

Travaux Pratiques du cours

*Méthodes numériques  
et éléments de programmation*

Guy Munhoven

Année académique 2014-2015

Version 1.0.2 (16/09/2012)

# Chapitre 1

## Calcul des intérêts d'un prêt. Tableau d'amortissement.

### Objectifs

Les objectifs de ce premier thème résident dans la mise au point d'un premier programme Fortran 90, servant à résoudre un problème concret et qui requiert

- l'utilisation de fonctions intrinsèques ;
- l'utilisation d'une fonction utilisateur ;
- l'utilisation d'une boucle ;
- des impressions formatées.

### 1.1 Introduction

Un crédit est contracté auprès d'un établissement financier. Nous notons

- $C$  le capital emprunté ;
- $t$  le taux d'intérêt mensuel ;
- $T$  le taux annuel effectif global (TAEG) correspondant au taux d'intérêt mensuel  $t$ .

Le prêteur est légalement tenu d'indiquer le TAEG du prêt dans sa publicité et dans le contrat qu'il propose à l'emprunteur, même si, normalement, les intérêts échoient à la fin de chaque mois.

### 1.1.1 Relation en taux mensuel et taux annuel effectif global

Il est supposé que les intérêts sont dûs à la fin de chaque mois, au taux mensuel, et ajouté au capital, pour porter à leur tour des intérêts.

À la fin du premier mois, les intérêts échus sont  $Ct$ . Après capitalisation des intérêts, la somme totale à rembourser devient

$$C + Ct = C(1 + t).$$

Après deux mois, les intérêts échus sont  $C(1 + t)t$ , qui vont être capitalisés à leur tour, portant la somme à rembourser à

$$C(1 + t) + C(1 + t)t = C(1 + t)^2.$$

Après douze mois, la somme à rembourser totale sera donc de

$$C(1 + t)^{12}.$$

Si le taux était exprimé en base annuelle, il faudrait rembourser après une année la somme de

$$C(1 + T).$$

Le contrat d'emprunt mentionnera toujours  $T$ , sous l'appellation *taux annuel effectif global*, mais, si le prêt est remboursé mensuellement, c'est-à-dire, par *mensualités*, c'est le taux mensuel, avec capitalisation mensuelle des intérêts, qui est appliqué pour le calcul.  $t$  et  $T$  sont alors liés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C(1 + t)^{12} &= C(1 + T) \\ (1 + t)^{12} &= 1 + T \\ 12 \ln(1 + t) &= \ln(1 + T) \\ \ln(1 + t) &= \ln(1 + T)/12 \\ 1 + t &= \exp(\ln(1 + T)/12) \\ t &= \exp(\ln(1 + T)/12) - 1 \end{aligned}$$

Nous avons les relations suivantes entre le taux mensuel,  $t$ , et le taux annuel effectif global (TAEG),  $T$  :

$$T = (1 + t)^{12} - 1 \quad \text{et} \quad t = \exp(\ln(1 + T)/12) - 1.$$

TABLE 1.1 – Remboursement à amortissement en capital fixe.

Mois	Mensualité	Intérêts	Solde
1	$C(1/N + t)$	$Ct$	$C(1 - 1/N)$
2	$C(1/N + (1 - 1/N)t)$	$Ct(1 - 1/N)$	$C(1 - 2/N)$
⋮			
$n$	$C(1/N + (1 - (n - 1)/N)t)$	$Ct(1 - (n - 1)/N)$	$C(1 - n/N)$
⋮			
$N$	$C/N + (C/N)t$	$Ct/N$	0

### 1.1.2 Remboursement

Nous envisageons les deux méthodes de remboursement les plus couramment utilisées

1. remboursement à amortissement en capital fixe ;
2. remboursement à mensualités constantes.

Nous allons supposer que le remboursement du prêt est échelonné sur  $N$  mois.

#### Remboursement à amortissement en capital fixe

Pour ce mode de remboursement, l'emprunteur rembourse chaque mois une fraction  $1/N$  du capital emprunté, plus les intérêts échus pendant ce mois sur le solde restant du prêt. Les mensualités décroissent donc en cours du temps, puisque les intérêts vont porter sur un solde décroissant.

