

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Méthodes
numériques
pour E.D.O.

Méthodes par
différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par
quadrature

Méthodes
d'Adams

Concepts
théoriques

Erreurs

Consistance,
ordre et
convergence

Méthodes
multi-pas

Théorème de
Dahlquist

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Institut d'Astrophysique et de Géophysique (Bât. B5c)
Bureau 0/13

eMail: Guy.Munhoven@ulg.ac.be

Tél.: 04-3669771

<http://www.astro.ulg.ac.be/~munhoven/fr/cours>

16 septembre 2014

Plan du cours 2014-2015

Méthodes
numériques et
éléments de
programmation

Guy
Munhoven

Méthodes
numériques
pour E.D.O.

Méthodes par
différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par
quadrature

Méthodes
d'Adams

Concepts
théoriques

Erreurs

Consistance,
ordre et
convergence

Méthodes
multi-pas

Théorème de
Dahlquist

Cours théoriques

16-09-2014 Méthodes numériques pour équations
différentielles ordinaires : introduction

- méthodes simples
- notions théoriques
- méthodes multi-pas

22-09-2014 Méthodes de Runge-Kutta ; Contrôle du pas,
équations raides

22-09-2014 Fortran 95 : bases

4-5 cours Fortran 95 : suite et compléments

Supports de cours

Textbooks

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Mark H. Holmes. Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. Texts in Applied Mathematics, vol. 52, Springer New York, 2007.

URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-68121-4>

Alfio Quarteroni, Riccardo Sacci et Fausto Saleri. Méthodes Numériques. Algorithmes, analyse et applications. Springer Milan, 2007.

URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-0496-2>

Les deux ouvrages sont disponibles sous forme électronique sur depuis le domaine `ulg.ac.be`, directement ou via proxy – vous devez être logués avec votre identifiant ULg.

Prérequis

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)
Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Prérequis

- Analyse mathématique et calcul matriciel
 - séries de Taylor, ...
 - transformées de Fourier
 - matrices, valeurs propres, ...
- Calcul numérique de base
- Systèmes linéaires
 - Elimination de Gauss, factorisation LR , ...
 - Méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, ...)
- Résolution d'équations non-linéaires (y inclus systèmes)
 - Point fixe, bisection, ...
 - Newton-Kantorovich
- Quadrature numérique

Equations différentielles ordinaires (E.D.O.)

Ordinary Differential Equations (ODE)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Equations différentielles : A quoi bon ?

- Beaucoup de phénomènes physiques décrits à l'aide d'équations différentielles

Pourquoi se soucier de méthodes numériques alors qu'il existe des solutions analytiques ?

- Equations différentielles à solution analytique sont des exceptions
- Solutions analytiques parfois peu utiles en pratique

Exemples d'E.D.O. : Désintégration radioactive

ODE Examples : Radioactive Decay

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs
Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

La loi de décroissance radioactive décrit l'évolution de la quantité de substance $N(t)$ par

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

sachant que la quantité initiale vaut

$$N(t_0) = N_0.$$

Equation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre

Exemples d'E.D.O. : Deuxième loi de Newton

ODE Examples : Newton's Second Law

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Nous avons

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

et

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

où la force F dépend éventuellement du temps t , de la position x et de la vitesse $v = \dot{x}$.

Equation différentielle ordinaire du second ordre

- *linéaire* si F est linéaire en x et \dot{x}
- *non-linéaire sinon*

Exemples d'E.D.O. : Deuxième loi de Newton

ODE Examples : Newton's Second Law

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Exemple : Oscillateur harmonique amorti

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

assorti des conditions initiales appropriées

Transformation d'E.D.O. d'ordre $m > 1$

Transformation of ODEs of order $m > 1$

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

L'équation de l'oscillateur harmonique amorti, du second ordre peut être reformulée en un système d'équations du premier ordre en définissant

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-cx_2 - kx_1) \end{aligned}$$

avec

$$x_1(t_0) = x_0$$

$$x_2(t_0) = v_0.$$

Transformation d'E.D.O. d'ordre $m > 1$

Transformation of ODEs of order $m > 1$

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Sous forme vectorielle,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(-cx_2 - kx_1) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Généralisation triviale à une E.D.O. d'ordre m quelconque

