Transformées de Fourier Classique et Discrète

Transformée de Fourier classique d'une fonction intégrable f

$$F(u) = \mathscr{F}_u f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x u} dx.$$

Pour f donné en un nombre fini N de points d'échantillonnage

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = j\Delta x, \quad j = 1, \ldots, N,$$

F est calculé en N points espacés de $\Delta u = 1/(N\Delta x)$:

$$u_k = \tfrac{k}{N\Delta x}, \quad k = -\tfrac{N}{2}, \ldots, \tfrac{N}{2} - 1 \quad (N \text{ choisi pair}).$$

En approximation

$$F(u_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x u_k} dx \simeq \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi jk/N}.$$

Transformée de Fourier Discrète

À partir de l'approximation

$$F(u_k) \simeq \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi jk/N} = \Delta x \cdot F_k,$$

nous définissons :

- la *Transformée de Fourier discrète*

$$F_k = \sum_{j=1}^{N} f_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi jk/N}$$

- la *Transformée de Fourier discrète inverse*

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jk/N}$$

Transformée de Fourier Discrète : Interprétation

En toute généralité,

$$\begin{aligned} f_j &= \mathfrak{Re}\, f_j + \mathrm{i}\ \mathfrak{Im}\, f_j \\ F_k &= \mathfrak{Re}\, F_k + \mathrm{i}\ \mathfrak{Im}\, F_k \end{aligned}$$

La définition de la transformée de Fourier discrète inverse donne

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi jk/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\mathfrak{Re}\, F_k + \mathrm{i}\ \mathfrak{Im}\, F_k)\,(\cos(-2\pi jk/N) + \mathrm{i}\sin(-2\pi jk/N)) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\mathfrak{Re}\, F_k \cdot \cos(2\pi jk/N) + \mathfrak{Im}\, F_k \cdot \sin(2\pi jk/N)) \\ &\qquad + \mathrm{i}\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\mathfrak{Im}\, F_k \cdot \cos(2\pi jk/N) - \mathfrak{Re}\, F_k \cdot \sin(2\pi jk/N)) \end{aligned}$$

Transformée de Fourier Discrète : Interprétation

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\, f_j &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\mathfrak{Re}\, F_k \cdot \cos(2\pi jk/N) + \mathfrak{Im}\, F_k \cdot \sin(2\pi jk/N)) \\ \mathfrak{Im}\, f_j &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\mathfrak{Im}\, F_k \cdot \cos(2\pi jk/N) - \mathfrak{Re}\, F_k \cdot \sin(2\pi jk/N)) \end{aligned}$$

Les valeurs de la transformée de Fourier discrète évaluée aux différents u_k sont donc liées aux coefficients du développement de f en une série de cosinus et sinus, pour la fréquence fondamentale $1/(N\Delta x)$.

Dans le cas d'une fonction réelle f, les parties réelles et imaginaires des F_k doivent remplir certaines conditions de symétrie, afin de garantir que $\mathfrak{Im}\, f_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, N$.