée temporelle dans les équations de structure à résoudre. L'évolution temporelle de l'étoile a une autre origine : la modification de sa composition chimique interne résultant des réactions de fusion nucléaire. Commençons par introduire une nouvelle échelle de temps caractéristique de cette phase d'évolution : **le temps nucléaire**. Nous l'obtenons en divisant la

chaleur totale fournie par les réactions nucléaires durant cette phase par la luminosité. Supposant qu'un dixième de la masse de l'étoile est transformé d'hydrogène en hélium, nous trouvons :

$$\tau_{nuc} = (Q_{pp}/4)N_{av}(M/10)/L, \quad (375)$$

où  $Q_{pp} \simeq 25\text{MeV}$  est l'énergie produite par noyau d'hélium formé et  $N_{av}$  est le nombre d'Avogadro. Si on insère dans cette formule la masse et la luminosité du Soleil, on trouve un temps nucléaire de l'ordre de 10 milliards d'années, ce qui colle bien avec la durée de phase de séquence principale pour une masse solaire prédite par des modèles d'évolution stellaire rigoureux. Ce temps étant bien plus élevé que le temps de Helmholtz-Kelvin, l'étoile a pleinement le temps de se maintenir dans un équilibre thermique stable tout au long de cette phase.

Lorsqu'une étoile débute cette phase de séquence principale, elle se trouve en un point spécifique du diagramme HR. Reliant tous ces points pour des modèles de différentes masses définit une courbe dans le diagramme HR appelée **Séquence Principale d'Age Zéro et notée ZAMS** (Zero Age Main Sequence). La trajectoire évolutive de l'étoile présente un point anguleux avec un minimum local de luminosité quand elle arrive sur la ZAMS.

### 13.1 Relation Masse-Luminosité, âges et populations stellaires

Par un raisonnement basé sur des transformations homologues et supposant un transport d'énergie par la radiation, nous avons établi Sect. 9.2 la relation masse-luminosité 331 qui nous dit que la luminosité des étoiles croît rapidement avec leur masse. Une telle relation masse-luminosité ressort effectivement de modèles de structure interne principalement radiatifs calculés rigoureusement. Elle ne suit cependant pas une loi de puissance  $L \propto M^\alpha$  avec  $\alpha$  constant car les étoiles ne sont pas homologues entre elles, mais on peut toujours définir un  $\alpha$  local par la définition  $\alpha \equiv d \ln L / d \ln M$ .  $\alpha$  vaut en moyenne 3 le long de la ZAMS. L croissant bien plus vite que M lorsqu'on monte sur la séquence principale, la relation 375 pour le temps nucléaire nous dit donc que la durée de vie sur la séquence principale décroît rapidement avec la masse. Ces tendances sont quantifiées (en ordres de grandeurs) dans le tableau 13.1.

La décroissance rapide de la durée de vie des étoiles avec leur masse a de nombreuses conséquences en astrophysique. Dans notre Galaxie, les étoiles les moins massives ont une durée de vie bien plus grande que l'âge de l'univers. Ainsi, on y rencontre encore parmi les premières générations d'étoiles qui se sont formées très tôt dans son histoire. La toute première génération d'étoiles constituées uniquement de l'hydrogène et hélium formés juste après le Big bang ( $\approx 10^{-4}$  s pour H,  $\approx 100$  s pour He) constitue la **population III**. On n'en a pas encore trouvé de représentant. On

$M/M_{\odot}$	0.5	1	2	10	80
$L/L_{\odot}$	0.04	1	15	$10^4$	$10^6$
$\alpha$	3	4.3	4	3	2
Durée MS (ans)	$50 \times 10^9$	$10 \times 10^9$	$10^9$	$20 \times 10^6$	$3 \times 10^6$
$R/R_{\odot}$	0.45	0.9	1.6	4	12
$M_{cc}/M$	0	0	0.2	0.4	0.8
$\bar{\rho}$ ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	8	2.1	0.65	0.25	0.055
$\rho_c$ ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	75	80	60	8	1.8
$T_c$ ( $10^6$ K)	9	14	21	32	41

TAB. 1 – Luminosités,  $\alpha = d \ln L / d \ln M$  pour des étoiles de différentes masses sur la ZAMS, durées de vie sur la séquence principale, rayons, fractions de masse correspondant au coeur convectif, masses volumiques moyennes ( $\bar{\rho}$ ) et centrale ( $\rho_c$ ) et températures centrales.