Transformation d'E.D.O. non-autonomes

Transformation of non autonomous ODEs

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Une équation différentielle non-autonome (i.e., avec second membre dépendant explicitement de t)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

peut être reformulée sous forme autonome (i.e., à second membre indépendant de t)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

en définissant

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Problème donné :

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour } t \in [0, T]$$

avec

$$y(0) = y_0$$

Cinq étapes :

- 1 Choisir une grille de discrétisation

$$t_0 = 0, t_1, \dots, t_M = T.$$

Ici, nous adoptons une grille où les t_j sont équidistants :

$$t_j = jk, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, M$$

- 2 Evaluer l'équation différentielle au point $t = t_j$:

$$y'(t_j) = f(y(t_j))$$

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

- 3 Remplacer la dérivée y' par une formule aux différences finies, utilisant les valeurs de y à un ou plusieurs points de la grille, par exemple :

$$y'(t_j) = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{k} + \tau_j,$$

où

$$\tau_j = -\frac{k}{2}y''(\eta_j)$$

est l'*erreur de troncature*, et η_j un point de $[t_j, t_{j+1}]$

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

- 3 Après insertion dans l'équation :

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) - k\tau_j + kf(y(t_j))$$

- 4 Laisser tomber l'erreur de troncature et remplacer $y(t_j)$ par y_j , etc. :

$$y_{j+1} = y_j + kf(y_j)$$

Méthode d'Euler explicite (progressive)

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

4 A noter que :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \tau_j = 0$$

Méthode *consistante*

5 Vérifier la stabilité :

- y_0 connue exactement
- y_1 seulement approximation de $y(t_1)$
- différence entre y_j et $y(t_j)$ affectée par toutes les différences en y_1, \dots, y_{j-1}
- Condition de *stabilité* : les erreurs successives ne doivent pas s'amplifier

A-stabilité d'une solution numérique d'E.D.O.

A-Stability of a numerical ODE solution

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Il existe différentes manières d'exprimer quantitativement le concept de stabilité.

L'*A-stabilité* utilise une *équation test* (décroissance radioactive)

$$y' = -\lambda y, \quad (\lambda > 0), \quad \text{et} \quad y(0) = y_0,$$

qui admet comme solution $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t)$.

Pour cette équation, la méthode d'Euler explicite fournit

$$y_{j+1} = (1 - \lambda k)y_j$$

et nous avons donc :

$$y_j = (1 - \lambda k)^j y_0$$

A-stabilité d'une solution numérique d'E.D.O.

A-Stability of a numerical ODE solution

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

La solution de l'équation test décroît vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$, ce qui inspire la définition *tentative et préliminaire* suivante :

Définition

Une méthode est dite A-stable si son application à l'équation

$$y' = -\lambda y, \quad (\lambda > 0), \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

fournit une solution qui reste bornée, quelque soient les valeurs de k et de λ . Si la solution ne reste bornée que pour des k suffisamment petits, alors la méthode est qualifiée de conditionnellement A-stable, sinon elle est instable.

A-stabilité de la méthode d'Euler explicite

A-Stability of the Forward Euler Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

La méthode d'Euler explicite est A-stable pour

$$|1 - \lambda k| \leq 1,$$

c'est-à-dire pour

$$-1 \leq 1 - \lambda k \leq 1.$$

Il faut donc que (l'inégalité à droite étant réalisée)

$$-1 \leq 1 - \lambda k,$$

c'est-à-dire, que

$$k \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Ainsi, la méthode d'Euler est conditionnellement A-stable.

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Autres méthodes : Méthode d'Euler implicite

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) - k\tau_j + kf(y(t_{j+1}))$$

où $\tau_j = \frac{k}{2}y''(\eta_j)$, pour un $\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$

- implicite en y_{j+1} : évt. difficile à résoudre
- A-stabilité :

$$y_{j+1} = \frac{1}{1 + \lambda k} y_j \quad \text{et donc} \quad y_j = \frac{y_0}{(1 + \lambda k)^j}$$

y_j tend vers 0 quels que soient λ et k positifs.