La régularité qui caractérise l'évolution des remboursements et du solde restant dû est la suivante :

1. le premier mois, la mensualité s'élèvera à  $C/N + Ct = C(1/N + t)$  et après paiement, le solde restant dû sera de  $C + Ct - (C/N + Ct) = C(1 - 1/N)$  ;
2. le deuxième mois, la mensualité sera de  $C/N + C(1 - 1/N)t = C(1/N + (1 - 1/N)t)$ , et le solde du prêt sera de  $C(1 - 1/N) - C/N = C(1 - 2/N)$ .
3. En procédant de cette manière, le dernier mois,  $N$ , la mensualité sera de  $C/N + (C/N)t$

Nous obtenons donc le tableau d'amortissement du prêt représenté au tableau 1.1.

### Remboursement à mensualités constantes

La mensualité, que nous noterons  $M$ , ne s'obtient pas de manière immédiate. Procédons mois par mois pour déterminer la systématique de l'évolution des intérêts et soldes.

Les intérêts et le solde restant dû évoluent donc comme suit :

1. à la fin du premier mois, après paiement de la mensualité, il reste, compte tenu de la capitalisation des intérêts échus, un solde de  $C(1+t) - M$  ;
2. à la fin du deuxième mois, le solde restant dû s'élèvera à  $(C(1+t) - M)(1+t) - M = C(1+t)^2 - M(1+t+1)$  ;
3. à la fin du troisième mois, ce solde sera de  $(C(1+t)^2 - M(1+t+1))(1+t) - M = C(1+t)^3 - M((1+t)^2 + (1+t) + 1) = C(1+t)^3 - M((1+t)^3 - 1)/t$
4. le dernier mois (le  $N^{\text{ième}}$ ), le solde restant dû sera de  $C(1+t)^N - M((1+t)^N - 1)/t$ .

La mensualité  $M$  est ajustée de manière à ce que le solde restant dû à la fin du dernier mois soit nul, c'est-à-dire que

$$C(1+t)^N - M((1+t)^N - 1)/t = 0,$$

d'où nous déduisons que

$$M = C \frac{t(1+t)^N}{((1+t)^N - 1)}.$$

Le tableau d'amortissement du prêt qui résulte de ce mode de remboursement est schématisé au tableau 1.2

#### 1.1.3 En pratique, ...

... il faut évidemment tenir compte de ce que les mensualités doivent être arrondies à l'euro-cent près et qu'il faut faire la comptabilité de manière exacte à chaque mois, en calculant les intérêts à l'euro-cent près et en déduisant la mensualité à l'euro-cent près aussi du solde restant. Le prêteur (la banque) va arrondir la mensualité vers l'euro-cent supérieur, et Pour la dernière mensualité, La dernière mensualité est traitée de la manière suivante : c'est le solde restant dû qui est annulé, et le reste de la mensualité est considérée comme intérêts. De plus, on peut envisager que l'on ne retienne qu'un nombre restreint de décimales – p.ex., 4 ou 6 – ou de chiffres significatifs pour les taux mensuels, s'ils sont exprimés en %, dans les calculs.

TABLE 1.2 – Remboursement à mensualités constantes.

Mois	Mens.	Intérêts	Solde
1	$M$	$Ct$	$C(1+t) - M$
2	$M$	$Ct(1+t) - Mt$	$C(1+t)^2 - M(1+t+1)$
⋮			
$n$	$M$	$Ct(1+t)^{n-1} - M((1+t)^{n-1} - 1)$	$C(1+t)^n - M((1+t)^n - 1)/t$
⋮			
$N$	$M$	$Ct(1+t)^{N-1} - M((1+t)^{N-1} - 1)$	0

## 1.2 Application Fortran 90

Écrire un programme Fortran 90, qui imprimera le tableau d'amortissement, avec comme information par mois :

1. l'indice du mois ;
2. la mensualité ;
3. les intérêts échus pendant le mois courant ;
4. la part de capital remboursée le mois courant ;
5. le solde restant dû.

Une ligne supplémentaire finale indiquera en plus

1. le montant total payé au prêteur ;
2. la somme totale d'intérêts payés pendant toute la durée du prêt ;
3. la somme totale de capital remboursé.

En un premier temps, nous ne nous soucierons pas des règles d'usage pratique (fractions d'euro-cent, taux mensuel en pour cent plus précis que 4 décimales) ; dans un deuxième temps, nous allons arrondir tout correctement et ajuster la dernière mensualité afin de rembourser le capital emprunté et les intérêts calculés à l'euro-cent près.

Nous supposons que le prêt ne dépassera pas la somme de 999 999,99 Euro, et la durée du prêt sera de 999 mois tout au plus.