suppose qu’elles étaient massives pour la plupart et ont de ce fait presque toutes déjà explosé en supernovae. Viennent ensuite les **étoiles de population II** rencontrées dans le halo et le bulbe galactique. Ces étoiles se sont formées avant le disque galactique, avec des âges de l’ordre de 11-13 milliards d’années (période de formation du halo). Elles ont des faibles masses, ce qui leur a permis de survivre jusque maintenant. Elles ont également des faibles métallicités puisqu’elles se sont formées à partir du milieu interstellaire issu de la première génération. Plus précisément, rappelons la définition usuelle de la métallicité en astrophysique :

$$[Fe/H] \equiv \log_{10} \left( \frac{N_{Fe}}{N_H} \right)_{\text{étoile}} - \log_{10} \left( \frac{N_{Fe}}{N_H} \right)_{\text{soleil}} . \quad (376)$$

La métallicité des étoiles de population II s’étale sur l’intervalle  $-5 \leq [Fe/H] \leq -1$ , elles sont donc entre 10 et 100 000 fois moins “métalliques” que le Soleil. Le disque galactique (90 % des étoiles de la Galaxie) est quant à lui composé des étoiles dites de **population I** ayant une métallicité du même ordre que celle du Soleil. On rencontre toutes les gammes de masses dans cette population. En conséquence, toutes les gammes d’âge y sont également rencontrées, jusqu’à un maximum de l’ordre de 9 milliards d’années pour les moins massives. Comme l’indique le tableau 13.1, les étoiles les plus massives (types spectraux O-B) ont une durée de vie de l’ordre de quelques millions d’années ; elles sont de ce fait nettement moins nombreuses dans la Galaxie. D’un point de vue observationnel, les limites de détection sont cependant fixées en magnitude apparente. Comme les étoiles massives sont beaucoup plus lumineuses, on peut les voir très loin et elles constituent une part significative des étoiles les plus brillantes du firmament (exemple : *Spica*). Très lumineuses, elles

contribuent aussi significativement à la luminosité des galaxies spirales. Les étoiles se forment au niveau des bras spiraux que l'on peut voir comme des ondes de densité (des zones d'embouteillage d'étoiles en quelque sorte). Les durées de vie des étoiles massives sont bien plus courtes que les périodes orbitales autour du centre galactique ( $\approx 220 \times 10^6$  ans pour le Soleil); elles n'ont donc pas encore quitté les bras spiraux lorsqu'elles explosent en supernovae. Ceci explique l'apparence bleutée des bras spiraux dans les photos de galaxies spirales, cette couleur vient des étoiles O-B très brillantes qu'on y trouve.

Revenons à la relation masse-luminosité et son interprétation physique. On peut comprendre approximativement le comportement de  $\alpha = d \ln L / d \ln M$  en fonction de la masse (Tab. 13.1) par les raisonnements homologues suivants. Pour une étoile de masse similaire au soleil, approximations l'opacité par une loi de Kramers. Dans ce cas, la relation 332 fait ressortir une dépendance forte vis-à-vis de la masse ( $\alpha \approx 5.5$ ). Pour des étoiles plus massives, la température est plus élevée et la diffusion électronique domine comme source d'opacité. Comme celle-ci est constante à  $X$  fixé ( $\kappa_{de} \simeq 0.02(1 + X)m^2/kg$ ), nous trouvons par 332  $\alpha = 3$ . Pour des étoiles encore plus massives, la pression de radiation devient très importante. Considérons le cas extrême d'une étoile où la pression de radiation domine. Dans ce cas, l'équation d'un gaz parfait n'est plus du tout valable et il en va de même pour l'équation 328. Nous avons  $P \simeq (1/3)aT^4$ , et donc en utilisant l'équation 327,

$$T^3 dT/dr = TT(x)^3 dTT/dx M^2/R^5.$$

Puisque  $r^2/\rho = x^2/\rho\rho(x) R^5/M$ , nous trouvons donc, avec une opacité fixe dans l'éq. 329,

$$L(r) = LL(x)M, \tag{377}$$

donc  $\alpha \simeq 1$  pour des étoiles hypothétiques dans lesquelles la pression de radiation dominerait partout. Ceci explique la décroissance de  $\alpha$  quand on entre dans le régime des étoiles les plus massives.