La méthode d'Euler implicite est A-stable.

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Autres méthodes : Centrée explicite (saute-mouton, *leap-frog*, *explicit mid-point*)

$$y(t_{j+1}) = y(t_{j-1}) - 2k\tau_j + 2kf(y(t_j))$$

où $\tau_j = -\frac{k^2}{6}y'''(\eta_j)$, pour un $\eta_j \in [t_{j-1}, t_{j+1}]$

- explicite, à deux pas
- τ_j d'ordre 2 : méthode meilleure ?

Méthodes obtenues par différentiation numérique

Methods Obtained by Numerical Differentiation

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Autres méthodes : saute-mouton

■ A-stabilité :

$$y_{j+1} = y_{j-1} - 2\lambda ky_j$$

Rechercher une solution de la forme $y_j = s^j$:

$$s^2 + 2\lambda ks - 1 = 0.$$

Les solutions sont $s_{\oplus/\ominus} = -\lambda k \pm \sqrt{1 + \lambda^2 k^2}$.

La solution générale y_j s'écrit alors

$$y_j = c_{\ominus} s_{\ominus}^j + c_{\oplus} s_{\oplus}^j,$$

c_{\oplus} et c_{\ominus} étant deux constantes.

Comme $s_{\ominus} < -1$ pour $\lambda k > 0$, $|s_{\ominus}| > 1$: la méthode saute-mouton n'est pas A-stable.

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Problème donné :

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour } t \in [0, T], \quad \text{avec } y(0) = y_0$$

Cinq étapes :

- 1 Choisir une grille de discrétisation
- 2 Intégrer l'équation différentielle entre deux points de la grille, p.ex., t_j et t_{j+1} :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} y'(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t)) dt.$$

Donc :

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y(t)) dt.$$

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

- 3 Remplacer l'intégrale de f par une formule aux différences finies, comme par exemple, la formule des trapèzes

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \frac{k}{2}[f(y(t_{j+1})) + f(y(t_j))] + O(k^3)$$

$O(k^3)$ est une fonction telle que $\lim_{k \rightarrow 0} (O(k^3)/k^3)$ est finie.

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Cinq étapes (suite) :

- 4 Laisser tomber le terme $O(k^3)$ et remplacer $y(t_j)$ par y_j , etc. :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j)$$

Méthode des trapèzes, implicite

- 5 A-stabilité : à déterminer comme exercice

Délai : 22 septembre 2014

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Autres procédures pour quadrature numérique :

Approximation de $f(y(t))$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ par un polynôme de degré $q \geq 0$ passant par

■ $(t_{j-q}, f(y_{j-q})), \dots, (t_j, f(y_j))$

méthode d'Adams-Bashforth (explicite)

■ $(t_{j-(q-1)}, f(y_{j-(q-1)})), \dots, (t_{j+1}, f(y_{j+1}))$

méthode d'Adams-Moulton (implicite)

Méthode d'Adams-Bashforth ($q = 2$)

Adams-Bashforth Method ($q = 2$)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

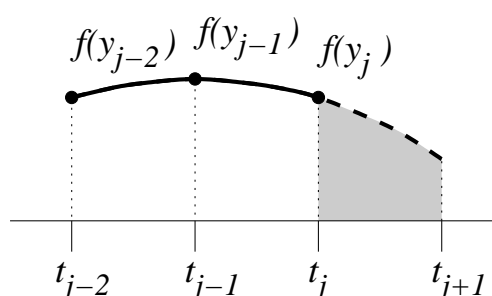
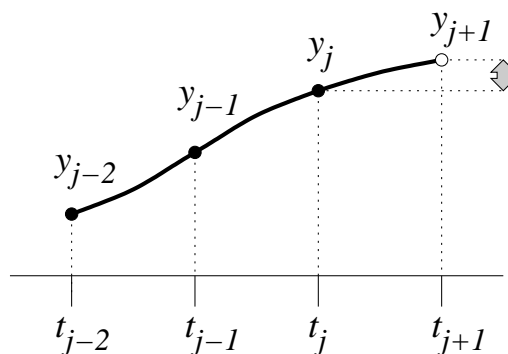
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