# Chapitre 2

## Stabilité et ordres de convergence de différentes méthodes numériques pour E.D.O.

### Objectifs

- Exploration de propriétés de différentes méthodes simples d'intégration numérique pour E.D.O. ;
- Étude des ordres caractéristiques de convergence (local, global, maximal) ;
- Résolution de problèmes courants de calcul numérique : diminution de la partie significative résultats de calcul en virgule flottante (*cancellation, loss of significance*) et remédiation
- Approfondissement du concept d'A-stabilité.

Pour ce thème, nous avons choisi l'équation logistique comme équation différentielle ordinaire à traiter. Il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire, que nous allons présenter et analyser maintenant.

### 2.1 L'équation logistique

#### 2.1.1 Introduction

L'équation logistique proposé par Holmes [2007, p. 8] est un cas particulier d'un modèle classique en dynamique des populations, à savoir le *modèle de Verhulst* :

$$y' = ry(1 - y/K), \quad y(0) = y_0 \quad (2.1)$$

Ce modèle a été proposé vers 1840 par Jean-François Verhulst,<sup>1</sup> pour décrire la croissance d'une population d'effectif  $y$ , en adoptant des taux de naissance et de mortalité respectivement croissant et décroissant avec la taille de la population. Dans cette équation,  $K$  représente la *capacité d'accueil* du milieu où vit la population et  $r$  le taux de croissance net pour les effectifs petits (i.e., pour  $y \ll K$ ). Tous les deux sont des constantes strictement positives. Pour de plus amples détails, on peut consulter Murray [2002, 2003] ou encore [http://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le\\_de\\_Verhulst](http://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Verhulst).

### 2.1.2 Prévision qualitative du comportement de la solution

Avant de passer au traitement numérique de cette équation, quelques observations *a priori* nous permettront déjà de saisir les caractéristiques principales de sa solution, et que n'importe quelle méthode numérique devrait respecter.

1. L'équation (2.1) admet deux solutions d'équilibre (ou stationnaires) c'est-à-dire, deux solutions pour lesquelles  $y' = 0$  :  $y(t) = 0$  et  $y(t) = K$ .
2. Lorsque  $0 < y(t) < K$ , alors  $y'(t) > 0$ . En conséquence, la population sera donc croissante dans ce cas. Lorsque  $y(t) > K$ ,  $y'(t) < 0$  et la population sera décroissante. Comme  $y'(t) \neq 0$  pour  $0 < y(t) < K$ , la population va toujours tendre vers la capacité d'accueil  $K$  avec le temps.
3. Il résulte de ce qui précède que l'équilibre  $y = 0$  est instable et que l'équilibre  $y = K$  est stable.

### 2.1.3 Solution analytique

L'équation (2.1) possède une solution sous forme analytique. Pour la construire, il suffit de ré-écrire l'équation sous la forme

$$\frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})} y' = r,$$

de noter que

$$\frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})} = \frac{K}{y} - \frac{1}{1 - \frac{y}{K}},$$

---

1. \* Bruxelles, 28 octobre 1804, † Bruxelles, 15 février 1849.



et de se rappeler, que pour toute fonction  $f$  admettant comme primitive  $F$ , nous avons

$$\int_{t_0}^t f(y)y' ds = \int_{t_0}^t \frac{dF}{dy}y' ds = \int_{t_0}^t \frac{dF}{ds} ds = [F(y)]_{y(t_0)}^{y(t)}.$$

Dans notre cas, nous avons donc, en intégrant les deux côtés de  $t_0$  à  $t$  que

$$K \ln y/y_0 - K \ln \frac{K-y}{K-y_0} = r(t-t_0),$$

ce qui, après quelques manipulations algébriques, conduit à

$$y(t) = \frac{Ky_0 \exp(r(t-t_0))}{K + y_0(\exp(r(t-t_0)) - 1)}. \quad (2.2)$$

### 2.1.4 Évaluation numérique : précautions à prendre

Pour des raisons de stabilité, il convient de reformuler cette expression avant de l'utiliser pour une réalisation numérique. Pour des valeurs très grandes de  $t$ , l'exponentielle dépassera les bornes des valeurs réelles que l'ordinateur peut représenter, et le quotient ne pourra plus être évalué (même si sa valeur ne change plus). En multipliant le numérateur et dénominateur par  $\exp(-r(t-t_0))$ , et en simplifiant, on obtient l'expression équivalente

$$y(t) = \frac{K}{1 + (K/y_0 - 1) \exp(-r(t-t_0))}, \quad (2.3)$$

qui ne souffre pas de ces problèmes

## 2.2 Application numérique

### 2.2.1 Méthodes, valeurs des paramètres et condition initiale

Ecrire un programme Fortran 95 pour intégrer cette équation par les méthodes suivantes :

1. Euler explicite (progressive)
2. Euler implicite (rétrograde)
3. Trapèzes
4. Leap-frog (saute mouton)

Les valeurs suivantes seront adoptées pour les paramètres :  $r = 10$  et  $K = 1$ . Comme conditions initiales, nous utiliserons  $t_0 = 0$  et  $y_0 = 0.1K$ . L'intervalle d'intégration sera fixé à  $[0, 2]$  Utiliser différents nombres de pas avec Euler explicite et avec avec le schéma leap-frog (8, 16, 32, 64).