Essayons de mieux comprendre ce qui se cache physiquement derrière cette relation masse-luminosité. Tout d'abord, nous l'avons trouvée en considérant un transport purement radiatif de l'énergie. Elle ne s'applique donc pas à des étoiles ayant une enveloppe convective significative en masse. La séquence de Hayashi définissant des modèles entièrement convectifs de même masse mais de luminosités très différentes illustre très clairement ce fait. Nous notons aussi que nous n'avons nulle part fait intervenir les réactions nucléaires dans l'établissement de cette relation. Elle s'applique donc aussi bien durant et en dehors des phases de réactions nucléaires. **Les étoiles rayonnent comme elles le font parce qu'elles ont des gradients de température et opacités internes le permettant.** L'énergie rayonnée est puisée là où elle est disponible. Si des réactions nucléaires ont lieu, elles fournissent cette énergie et l'étoile peut ainsi rayonner sur la longue échelle de temps nucléaire. Imaginons qu'on coupe brusquement cette source d'énergie, le gradient de température ne

serait pas instantanément modifié et l'étoile continuerait (au moins dans un premier temps) à autant rayonner. Elle entre en contraction globale et le théorème du Viriel nous dit où elle puise l'énergie qu'elle rayonne : c'est la moitié de l'énergie potentielle libérée par la contraction. Les réactions nucléaires dictent l'échelle de temps sur laquelle évoluent les étoiles, pas leur luminosité. Pour comprendre simplement cette relation masse-luminosité, supposons qu'on augmente la masse. Les relations 327 et 328 nous disent que cela implique une augmentation du poids de la colonne de gaz et donc de la température (1er cas), à moins que l'augmentation de rayon soit encore plus importante (2ème cas). Dans le 1er cas, nous voyons par l'éq. 329 que l'augmentation de température conduit immédiatement à une augmentation de la luminosité. Dans le 2ème cas, l'augmentation de rayon conduit à une diminution importante de la densité (et éventuellement de l'opacité), ce qui conduit à une augmentation de la luminosité. Finalement, notons que la luminosité ne dépend pas que de la masse, elle dépend aussi de la composition chimique interne des étoiles. En effet, à masse donnée, augmenter le poids moléculaire moyen augmente la température (éq. 328) et donc la luminosité (éq. 331) ; et augmenter la métallicité augmente l'opacité et donc diminue la luminosité (nous reviendrons là-dessus plus loin).

## 13.2 Caractéristiques physiques internes des étoiles le long de la ZAMS

Comparons les caractéristiques internes d'étoiles de différentes masses et interprétons ces résultats. Nous avons déjà vu comment la luminosité augmente rapidement avec la masse. Nous montrons dans le tableau 13.1 comment d'autres grandeurs varient avec la masse. Le rayon des étoiles de séquence principale croît avec leur masse dans des proportions raisonnables. A faible masse, les étoiles ont une enveloppe convective et un coeur radiatif. Par exemple, à  $0.5 M_{\odot}$ , l'enveloppe convective comprend 20% de la masse. Pour le Soleil, cette enveloppe convective ne correspond qu'à 2% de sa masse. Sa profondeur est connue très précisément par l'héliosismologie, elle descend jusqu'à une distance au centre de 0.713 rayons solaires. A partir de 1.2 masses solaires, les étoiles ont un coeur convectif. La fraction de la masse de l'étoile correspondant à ce coeur convectif est donnée dans le tableau 13.1. Comme discuté à la fin de la section 6.6.2, ce coeur convectif trouve son origine dans la dominance pour les étoiles de masse intermédiaire à élevée du cycle CNO très sensible à la température. On y voit aussi que les étoiles ont une masse volumique moyenne d'autant plus faible que leur masse est élevée. Après un plateau à faible masse, il en va de même pour la densité centrale. Enfin, leur température centrale augmente lentement avec la masse.

Interprétons maintenant ces résultats par un raisonnement approximatif basé sur des transformations homologues. A ce stade seulement nous faisons intervenir les réactions nucléaires. Les étoiles de séquence principale sont à l'équilibre thermique,



c'est à dire que la puissance produite par les réaction nucléaires est égale à leur luminosité :

$$L = \int_0^M \epsilon dm. \quad (378)$$

Nous approximons la dépendance de  $\epsilon$  vis-à-vis de la température par une loi de puissance :

$$\epsilon \propto \rho T^\nu.$$

Se servant des relations d'homologie 326 et 328, nous trouvons donc :

$$\epsilon = \epsilon(x) \frac{\mu^\nu M^{\nu+1}}{R^{\nu+3}}.$$

Combinant ce résultat avec 378, nous trouvons :

$$L(r) = LL_2(x) \frac{\mu^\nu M^{\nu+2}}{R^{\nu+3}}. \quad (379)$$

Cette relation correspond à la puissance produite par les réactions nucléaires. Elle doit être égale à la puissance rayonnée telle que donnée par la relations masse-luminosité. Nous prenons ici son comportement moyen (opacité fixe dans 331) :

$$L(r) = LL(x) \mu^4 M^3, \quad (380)$$

Egalant 379 et 380, notant que les fonctions  $LL(x)$  et  $LL_2(x)$  doivent être égales à un facteur multiplicatif près et isolant le rayon, nous trouvons :

$$R \propto M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}} \mu^{\frac{\nu-4}{\nu+3}}.$$