Méthodes d'Adams-Bashforth

Adams-Bashforth Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Méthodes d'Adams-Bashforth

q Itération pour calculer y_{j+1}

0 $y_{j+1} = y_j + kf_j$ (*Euler explicite*)

1 $y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(3f_j - f_{j-1})$

2 $y_{j+1} = y_j + \frac{k}{12}(23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2})$

3 $y_{j+1} = y_j + \frac{k}{24}(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3})$

4 $y_{j+1} = y_j + \frac{k}{720}(1901f_j - 2774f_{j-1} + 2616f_{j-2} - 1274f_{j-3} + 251f_{j-4})$

5 $y_{j+1} = y_j + \frac{k}{1440}(4277f_j - 7923f_{j-1} + 9982f_{j-2} - 7298f_{j-3} + 2877f_{j-4} - 475f_{j-5})$

Erreur de troncature (locale) : $O(k^{q+1})$

Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)

Adams-Moulton Method ($q = 2$)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

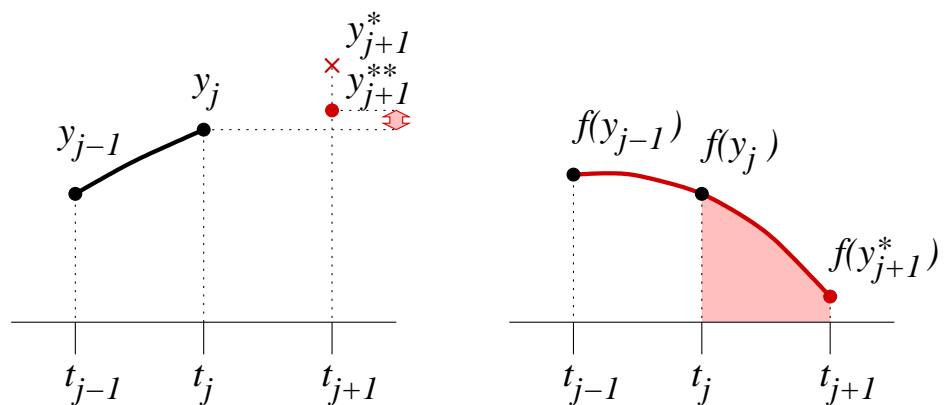
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



- y_{j+1}^* – valeur test pour itérer
- y_{j+1}^{**} – valeur calculée à partir de $f(y_{j+1}^*)$

Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)

Adams-Moulton Method ($q = 2$)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

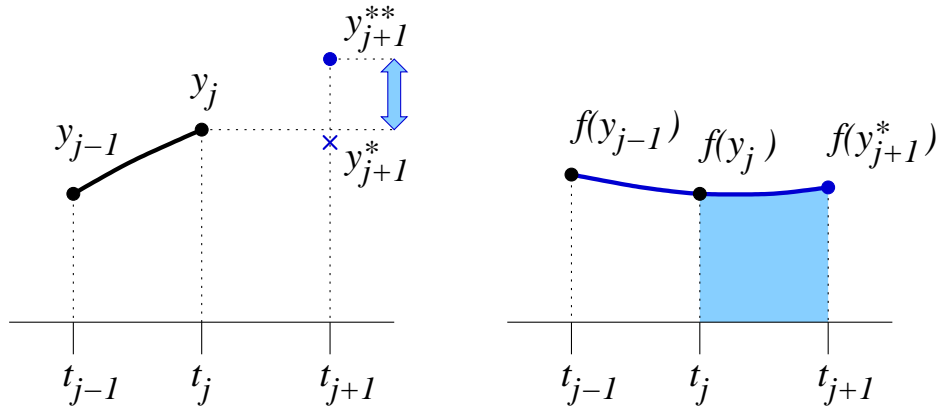
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



- y_{j+1}^* – valeur test pour itérer
- y_{j+1}^{**} – valeur calculée à partir de $f(y_{j+1}^*)$

Méthode d'Adams-Moulton ($q = 2$)

Adams-Moulton Method ($q = 2$)