### 2.2.2 Analyse des ordres de convergence

En vue d'une analyse systématique du comportement de la convergence des différentes méthodes adoptées ici, nous allons compléter les codes précédents afin qu'il calculent pour chaque intégration

1.  $\epsilon_1$  – l'erreur effective commise au premier pas (locale) ;
2.  $\epsilon_f$  – l'erreur effective commise à la fin de l'intégration (globale) ;
3.  $\epsilon_{\max}$  – l'erreur maximale sur l'intervalle d'intégration.

Nous ajouterons en plus un monitoring de l'ordre de convergence, basé sur l'idée suivante. Supposons que, du moins localement, si l'erreur se comporte en  $O(k^m)$ , il existe une constante  $C$  telle que  $\epsilon(k) = Ck^m$ . Pour une longueur de pas  $k_1$ , nous aurons donc  $\epsilon(k_1) = Ck_1^m$ , pour une longueur de pas  $k_2$ , nous aurons donc  $\epsilon(k_2) = Ck_2^m$ . Si nous calculons alors  $\epsilon(k_1)$  et  $\epsilon(k_2)$  sur deux intégrations différentes, nous aurons

$$\frac{\epsilon(k_1)}{\epsilon(k_2)} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^m.$$

Nous désirons faire le monitoring de  $m$ , qui peut être tiré de la relation précédente en prenant le logarithme des deux côtés :

$$m = \frac{\log\left(\frac{\epsilon(k_1)}{\epsilon(k_2)}\right)}{\log\left(\frac{k_1}{k_2}\right)}.$$

Si on adopte une suite géométrique  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , c'est-à-dire, telle que deux pas successifs soient dans un rapport constant  $\rho$  (en pratique, nous adopterons  $\rho = 2$ ), nous pourrions trouver l'ordre de convergence pratique

$$m = \frac{\log\left(\frac{\epsilon(k_1)}{\epsilon(k_2)}\right)}{\log \rho}.$$

En suivant l'évolution de ce rapport, pour une série d'intégrations, on pourra déterminer comment l'ordre de convergence est atteint, et comment l'ordre local et l'ordre global se distinguent.

## 2.3 A-stabilité : justification de l'approche (Holmes, 2007, p. 14)

Question

Pourquoi privilégier l'équation de décroissance radioactive comme base pour justifier de la stabilité d'une méthode d'intégration d'E.D.O. ?

Pour une E.D.O. quelconque  $y' = f(y)$  admettant une valeur d'équilibre  $y = Y$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  (donc telle que  $f(Y) = 0$ ), nous pouvons étudier le comportement de la différence  $\delta(t) = y(t) - Y$ . Nous avons donc

$$\delta' = y'$$

et, d'après l'E.D.O. à laquelle obéit  $y(t)$ ,

$$\delta' = f(y) = f(Y + \delta).$$

Le développement de Taylor de la fonction  $f$  au voisinage de  $Y$  nous permet alors d'écrire que,

$$f(Y + \delta) = f(Y) + \delta \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=Y} + O(\delta^2).$$

En tenant compte de ce que  $f(Y) = 0$  et en omettant le terme  $O(\delta^2)$ , nous pouvons conclure que  $\delta$  obéit à l'E.D.O.

$$\delta' = -\lambda\delta, \quad \delta(t_0) = \delta_0 = y(t_0) - Y$$

où  $\lambda = -\left. \frac{df}{dy} \right|_{y=Y}$ . Ainsi, l'approche vers l'équilibre sera contrôlé par l'E.D.O. de décroissance radioactive.

Déduisez-en la condition de stabilité pour l'équation logistique.

# Chapitre 3

## Méthodes multi-pas : erreurs et combinaisons

### Objectifs

- Établir un monitoring de l'erreur locale d'une méthode multi-pas (méthode des trapèzes) à l'aide d'une autre méthode multi-pas de même ordre (méthode d'Adams-Bashforth) et implémenter ce monitoring ;
- Combiner des méthodes multi-pas pour obtenir des méthodes d'ordre plus élevés ; vérifier la convergence des méthodes ainsi dérivées.