Nous pouvons maintenant injecter la relation 381 dans les équations 326 et 328, ce qui donne :

$$\rho(r) = \rho(x) M^{1-3\frac{\nu-1}{\nu+3}} \mu^{-3\frac{\nu-4}{\nu+3}}, \quad (381)$$

$$T(r) = TT(x) M^{1-\frac{\nu-1}{\nu+3}} \mu^{1-\frac{\nu-4}{\nu+3}}. \quad (382)$$

Comme  $\nu \gg 1$  ( $\approx 15$  pour le cycle CNO), nous trouvons en accord avec les calculs de modèles rigoureux que le rayon des étoiles croît avec leur masse, leur masse volumique décroît avec leur masse et leur température lentement avec leur masse. Ce dernier résultat s'interprète comme ceci. Supposons par l'absurde que la température croisse de façon significative avec la masse de l'étoile, la production d'énergie par les réactions nucléaires croîtrait considérablement ( $\nu$  très élevé), bien plus vite que l'évacuation d'énergie par la radiation, on sortirait donc clairement de l'équilibre thermique. L'apport net de chaleur au gaz conduirait à une dilatation de l'étoile avec

chute de la température. Donc celle-ci ne peut que croître lentement avec  $M$ . C'est ce qu'on appelle le **contrôle de la température par les réactions nucléaires**. Notons que la chute de la masse volumique avec la masse contribue aussi au maintien de l'équilibre thermique en facilitant l'évacuation de l'énergie par la radiation et diminuant son taux de production par les réactions nucléaires.

Ces résultats permettent également de comprendre le positionnement de la séquence principale dans le diagramme HR. La définition de la température effective (abusivement appelée loi de Stefan-Boltzmann) s'écrit sous forme logarithmique :  $\log L = 2 \log R + 4 \log T_{eff} + c_1$ . A  $\mu$  fixé, les logarithmes des équations 380 et 381 s'écrivent  $\log L = 3 \log M + c_2$  et  $\log R = (\nu - 1)/(\nu + 3) \log M + c_3$ . Ceci définit un système de 3 équations linéaires aux 4 inconnues  $\log L$ ,  $\log T_{eff}$ ,  $\log M$  et  $\log R$ . Par substitution, nous pouvons donc exprimer,  $\log L$  comme fonction linéaire de  $\log T_{eff}$ , ce qui donne :

$$\log L = \frac{12}{3 - 2 \frac{\nu-1}{\nu+3}} \log T_{eff} + c_4. \quad (383)$$

On retrouve au travers de cette relation la pente de la séquence principale.

### 13.3 Evolution de la structure interne

Ce qui dicte l'évolution de la structure interne d'une étoile durant la phase de séquence principale, c'est la modification progressive de sa composition chimique interne. De l'hélium est progressivement synthétisé à partir de l'hydrogène, ce qui conduit à une augmentation du poids moléculaire moyen dans les régions centrales. Cette augmentation de  $\mu$  modifie la relation entre densité, température et pression dans l'équation d'état. Ces grandeurs thermodynamiques sont donc modifiées et il en va de même pour la structure de l'étoile dans son ensemble.

Comprendre comment cette structure va être modifiée n'est pas simple car on ne peut se reposer comme dans les discussions précédentes sur un raisonnement homologue. En effet, la modification du poids moléculaire moyen résultant des réactions nucléaires n'a lieu que près du centre de l'étoile (si son coeur est radiatif) ou dans son coeur convectif si elle en a un. On est donc à l'opposé d'une modification homologue.

Malgré cette mise en garde, faisons malgré tout un raisonnement homologue car nous pourrions en tirer quelque enseignement. Que se passerait-il si le poids moléculaire moyen était multiplié par un facteur donné ? Dans ce cas, la dépendance vis-à-vis de  $\mu$  des différentes grandeurs physiques serait telle que décrite par les équations 380, 381, 381 et 382. L'éq. 381 nous y dit que le rayon devrait augmenter suite à l'augmentation de  $\mu$ . Et, pour un  $\nu$  élevé, l'éq. 382 nous dit que la température ne devrait que peu augmenter au cours du temps. C'est une nouvelle manifestation du contrôle de la température par les réactions nucléaires : comme  $T$  est proportionnel

à  $\mu/R$ ,  $R$  doit augmenter en même temps que  $\mu$  pour freiner l'augmentation de  $T$ . Retenons ce contrôle de la température et oublions le reste.