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

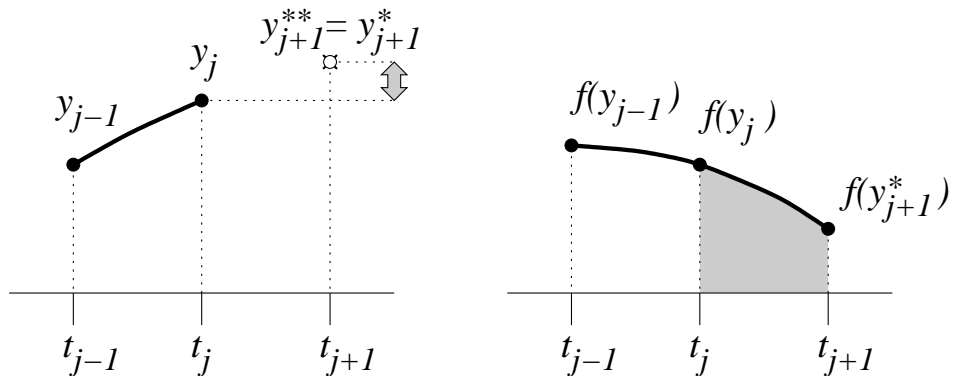
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



- y_{j+1}^* – valeur test pour itérer
- y_{j+1}^{**} – valeur calculée à partir de $f(y_{j+1}^*)$

Méthodes d'Adams-Moulton

Adams-Moulton Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Méthodes d'Adams-Moulton

q Itération pour calculer y_{j+1}

$$0 \quad y_{j+1} = y_j + kf_{j+1} \text{ (Euler implicite)}$$

$$1 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{k}{2}(f_{j+1} + f_j) \text{ (Trapèzes)}$$

$$2 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{k}{12}(5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1})$$

$$3 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{k}{24}(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2})$$

$$4 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{k}{720}(251f_{j+1} + 646f_j - 264f_{j-1} + 106f_{j-2} - 19f_{j-3})$$

$$5 \quad y_{j+1} = y_j + \frac{k}{1440}(475f_{j+1} + 1427f_j - 798f_{j-1} + 482f_{j-2} - 173f_{j-3} + 27f_{j-4})$$

Erreur de troncature (locale) : $O(k^{q+1})$

Méthodes obtenues par quadrature numérique

Methods Obtained by Numerical Quadrature

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Variations sur le même thème :

Partir de

$$y(t_{j+1}) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(y(t)) dt$$

et utiliser un polynôme de degré $q \geq 0$ passant par

$$\blacksquare (t_{j-q}, f(y_{j-q})), \dots, (t_j, f(y_j))$$

méthode de Nyström (explicite)

Cas particulier :

$q = 0 \rightarrow$ méthode saute-mouton (*leap-frog, midpoint rule*)

$$\blacksquare (t_{j-(q-1)}, f(y_{j-(q-1)})), \dots, (t_{j+1}, f(y_{j+1}))$$

méthode de Milne (implicite)

Méthodes d'Adams : Inconvénients

Adams Methods : Disadvantages

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Méthodes d'Adams :

- ⊖ exigent q valeurs "initiales" qu'il faut déterminer à l'aide
 - d'une série de Taylor en $t = t_0$ (dérivées de f requises)
 - d'une méthode d'ordre inférieur (danger d'amplification de l'erreur globale)
 - d'une méthode Runge-Kutta de même ordre (plus tard)
- ⊖ Adams-Moulton implicite : f non-linéaire demande méthode itérative pour déterminer y_{j+1}
 - utiliser Adams-Bashforth de même ordre, ou d'un ordre inférieur pour initialiser l'itération

Adams-Bashforth \Rightarrow prédicteur

Adams-Moulton \Rightarrow correcteur

Théorie : approfondissement

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Quelques notions théoriques

- Erreurs inhérentes à une méthode
- Consistance
- Ordre de convergence
- Convergence d'une méthode

Cadre numérique pour la résolution d'une E.D.O.