### 3.1 Méthodes multi-pas : rappels

Une méthode multi-pas (linéaire) à  $s$  pas est définie par une récurrence

$$\begin{aligned} y_{j+1} + a_{s-1}y_j + \dots + a_0y_{j+1-s} \\ = k (b_s f(y_{j+1}) + \dots + b_0 f(y_{j+1-s})). \end{aligned}$$

Si le coefficient  $b_s$  de  $f(y_{j+1})$  est nul, la méthode est *explicite*, sinon *implicite*.

A chaque méthode multi-pas linéaire sont associés deux polynômes caractéristiques définis à partir des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  (pour  $i = 0, \dots, s$ , avec  $a_s = 1$ ) :

$$\rho(w) := \sum_{m=0}^s a_m w^m, \quad \text{et} \quad \sigma(w) := \sum_{m=0}^s b_m w^m.$$

Ces deux polynômes permettent de caractériser complètement la méthode à laquelle ils se rapportent.

- La méthode est convergente si elle est consistante (i.e., 1 est racine de  $\rho(w)$ ) et si  $\rho(w)$  obéit à la *condition des racines* :

TABLE 3.1 – Constantes de quelques méthodes multi-pas.

Méthode	Récurrence	$c$
Adams-Bashforth d'ordre 2 (AB2)	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(3f_j - f_{j-1})$	$\frac{5}{12}$
Trapèzes (TR)	$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j)$	$-\frac{1}{12}$
Saute-Mouton (SM)	$y_{j+1} = y_{j-1} + 2kf_j$	$\frac{1}{3}$

toutes les racines de  $\rho(w)$  sont de module inférieur ou égal à 1 ; celles de module égal à 1 sont simples.

- La méthode est d'ordre  $p$  s'il existe  $c > 0$  tel que

$$\rho(\xi + 1) - \sigma(\xi + 1) \ln(\xi + 1) = c\xi^{p+1} + O(|\xi|^{p+2}).$$

Son erreur de troncature locale est alors donnée par

$$y(t_{j+1}) - y_{j+1} = ck^{p+1}y^{(p+1)}(t_{j+1}) + O(k^{p+2}).$$

Les constantes pour les trois méthodes multi-pas d'ordre deux que nous avons rencontrées au cours sont données au tableau 3.1. On peut noter que la méthode des trapèzes est la méthode multi-pas d'ordre 2 qui présente la plus petite constante d'erreur (en valeur absolue).

## 3.2 Estimation de l'erreur pour les méthodes multi-pas

Nous utilisons la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2 (AB2) pour contrôler l'erreur de la méthode des trapèzes (TR)

- Nous avons établi auparavant que la constante d'erreur de la méthode des trapèzes est  $c = -\frac{1}{12}$ . Montrer que la constante d'erreur  $\tilde{c}$  pour la méthode AB2 vaut  $\frac{5}{12}$  (tableau 3.1). Est-ce que le signe de la constante est important ?
- Quel sera l'estimateur pour l'erreur locale de la méthode des trapèzes ? Quel sera le critère de contrôle pour le pas de discrétisation pour une tolérance  $\delta$  fixée par unité de pas ? Pour une tolérance  $\delta$  fixée absolue ?
- Modifiez votre routine des trapèzes de manière à surveiller l'erreur locale (calculer cette erreur en chaque pas et déterminer si le pas de discrétisation choisi est acceptable pour la précision choisie). Tester des précisions absolues de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . (NB. : il n'est pas demandé de réaliser une modification du pas).

- Les deux méthodes présentent des constantes qui sont significativement différentes. Ici, nous avons utilisé la méthode “moins précise” pour déterminer l’erreur de la “plus précise”. Si on avait fait le choix inverse (TR pour surveiller AB2), quel aurait été le critère de contrôle ? Commentez.

### 3.3 Combinaison de méthodes multi-pas

Nous avons vu comment combiner deux méthodes multi-pas de même ordre pour obtenir un estimateur de l’erreur locale de troncature. Mais, on peut aussi combiner deux (voire plusieurs) méthodes multi-pas pour en générer des nouvelles. Nous allons illustrer la manière de procéder à l’aide des deux méthodes TR et AB2.

- Ecrire les expressions pour les erreurs de troncature locales de TR et AB2, respectivement.
- Éliminer le terme principal d’erreur des deux expressions, exprimer  $y(t_{j+1})$  en fonction du reste, en gardant le terme d’ordre  $O(k^{p+2})$ . Déduisez de cette expression une nouvelle récurrence pour une méthode d’intégration multi-pas. Quel est l’ordre de la méthode définie par la nouvelle récurrence ? Quelle méthode obtient-on ? Est-elle convergente ?
- Généraliser à deux méthodes de même ordre et de constantes  $c$  et  $\tilde{c}$ .
- Combiner les méthodes AB2 et SM. Quelles sont les propriétés de la méthode obtenue ? Est-elle convergente ?

# Chapitre 4

## Contrôle du pas d'intégration et méthodes de Runge-Kutta

### Objectifs

- Mettre au point un intégrateur autonome pour résoudre une E.D.O. quelconque (définition d'une interface standard, utilisation d'attributs `EXTERNAL`, ...);
- Formulation robuste du contrôle du pas;
- Paramétrisation du contrôle du pas.

Nous basons encore nos explorations sur l'équation logistique.

### 4.1 Doublement du pas avec la méthode de Heun

Considérons la méthode de Runge-Kutta du second ordre définie par le tableau suivant :

0		
1		1
-----		
		$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Réalisez une routine à pas variable, utilisant la technique du doublement de pas, pour résoudre le problème logistique sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Chaque pas sera d'abord intégré en direct, puis par deux demi-pas successifs.

Dans ce programme, nous ferons en sorte que l'intégration numérique soit réalisée dans une sous-routine indépendante, appelée par le programme principal. Seront transmis à cette sous-routine les informations suivantes :

- le nom de la sous-routine ou de la fonction qui fournit l'évaluation de la dérivée (prévoir le cas d'une E.D.O. vectorielle);

- l'état initial ;
- la tolérance pour l'intégration ;
- une valeur pour la longueur de pas initiale (le premier pas) ;

Dans un fichier, nous sauvegarderons l'indice  $j$  de chaque pas réalisé, l'instant de temps  $t_j$  auquel il amène, les valeurs exactes et approchées de la solution en  $t_j$  ainsi que la longueur du pas  $k_j = t_j - t_{j-1}$  finalement adoptée. Cette tâche peut aussi être confiée à une sous-routine à part que l'intégrateur appelle (et dont le nom pourrait aussi être transmis en argument).

## 4.2 Ordres différents avec la méthode emboîtée de Runge-Kutta-Fehlberg 2(3)

Complétons le tableau précédent pour retrouver la méthode emboîtée de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 2(3) :

0	·	·	·
1	1	·	·
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	·
p=2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
p=3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Complétez le programme précédent et réalisez le contrôle du pas par la méthode des ordres différents.



# Chapitre 5

## Étude des variations de pas

### Objectifs

- Analyser l'évolution du pas d'intégration au fil de l'évolution d'une solution et comparer au comportement de la solution ;
- Etudier l'évolution du nombre de pas rejetés.

### 5.1 Étude des variations de pas

Etudier l'E.D.O.

$$\frac{dy}{dt} = -200ty^2, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

à l'aide de la méthode RKF 2(3) et de la méthode RKDP 5(4).

Inclure deux compteurs dans `rkf23.f90` pour comptabiliser les pas acceptés et le total des pas ou les pas rejetés. Analyser et commenter l'évolution du pas d'intégration adopté en fonction du temps, pour les tolérances absolues reprises au tableau suivant

Tolérance	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
Nombre de pas acceptés					
Nombre total de pas					
Nombre de pas rejetés					
Erreur en $t = 1$					
Erreur maximale					

# Chapitre 6

## Le pendule simple (circulaire)

### Objectifs

- Reformulation d'une équation d'ordre deux en un système de deux équations d'ordre un ;
- Exploitation des tolérances à fournir à la méthode d'intégration numérique pour contrôler la précision d'un résultat.

### 6.1 Introduction

Le pendule simple constitué par une masse ponctuelle rattachée à un fil rigide (inextensible et inflexible) de longueur  $l$  obéit à l'équation de mouvement non-linéaire

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

ou  $g$  dénote l'accélération de la pesanteur. Nous adoptons comme conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.$$

Cette équation est généralement linéarisée pour se mettre sous la forme

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta,$$

c'est-à-dire, l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique. Cette linéarisation n'est cependant valable que pour les oscillations de faible amplitude.