Numerical Framework for Solving an ODE

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Pour une E.D.O. donnée (problème à valeur initiale—*initial value problem*),

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{pour } t \in [t_0, t_0 + T], \quad \text{avec } y(t_0) = y_0,$$

nous considérons

- dans l'intervalle d'intégration (fixe) $[t_0, t_0 + T]$, une suite de points $\{t_{j,k} = t_0 + jk \mid j = 0, \dots, N_k\}$, appelés *noeuds*, avec $N_k = \lfloor T/k \rfloor$ (partie entière de T/k)
- une méthode numérique pour générer la suite d'approximations $y_{j,k}$ de la solution de l'E.D.O. aux points $t_{j,k}$

Récursion formelle pour approximations successives

Formal Recurrence for Successive Approximations

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

En toute généralité, la relation de récurrence utilisée pour calculer les approximations successives y_{j+1} de la solution d'une E.D.O. à l'aide d'une méthode numérique peut s'écrire formellement comme

$$y_{j+1} - Y(f, k; y_0, \dots, y_j; y'_0, \dots, y'_j, y'_{j+1}) = 0$$

Exemples :

- Euler explicite : $Y = Y(f, k; y_j) = y_j + kf(y_j)$
- Saute-mouton : $Y = Y(f, k; y_{j-1}, y_j) = y_{j-1} + 2kf(y_j)$
- Trapèzes : $Y = Y(f, k; y_j, y'_{j+1}) = y_j + \frac{k}{2}(f(y_j) + f(y_{j+1}))$

Erreurs associées à une méthode

Errors Associated with a Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Nous insérons la solution exacte de l'E.D.O., $y(t)$, dans la relation de récurrence (replacer y_j par $y(t_j)$, y'_j par $y'(t_j)$, etc.)

$$y_{j+1} - Y(f, k; y_0, \dots, y_j; y'_0, \dots, y'_j, y'_{j+1}).$$

L'*erreur de troncature locale* au noeud t_{j+1} , dénotée $\tau_{j+1}(k)$, est alors définie par

$$k\tau_{j+1}(k) = y(t_{j+1}) - Y(f, k; y(t_0), \dots, y(t_j); y'(t_0), \dots, y'(t_{j+1})).$$

L'*erreur de troncature globale*, $\tau(k)$, est

$$\tau(k) = \max_{0 \leq j \leq N_k} |\tau_{j+1}(k)|.$$

Consistance, ordre et convergence d'une méthode

Consistency, Order and Convergence of a Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

- Une méthode est dite *consistante* si

$$\lim_{k \rightarrow 0} \tau(k) = 0.$$

- Une méthode est qualifiée *d'ordre p* si

$$\tau(k) = O(k^p),$$

pour tout t dans l'intervalle d'intégration.

- La méthode numérique est dite *convergente* si

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \left(\max_{i=0, \dots, N_k} |y_{i,k} - y(t_{i,k})| \right) = 0.$$

Ordre de la méthode des trapèzes

Order of the Trapezoidal Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Exemple : Déterminer l'ordre de la méthode des trapèzes

$$y_{j+1} - y_j - \frac{k}{2}[f(y_{j+1}) + f(y_j)] = 0$$

Pour déterminer l'ordre de cette méthode :

- remplacer y_j par $y(t_j)$, y_{j+1} par $y(t_{j+1})$
- développer $y(t_{j+1})$ en série de Taylor
- développer $f(y(t_{j+1})) = y'(t_{j+1})$ en série de Taylor

$$\begin{aligned} & \{y(t_j) + ky'(t_j) + \frac{k^2}{2}y''(t_j) + O(k^3)\} - y(t_j) \\ & - \frac{k}{2}[\{y'(t_j) + ky''(t_j) + O(k^2)\} + y'(t_j)] \\ & = O(k^3) - \frac{k}{2}O(k^2) = O(k^3) \rightarrow \text{méthode d'ordre 2} \end{aligned}$$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas

Order and Convergence of Multistep Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Une méthode générale à s pas (aussi appelée *méthode à pas liés*, *méthode à pas multiples* ou *méthode multi-pas*) est définie par la récurrence

$$\begin{aligned} y_{j+1} + a_{s-1}y_j + \cdots + a_0y_{j+1-s} \\ = k(b_s f(y_{j+1}) + \cdots + b_0 f(y_{j+1-s})) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{m=0}^s a_m y_{j+1-s+m} = k \sum_{m=0}^s b_m f(y_{j+1-s+m})$$

où a_m, b_m ($m = 0, \dots, s$) sont des constantes données, indépendantes de k , de j et de l'E.D.O., avec $a_s = 1$ et $|a_0| + |b_0| \neq 0$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas

Order and Convergence of Multistep Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

- Méthode multi-pas à s pas définie par une *équation aux différences d'ordre s*

$$y_{j+1} + a_{s-1}y_j + \cdots + a_0y_{j+1-s} = \phi_{j+1}, \quad j = s-1, \dots$$

- Polynômes caractéristiques :

$$\rho(w) := \sum_{m=0}^s a_m w^m \quad \text{et} \quad \sigma(w) := \sum_{m=0}^s b_m w^m$$

- $\rho(w)$ est le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à l'équation aux différences
- caractéristiques des solutions de l'équation aux différences contrôlées par les racines de $\rho(w)$

Ordre et convergence de méthodes multi-pas

Order and Convergence of Multistep Methods

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature
Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Théorème

Une méthode multi-pas à s pas est d'ordre $p \geq 1$ si et seulement s'il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$\rho(\xi + 1) - \sigma(\xi + 1) \ln(\xi + 1) = c\xi^{p+1} + O(|\xi|^{p+2}).$$

Théorème (Théorème d'équivalence de Dahlquist)

Si l'erreur sur les valeurs de départ y_0, \dots, y_{s-1} tend vers 0 lorsque k tend vers 0^+ , alors, la méthode multi-pas à s pas est convergente si et seulement si elle est d'ordre $p \geq 1$ et son polynôme caractéristique ρ obéit à la condition de racine, c.-à-d. que toutes ses racines (évt. complexes) sont de module inférieur à 1 et que celles de module égal à 1 sont simples.

Ordre et convergence de la méthode des trapèzes II

Order and Convergence of the Trapezoidal Method II

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Méthode des trapèzes : $y_{j+1} - y_j = k(\frac{1}{2}f_{j+1} + \frac{1}{2}f_j)$

Polynômes caractéristiques (2 points, t_{j+1} et t_j) :

$$\rho(w) = w - 1 \quad \text{et} \quad \sigma(w) = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}$$

Ordre :

$$\rho(\xi + 1) = \xi$$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi + 1) \times \ln(\xi + 1) &= (\frac{1}{2}\xi + 1) \times (\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \xi - \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4) \\ &= \xi + \frac{1}{12}\xi^3 + O(\xi^4) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \rho(\xi + 1) - \sigma(\xi + 1) \times \ln(\xi + 1) = -\frac{1}{12}\xi^3 + O(\xi^4)$$

→ *méthode d'ordre 2*

→ *convergente ($w = 1$ seule racine de $\rho(w)$)*

Ordre et convergence de la méthode saute-mouton

Order and Convergence of the Leap-Frog Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation
A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

Méthode saute-mouton : $y_{j+1} - y_{j-1} = k 2f_j$

Polynômes caractéristiques (3 points, t_{j+1} , t_j et t_{j-1}) :

$$\rho(w) = w^2 - 1 \quad \text{et} \quad \sigma(w) = 2w$$

Ordre :

$$\rho(\xi + 1) = \xi^2 + 2\xi$$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi + 1) \times \ln(\xi + 1) &= 2(\xi + 1) \times (\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)) \\ &= 2\xi^2 + 2\xi - \xi^3 - \xi^2 + \frac{2}{3}\xi^3 + O(\xi^4) \\ &= \xi^2 + 2\xi - \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \rho(\xi + 1) - \sigma(\xi + 1) \times \ln(\xi + 1) = \frac{1}{3}\xi^3 + O(\xi^4)$$

→ *méthode d'ordre 2*

→ *convergente ($w = 1$ et $w = -1$ racines simples de $\rho(w)$)*

Méthode à trois pas d'ordre 6

Three-step sixth order method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist

$$y_{j+1} + \frac{27}{11}y_j - \frac{27}{11}y_{j-1} - y_{j-2} = k\left(\frac{3}{11}y'_{j+1} + \frac{27}{11}y'_j + \frac{27}{11}y'_{j-1} + \frac{3}{11}y'_{j-2}\right)$$