## 6.2 Problèmes à résoudre

1. Reformuler le problème d'ordre 2 en un système couplé de problèmes d'ordre 1, puis écrire un programme Fortran 90 pour résoudre les questions suivantes en utilisant une des méthodes de Runge-Kutta à contrôle de pas. Nous adoptons  $\frac{g}{l} = 1$ .
2. Déterminer la période  $\tau$  du mouvement exact et comparer-la à la période de l'oscillateur harmonique  $\tau_0$  :
  - Quelle est la déviation de  $\tau$  par rapport à  $\tau_0$  (en %) pour  $\theta_0 = 90^\circ$  ?
  - Quel est l'angle  $\theta_0$  limite en-dessous duquel  $\tau$  dévie de  $\tau_0$  de moins de 0.1% ?

## 6.3 Pour aller plus loin

3. Déterminer cette période avec une incertitude inférieure à  $10^{-9}$ .
4. Déterminer le rapport  $\tau_h/\tau_s$  entre les périodes du pendule harmonique ( $\tau_h$ ) et du pendule simple ( $\tau_s$ ), en fonction de  $\theta_0$ . Les valeurs suivantes sont à adopter pour  $\theta_0/\pi$  : 0.001, 0.01, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.85, 0.90, 0.92, 0.95, 0.97, 0.98, 0.985, 0.990, 0.995, 0.999, 0.9999 et 0.99999.

## Précisions et suggestions

- Il est difficile de localiser deux maxima successifs avec précision — il vaut mieux se concentrer sur deux passages par zéro pour localiser le début et la fin d'une période.
- $\theta$  et  $\dot{\theta}$  véhiculent la même information, avec sensiblement la même précision. Il suffit de considérer un seul des deux pour dériver les informations demandés.
- La précision demandée à la question 4 porte bien sur  $\tau_s$  et non pas sur  $\theta$ . Il convient donc de lier l'incertitude de  $\tau_s$  à celle de  $\theta$ , qui elle est contrôlable par une méthode d'intégration avec contrôle de la longueur du pas. Il faut éventuellement prévoir d'effectuer des itérations pour s'assurer de la précision demandée.
- Adoptez une procédure simple comme la bisection (ou dichotomie), la méthode de la sécante, ou semblable pour résoudre l'équation en  $\tau_s$ . Une procédure de Newton, bien que facile mettre en oeuvre, exige une connaissance *a priori* trop précise de la solution pour démarrer les itérations. Les autres procédures convergent de manière sûre et fiable.

# Chapitre 7

## Équations raides (*stiff*)

### Objectifs

- Analyse d'une équation raide
- Tentatives de résolution numérique à l'aide de plusieurs méthodes numériques

### 7.1 Introduction : problème de base

Considérons le problème à valeur initiale suivant, tiré de Hairer and Wanner [2010, chapitre IV.1] et légèrement modifié :

$$y' = \alpha(\cos t - y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (7.1)$$

Cette équation fait partie des équations différentielles dites *raides*, discutées pour la première fois par Curtiss and Hirschfelder [1952], sous une forme plus générale.

#### 7.1.1 Solution analytique

L'équation homogène associée à (7.1),  $y' = -\alpha y$ , admet comme solution  $y = ce^{-\alpha t}$ ,  $c$  étant une constante d'intégration. En utilisant la méthode dite *de la variation des constantes*, nous obtenons :

$$y' = c'e^{-\alpha t} - \alpha ce^{-\alpha t} = c'e^{-\alpha t} - \alpha y,$$

qui doit être identifié à la solution de l'E.D.O. (7.1)

$$y' = \alpha(\cos t - y) = \alpha \cos t - \alpha y$$

Ainsi,

$$c' = \alpha e^{\alpha t} \cos t$$

Le second membre admet une primitive connue :

$$c(t) = \alpha \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t + \sin t) + c_0,$$

où  $c_0$  est une constante arbitraire, dont la valeur sera fixée à partir des conditions initiales. Il s'ensuit que

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t + \sin t) + c_0 e^{-\alpha t}$$

Avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , la constante d'intégration  $c_0$  devient

$$c_0 = e^{\alpha t_0} \left( y_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t_0 + \sin t_0) \right),$$

d'où :

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t + \sin t) + \left( y_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t_0 + \sin t_0) \right) e^{-\alpha(t-t_0)}$$

La solution de l'E.D.O. (7.1) se compose donc d'une solution asymptotique  $y_\infty(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos t - \sin t)$  et d'une perturbation exponentiellement décroissante avec un temps caractéristique  $\tau = 1/\alpha$ , liée à l'écart de la solution d'équilibre en  $t = t_0$ . Comme illustré à la figure 7.1, la solution s'approche rapidement, pour n'importe quel couple de conditions initiales  $(t_0, y_0)$ , de la solution asymptotique.

## 7.1.2 Solution numérique

### Cas général

Etudier l'E.D.O. (7.1) avec

- la méthode d'Euler explicite,
- la méthode de Dormand et Prince d'ordre 5(4) (`rkdp54`, avec une tolérance absolue de  $10^{-4}$ , p.ex.),
- la méthode d'Euler implicite (à construire),

en utilisant  $y(0) = 0$  comme condition initiale,  $\alpha = 50$  comme valeur pour le paramètre, et, dans un premier temps,  $t \in [0, 1]$ .

Comment est-ce que les résultats de ces trois méthodes se comparent, d'un point de vue stabilité, nombre d'évaluations du second membre, etc.? Quel est le nombre de pas qu'il faut utiliser pour que la méthode d'Euler explicite reste stable (suggestion : consulter les notes de la première séance de travaux pratiques, ainsi que les transparents de la première leçon de théorie).

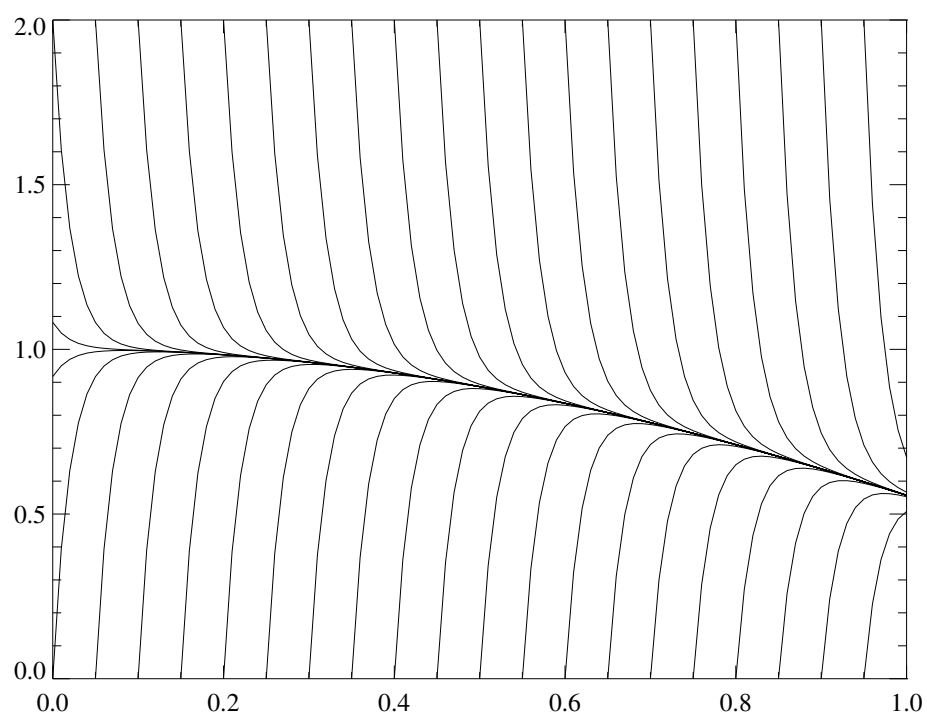


FIGURE 7.1 – Courbes solution pour l'équation (7.1), pour différentes conditions initiales et  $\alpha = 50$ .

**Cas asymptotique pur**

Lorsque  $y_0 = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}(\alpha \cos t_0 + \sin t_0)$  — c'est-à-dire,  $y_0 = \frac{2500}{2501}$  pour  $t_0 = 0$  dans notre cas concret — la solution complète  $y(t)$  est identiquement égale à la solution asymptotique. Est-ce que l'on peut s'attendre à ce que les méthodes utilisées ci-dessus se comportent de manière plus stables en l'absence de cette perturbation ? Analyser surtout le cas de la méthode d'Euler explicite. Etendre l'intervalle d'intégration à  $[0, 40]$  et essayer 1000 pas, 900 pas, 995 pas.

# Bibliographie

- C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder. Integration of stiff equations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 38(3) :235–243, 1952. URL <http://www.pnas.org/cgi/reprint/38/3/235>.
- Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2010. ISBN 978-3-540-60452-5. doi : 10.1007/978-3-642-05221-7.
- Mark H. Holmes. *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, volume 52 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2007. ISBN 0-387-30891-1. doi : 10.1007/978-0-387-68121-4.
- J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 3 edition, 2002. ISBN 0-387-95223-3. doi : 10.1007/b98868.
- J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 18 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 3 edition, 2003. ISBN 0-387-95228-4. doi : 10.1007/b98869.