Polynômes caractéristiques (4 points, t_{j+1} , t_j , t_{j-1} et t_{j-2}) :

$$\rho(w) = w^3 + \frac{27}{11}w^2 - \frac{27}{11}w - 1$$

$$\sigma(w) = \frac{3}{11}w^3 + \frac{27}{11}w^2 + \frac{27}{11}w + \frac{3}{11}$$

Ordre :

$$\rho(\xi + 1) = \xi^3 + \frac{60}{11}\xi^2 + \frac{60}{11}\xi$$

$$\sigma(\xi + 1) \times \ln(\xi + 1) = \left(\frac{3}{11}\xi^3 + \frac{36}{11}\xi^2 + \frac{90}{11}\xi + \frac{60}{11}\right)$$

$$\times \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 + \dots\right)$$

$$= \dots$$

$$= \xi^3 + \frac{60}{11}\xi^2 + \frac{60}{11}\xi + \frac{3}{1540}\xi^7 + O(\xi^8)$$

Ainsi : *méthode d'ordre 6 (la seule à 3 pas)*

Méthode à trois pas d'ordre 6

Three-step Sixth-Order Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

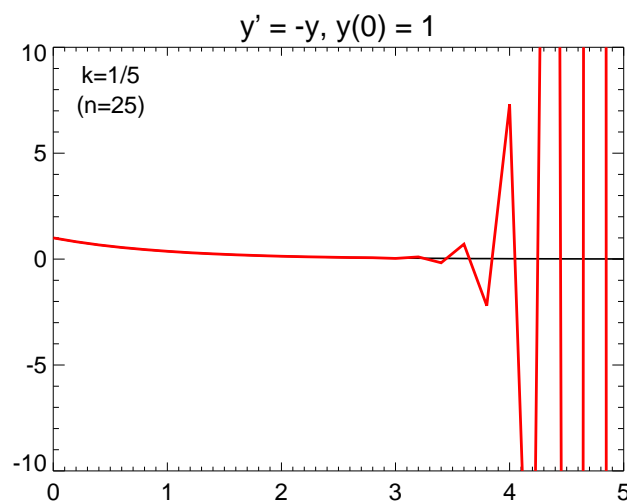
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



Méthode à trois pas d'ordre 6

Three-step Sixth-Order Method

Méthodes numériques et éléments de programmation

Guy Munhoven

Méthodes numériques pour E.D.O.

Méthodes par différentiation

A-stabilité (I)

Méthodes par quadrature

Méthodes d'Adams

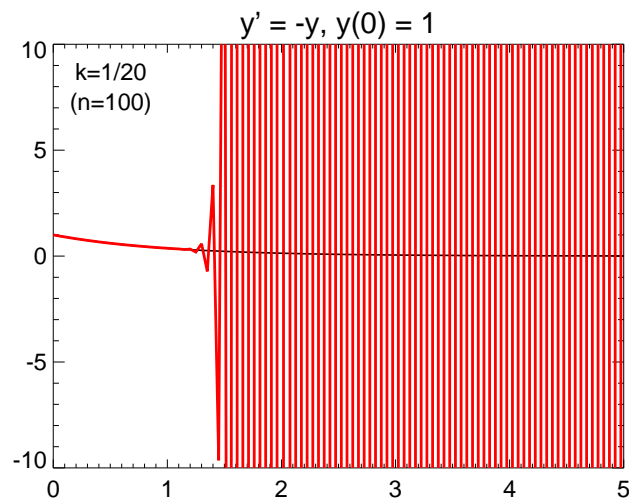
Concepts théoriques

Erreurs

Consistance, ordre et convergence

Méthodes multi-pas

Théorème de Dahlquist



⇒ Instabilités s'aggravent lorsque k diminue !

$$\rho(w) = w^3 + \frac{27}{11}w^2 - \frac{27}{11}w - 1 \simeq (w - 1)(w + 3,136)(w + 0,308)$$